Modelos Probabilísticos Teóricos Discretos e Contínuos

Bernoulli, Binomial, Poisson, Uniforme, Exponencial, Normal

Distribuição de Probabilidades

- A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória:
  - **quais** são os **resultados** possíveis;
  - **qual** é a **probabilidade** de cada resultado acontecer.
- Variável discreta: pares valores – probabilidade.
- Variável contínua: função densidade de probabilidades

Modelo de Bernoulli

- Modelo teórico discreto
- Apenas dois resultados possíveis: “sucesso”, “fracasso”.

x	$p(x)$
0	$1-p$
1	p
Total	1

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p \times (1-p)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Modelo Binomial

- Modelo teórico discreto
- X terá distribuição binomial se:
  - $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias discretas INDEPENDENTES com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p CONSTANTE.
- X: número de "sucessos" em n realizações de um experimento de Bernoulli
  - Com probabilidade de "sucesso" p constante ($0 < p < 1$)

Exemplo 1

- Lançamento de moeda honesta 4 vezes, identificação face voltada para cima: registro do número de caras (C).
- "Sucesso" = Cara; $p = 0,5$; $1 – p = 0,5$
- Independência
- $P(X=0) = P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4) = P(K_1)\times P(K_2)\times P(K_3)\times P(K_4)$
- $P(X=0) = (1 – p)^4 = 0,0625$
- $P(X=1) = P[(C_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4) \cup (K_1 \cap C_2 \cap K_3 \cap K_4) \cup [(K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap K_4) \cup [(K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap C_4)]$
- Cada sub-evento é M.E. com os outros.
- $P(X=1) = 4\times p\times (1\text{-}p)^3 = 0,25$

Modelo binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \times p^{x} \times (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \ldots, \mathrm{n})$$

$$C_{n,x} = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\ x!}$$

$$E(X) = n \times p \qquad V(X) = n \times p \times (1 - p)$$

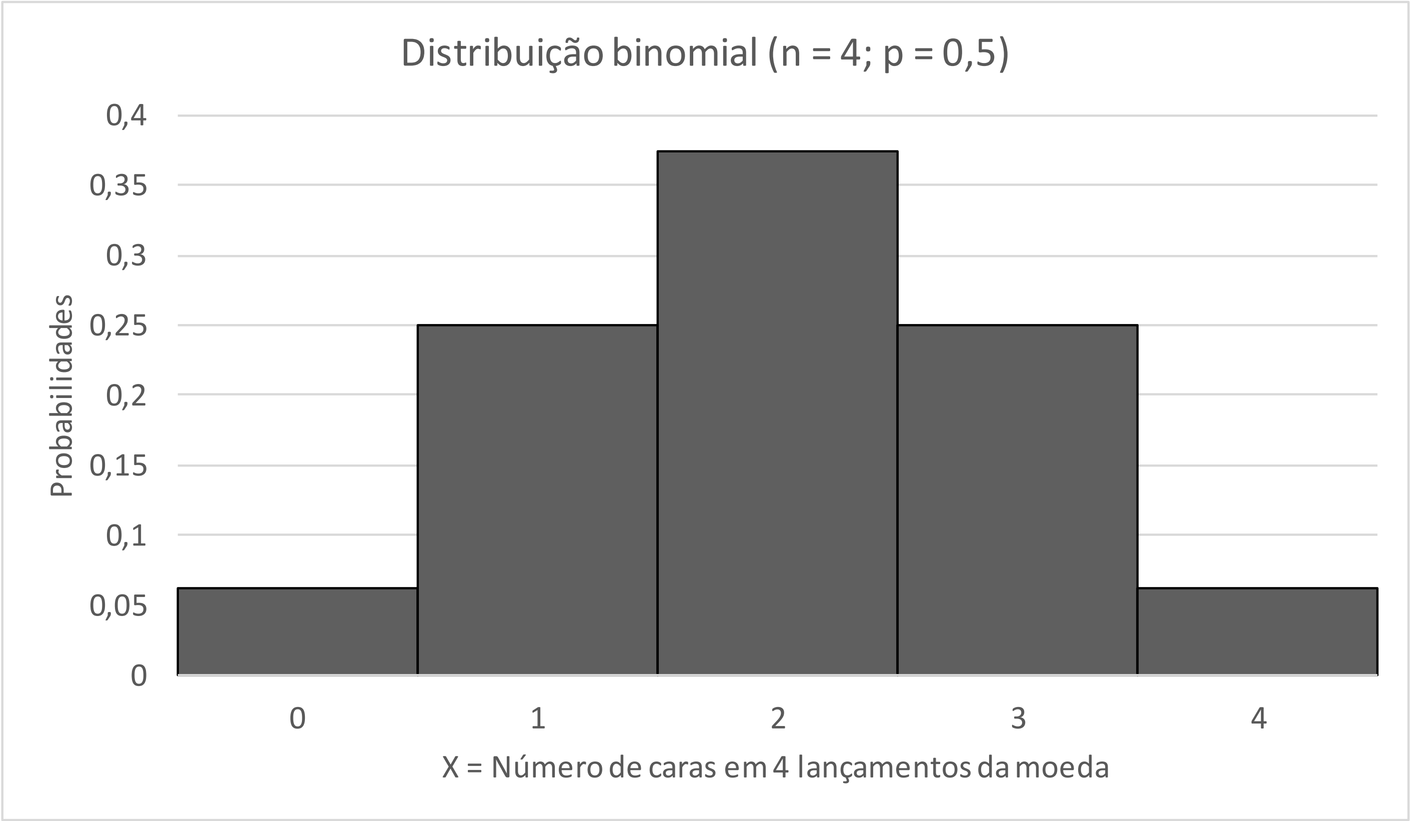
Exemplo 1 – pelo modelo binomial

- n = 4; p = 0,5; 1 – p = 0,5

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0{,}5^{0} \times (0{,}5)^{4-0} = 1 \times 1 \times 0{,}0625 = 0{,}0625$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0{,}5^{1} \times (0{,}5)^{4-1} = 4 \times 0{,}5 \times 0{,}125 = 0{,}25$$

Exemplo 1 – pelo modelo binomial



$E(X) = n \times p = 4 \times 0{,}5 = 2 \qquad V(X) = n \times p \times (1 - p) = 4 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 1$

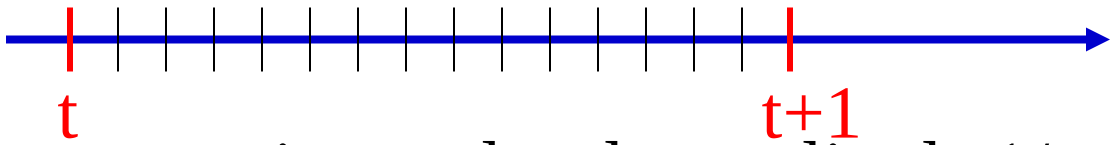
Modelo de Poisson

- Modelo teórico discreto.
- Experimento aleatório com espaço amostral infinito enumerável.
- Número de observações de uma variável em um intervalo contínuo (tempo ou espaço): distribuição de Poisson.

  Exemplos:
  - chamadas telefônicas por minuto,
  - mensagens que chegam a um servidor por segundo
  - acidentes por dia,
  - defeitos por m2, etc..

Modelo de Poisson

X = núm. de ocorrências em [t, t+1]



n intervalos de amplitude 1/n, com n $\mapsto \infty$

p = probab. de ocorrência em cada intervalo

$$P(X = x) \approx \binom{n}{x} \times p^{x} \times (1 - p)^{n-x}$$

n $\mapsto \infty$
p $\mapsto 0$
n × p $\mapsto \lambda > 0$

$$P(X = x) \longrightarrow \frac{\lambda \times t^{x} e^{-\lambda \times t}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

Modelo de Poisson

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda \times t} \times (\lambda \times t)^{x}}{x!} \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$E(X) = \lambda \times t \qquad V(X) = \lambda \times t$$

Exemplo 2

- Estudos de tráfego mostram que cerca de 3 mensagens chegam a um servidor a cada milissegundo.
- Calcule a probabilidade de que pelo menos 4 mensagens cheguem em 1 milissegundo.

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

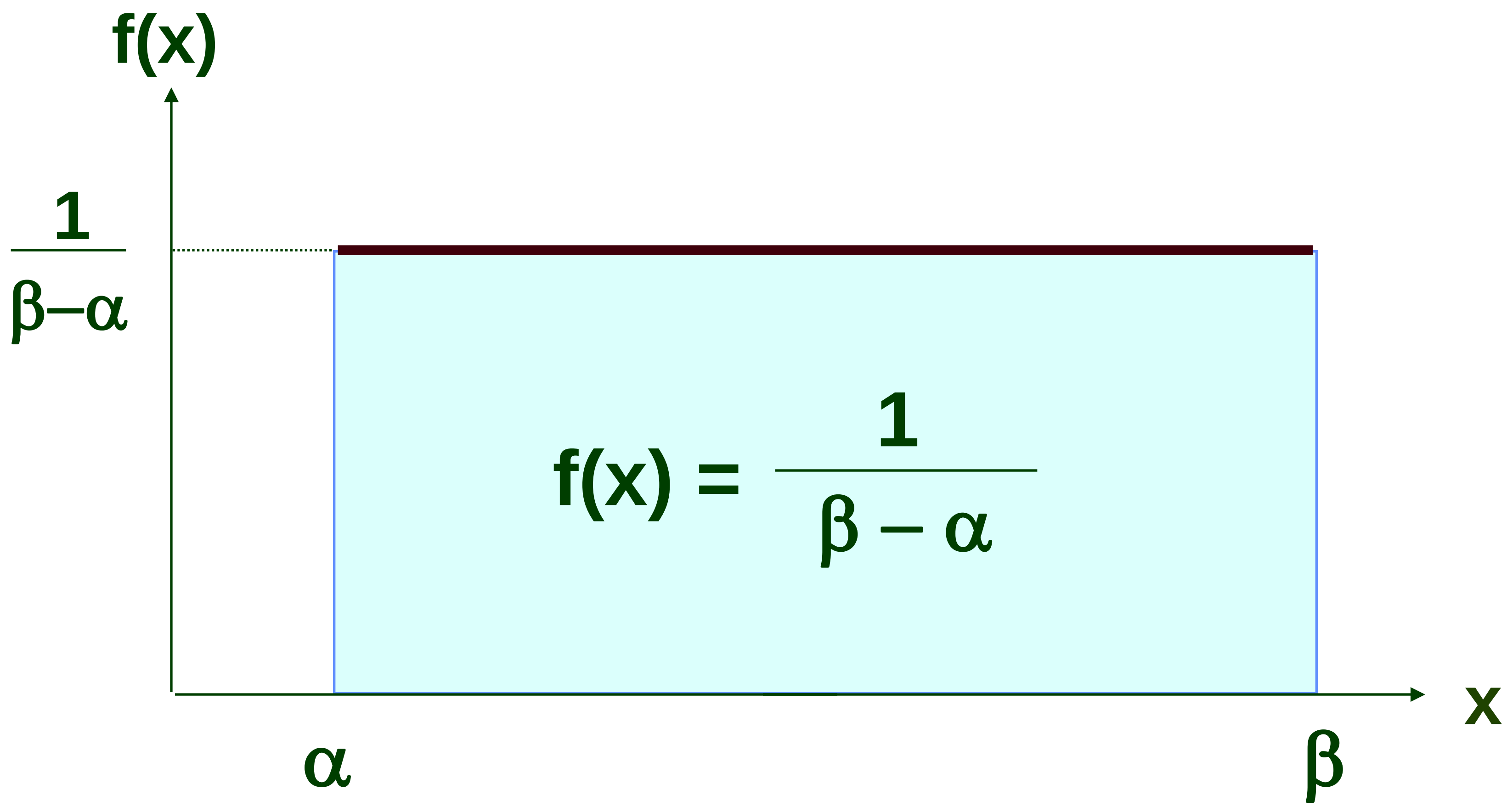
Exemplo 2

x	P(X=x)	Resultado
0	$P(X=0)=\frac{e^{-3\times 1}\times(3\times 1)^{0}}{0!}$	0,0498
1	$P(X=1)=\frac{e^{-3\times 1}\times(3\times 1)^{1}}{1!}$	0,1494
2	$P(X=2)=\frac{e^{-3\times 1}\times(3\times 1)^{2}}{2!}$	0,224
3	$P(X=3)=\frac{e^{-3\times 1}\times(3\times 1)^{3}}{3!}$	0,224

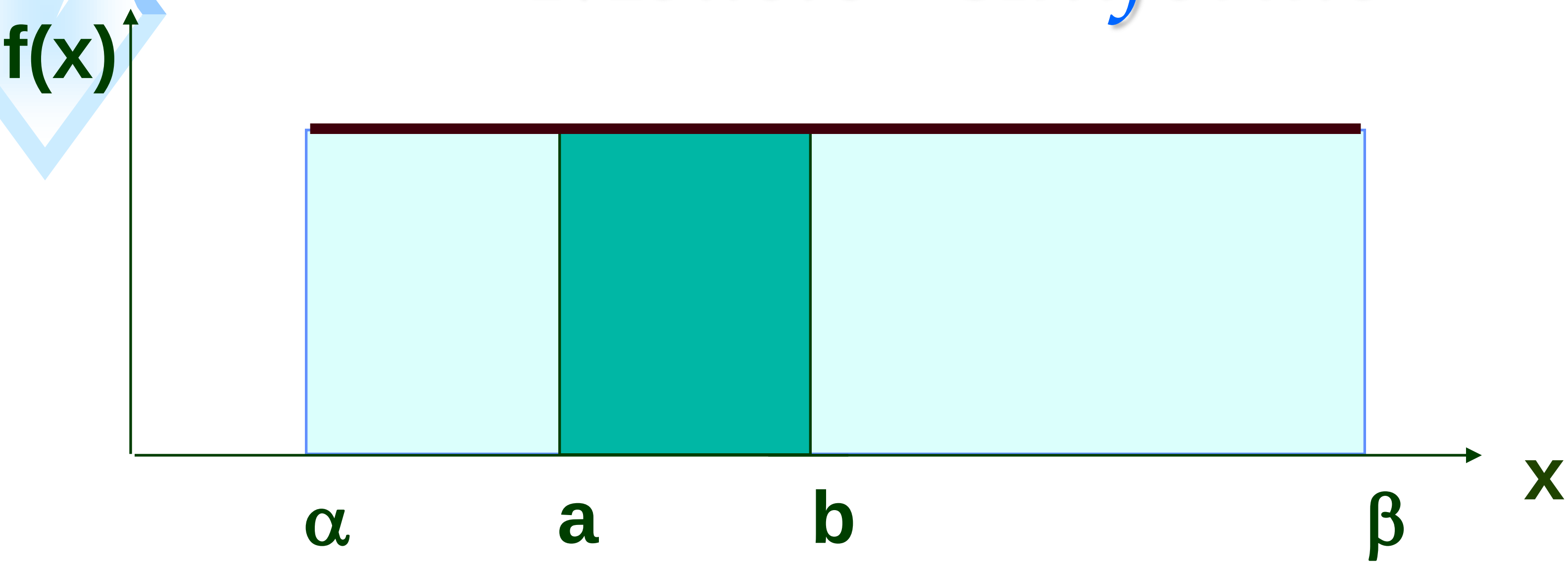
$$P(X\geq 4)=1-0,6472=0,3528$$

Modelo Uniforme

- Modelo teórico contínuo.



Modelo Uniforme



$$P(a < X < b) = \frac{b - a}{\beta - \alpha}$$

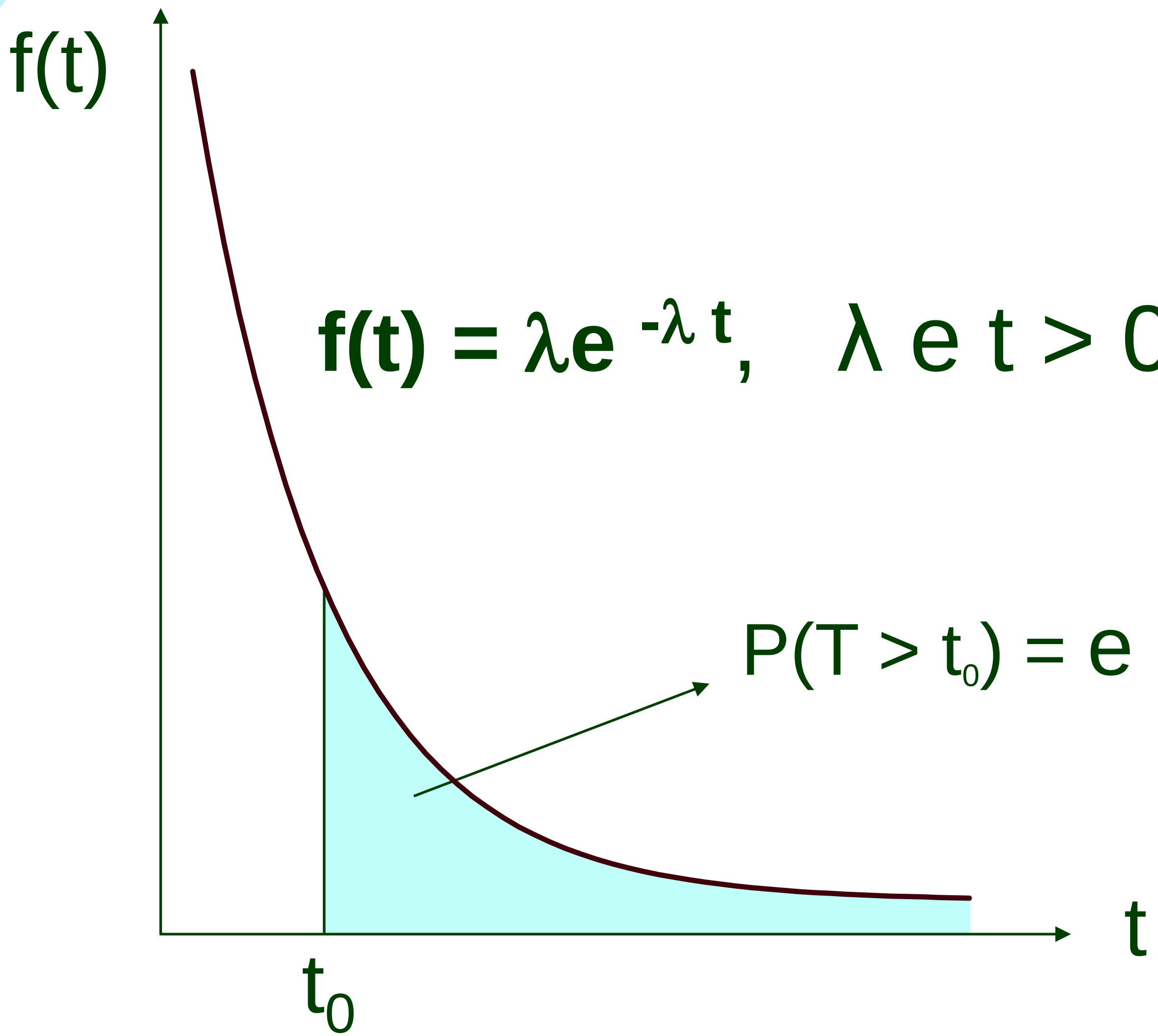
$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Modelo Exponencial

- Relação com a Poisson.
- X: variável aleatória *discreta* com distribuição de Poisson – número de ocorrências em um intervalo finito com uma taxa λ.
- T: variável aleatória *contínua* – tempo *entre* as ocorrências seguirá uma distribuição exponencial com valor esperado 1/λ

Modelo Exponencial



$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \lambda \text{ e } t > 0$$

$$P(T > t_0) = e^{-\lambda t_0}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemplo 3

- O setor de manutenção de uma empresa fez um levantamento das falhas de um importante equipamento, constatando que há, em média, 0,75 falha por ano e que o tempo entre falhas segue uma distribuição exponencial. Qual é a probabilidade do equipamento não falhar no próximo ano?

Exemplo 3

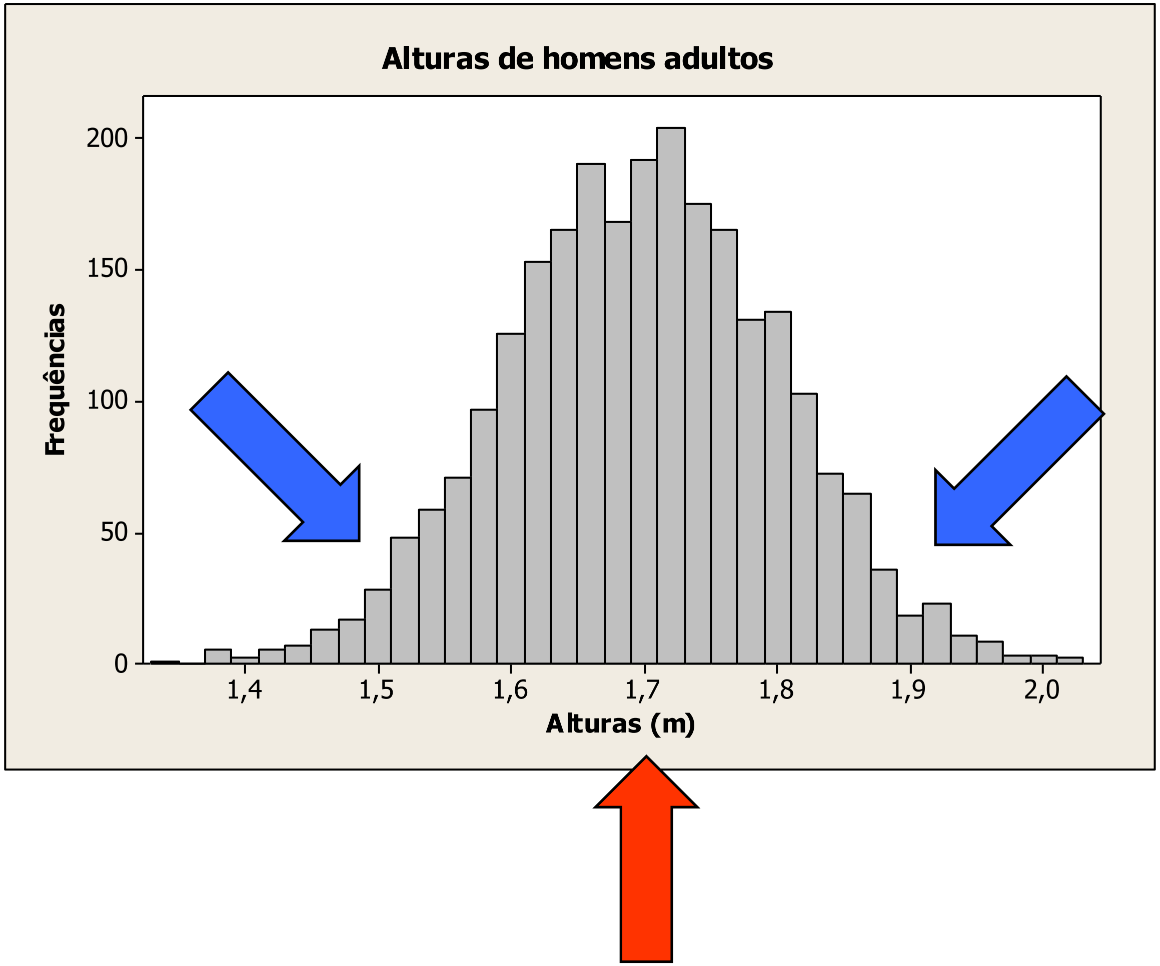
$\lambda = 0{,}75$

$P(T > t) = \mathbf{e}^{\mathbf{-\lambda\, t}}$

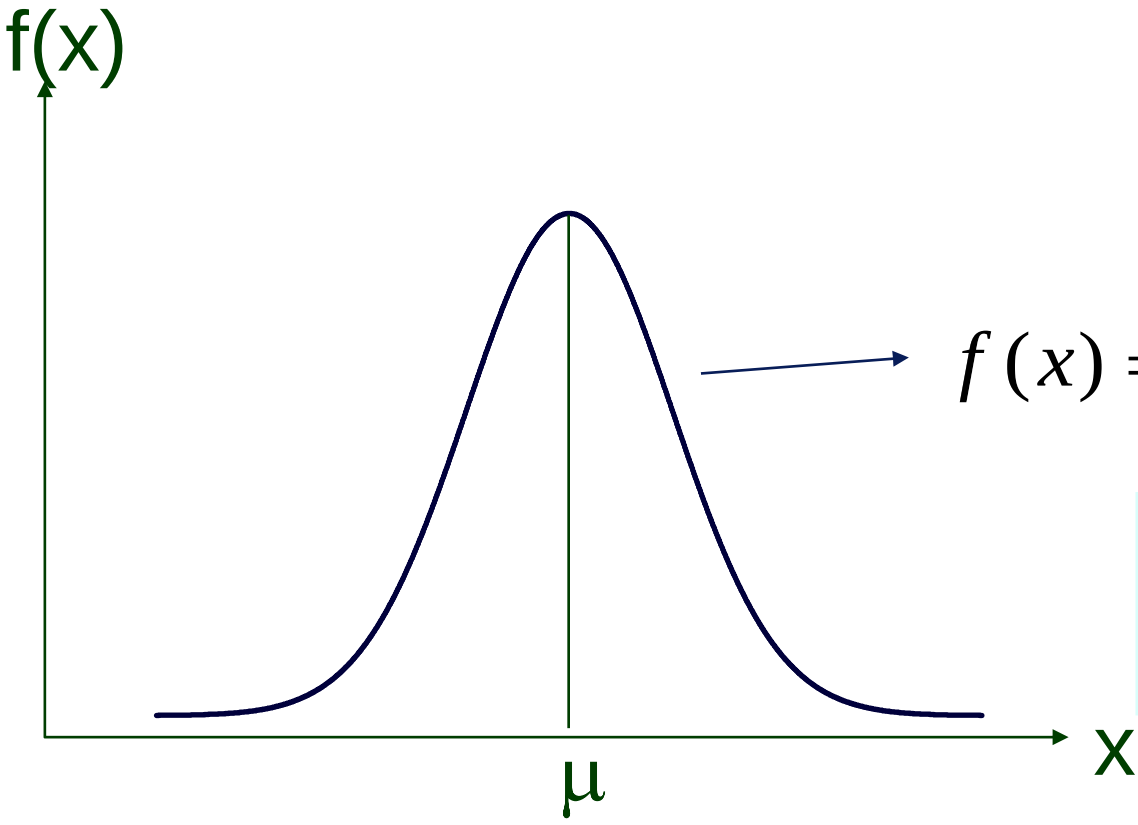
$P(T > 1) = e^{-(0,75)1} = \mathbf{0{,}4724}$ ou $\mathbf{47{,}24}\,\%$

Modelo Normal

Muitas variáveis aleatórias tem distribuições como:



Modelo Normal



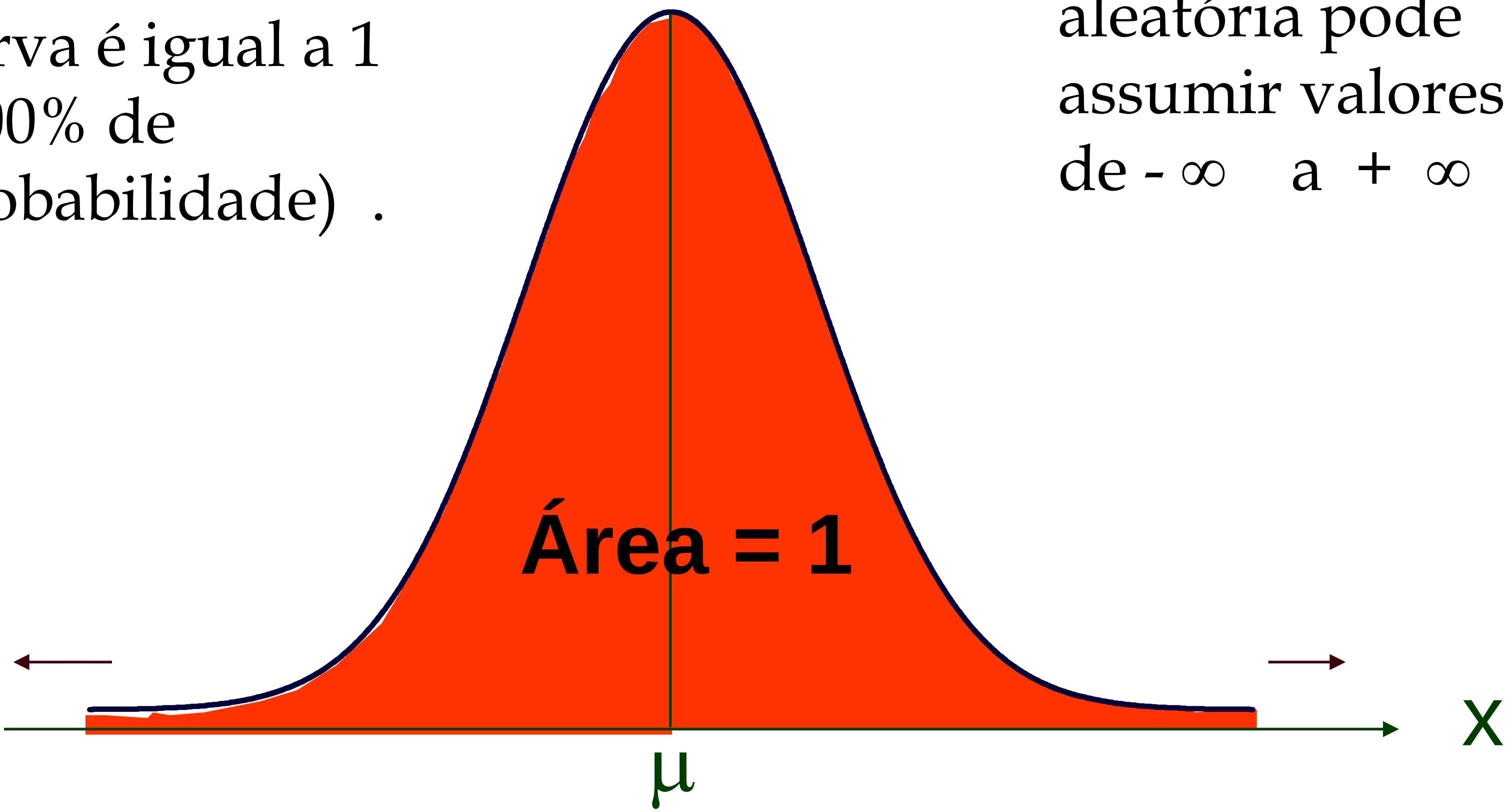
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ: média
σ: desvio padrão

Características

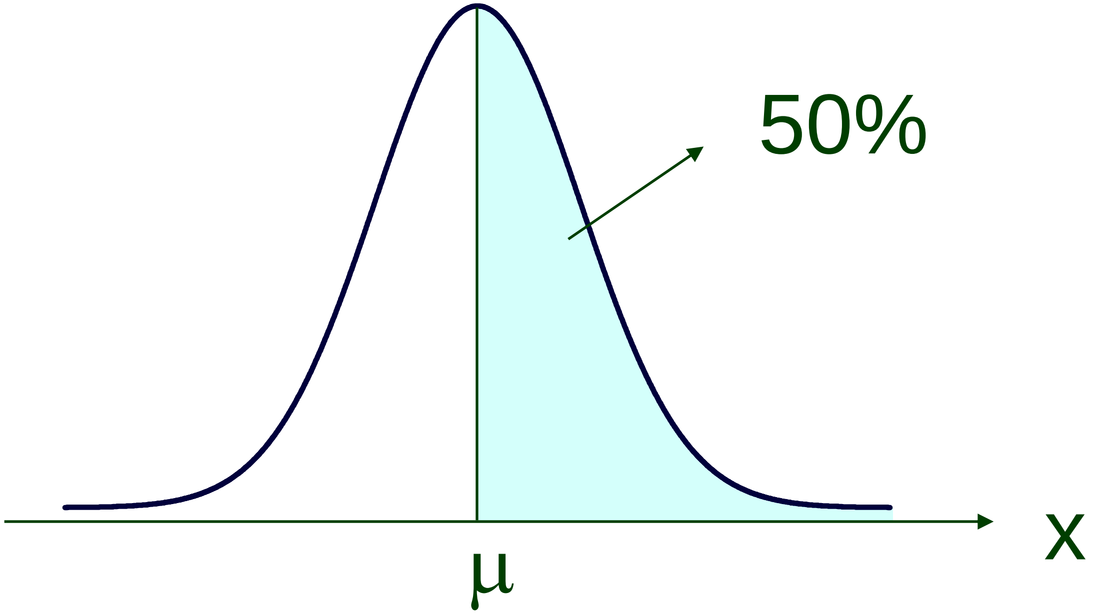
- Área abaixo da curva é igual a 1 (100% de probabilidade).

- A variável aleatória pode assumir valores de $-\infty$ a $+\infty$.

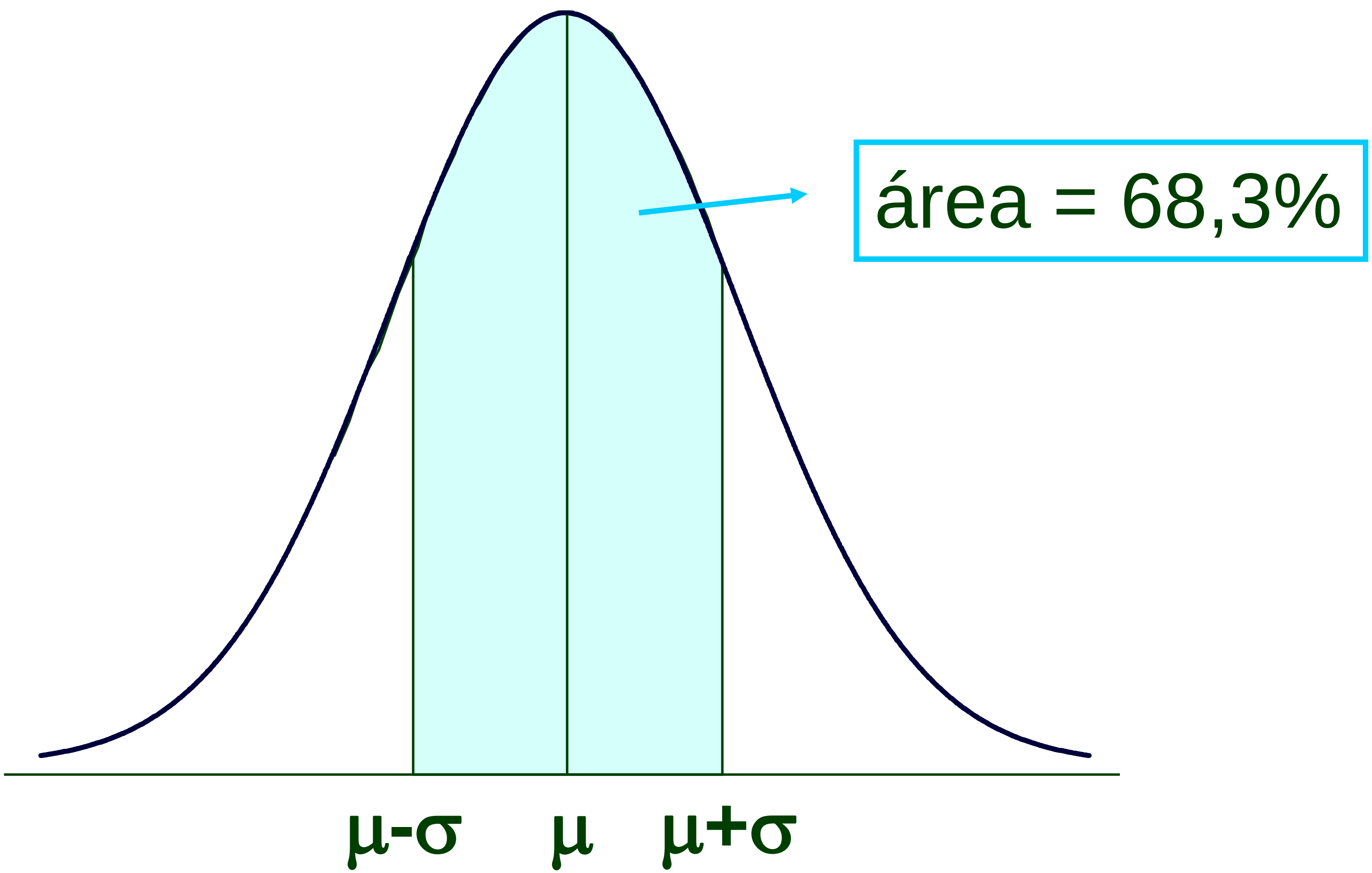


Características

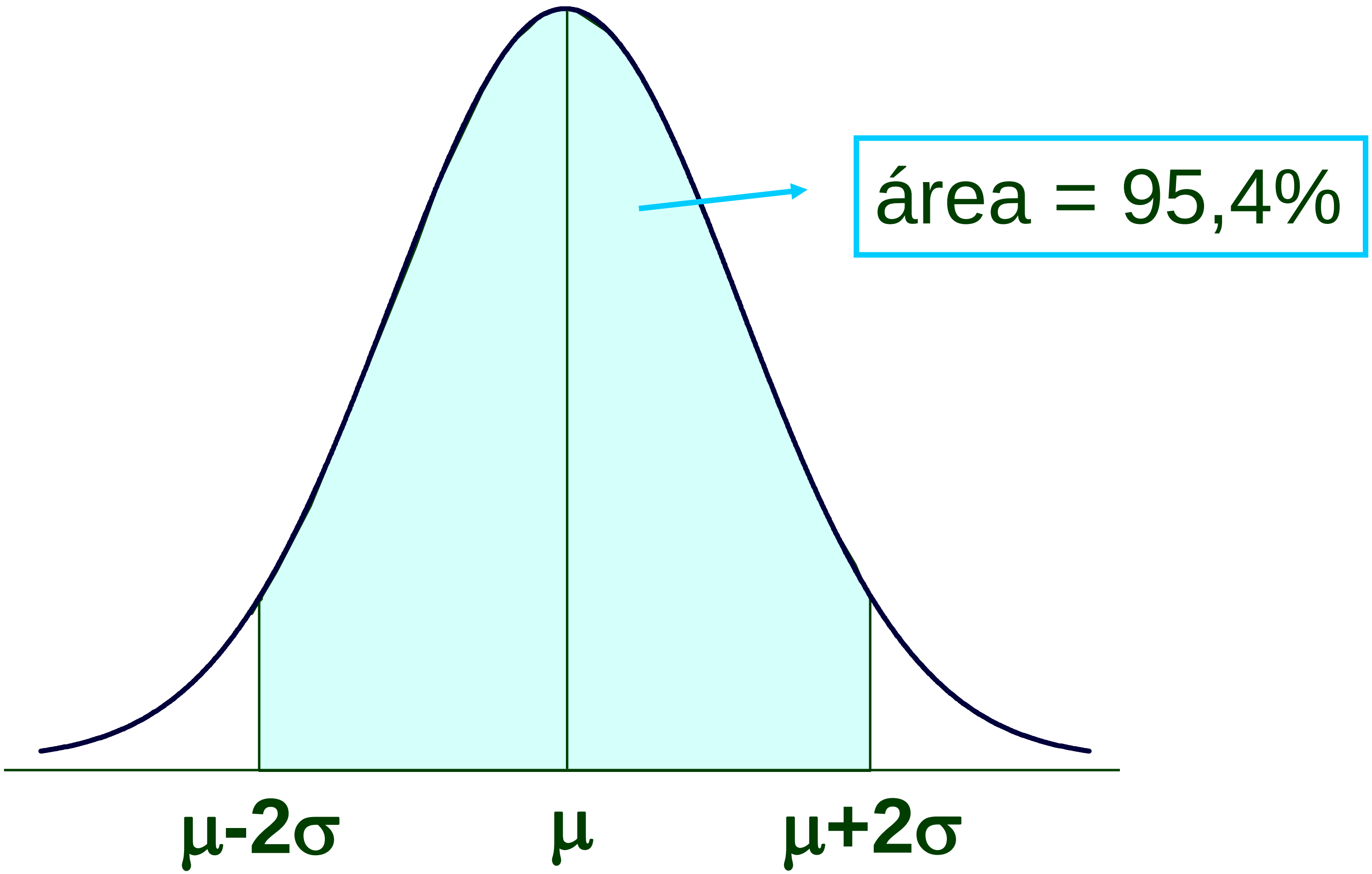
- Simetria em relação à média.



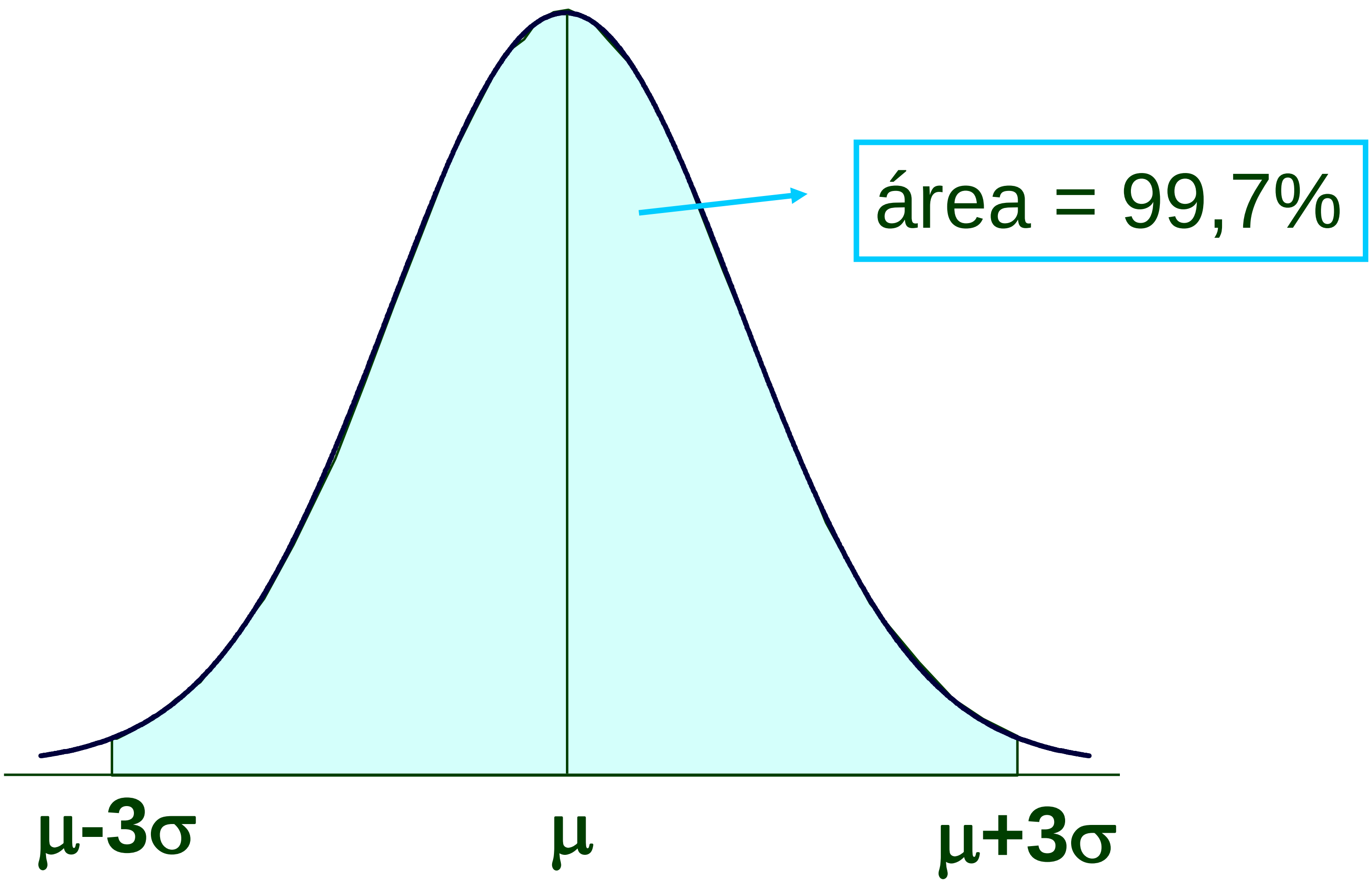
Exemplo



Exemplo



Exemplo

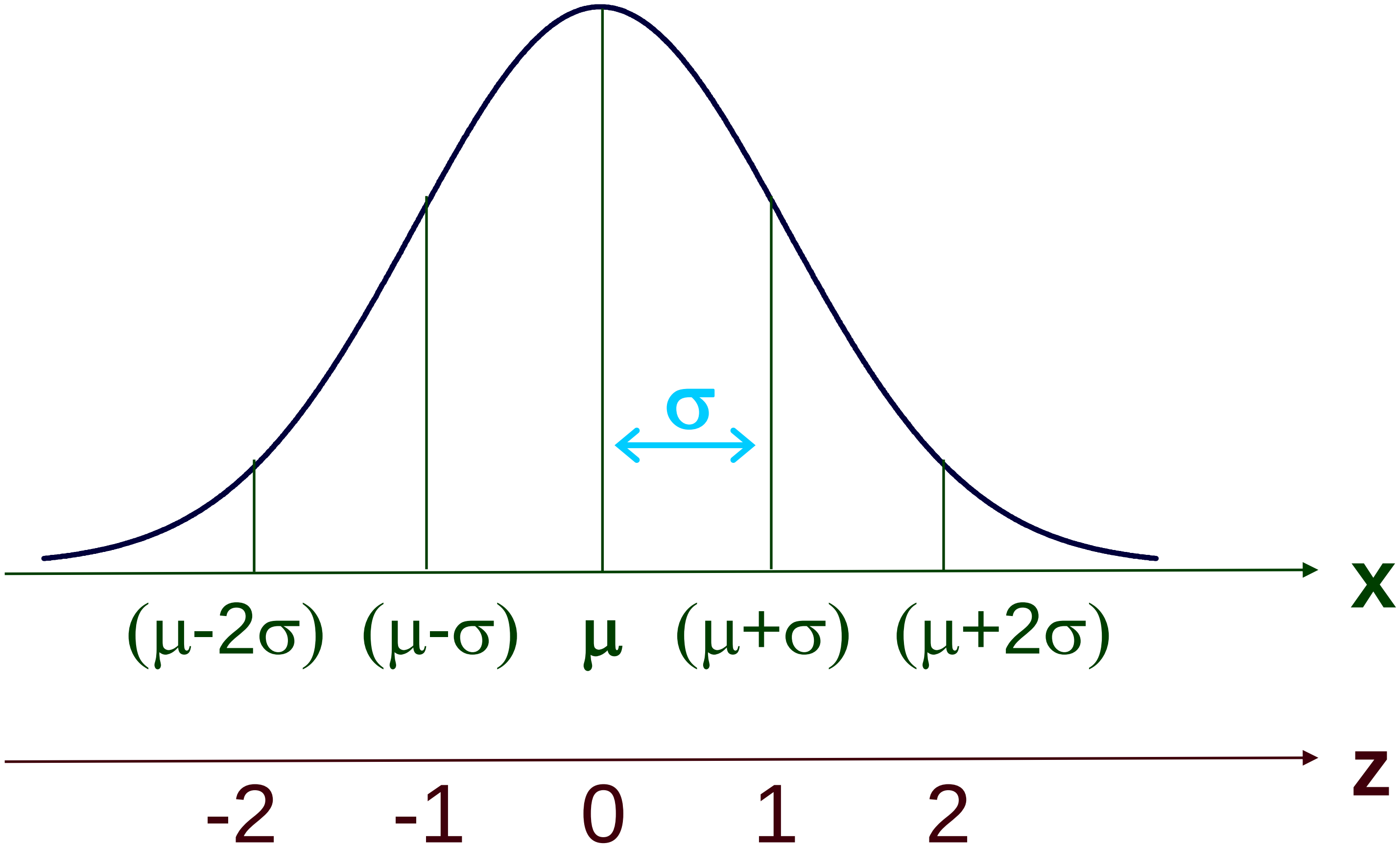


Normal Padronizada

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

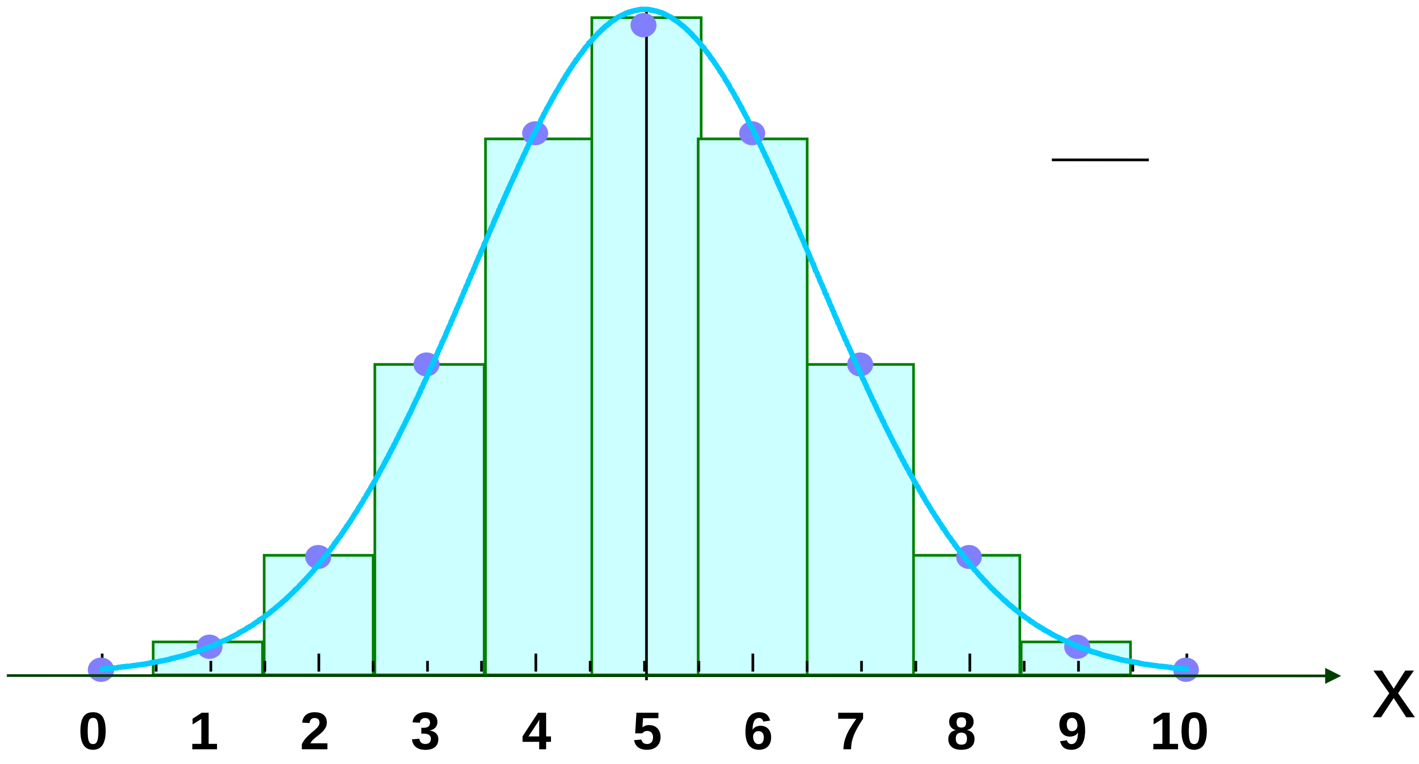
z - variável normal padronizada
x - variável normal
μ - média
σ - desvio padrão

Normal Padronizada



Aproximação da Binomial pela Normal

- Quando o número de ensaios (**n**) da binomial é grande, a distribuição binomial pode ser aproximada por uma normal com média **n×p** e variância **n×p×(1- p)**.



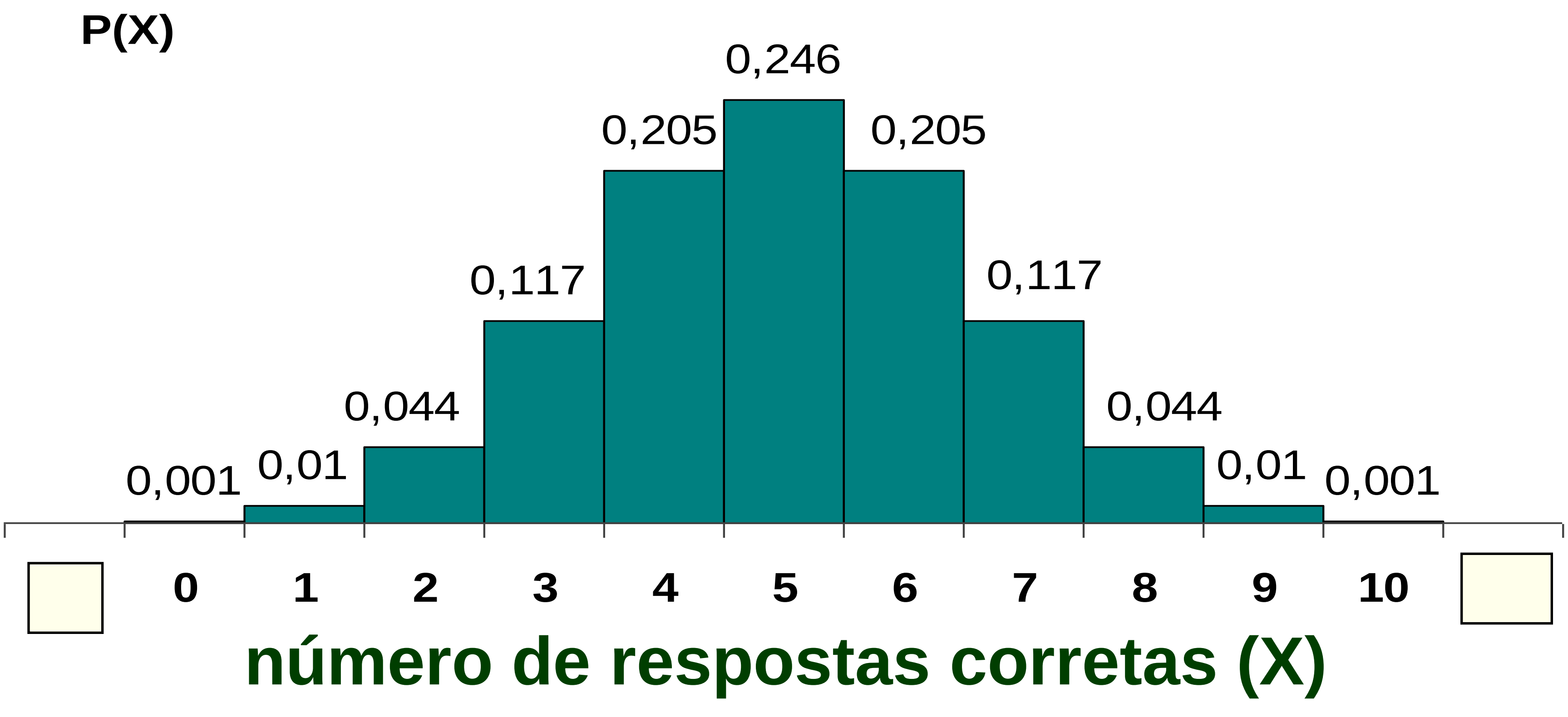
Exemplo 4

- Considere que um aluno irá fazer um teste de Estatística. Pelo que estudou ele tem **50%** de probabilidade de responder corretamente uma questão. Se o teste tem **10** perguntas, seja **X** o número de respostas corretas.

Exemplo 4

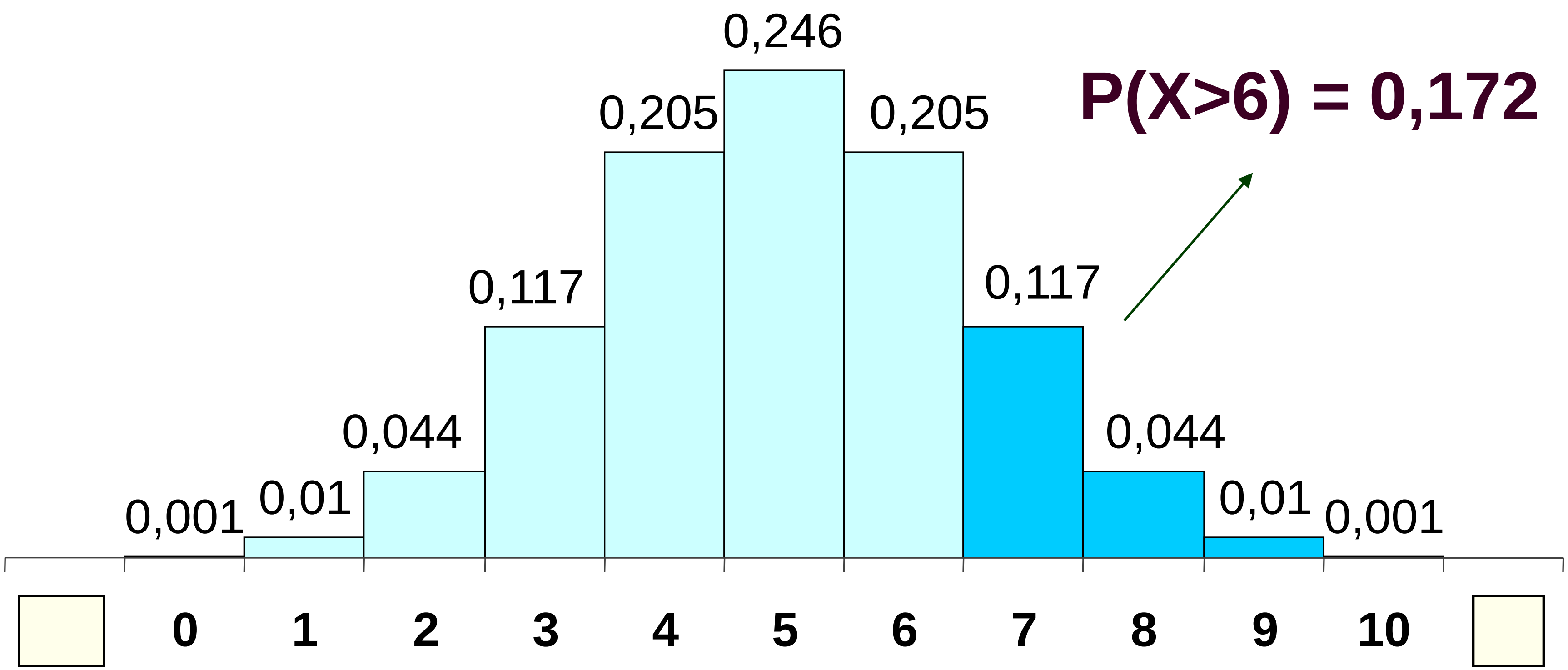
Distribuição binomial:

n=10 p=0,5



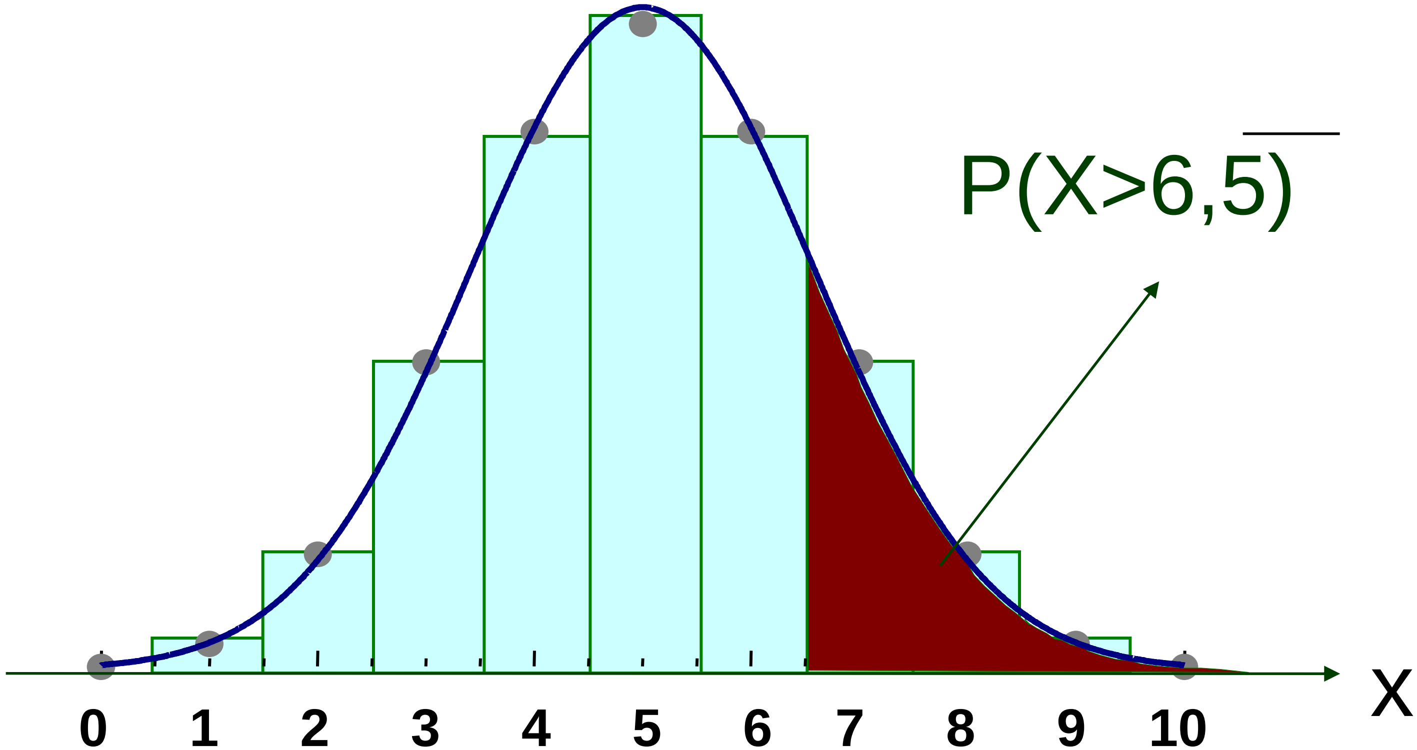
Exemplo 4

- Qual é a probabilidade de ocorrer mais de 6 corretas?
- P(X>6)=P(7)+P(8)+P(9)+P(10)**=0,117+0,044+0,010+0,001=0,172**

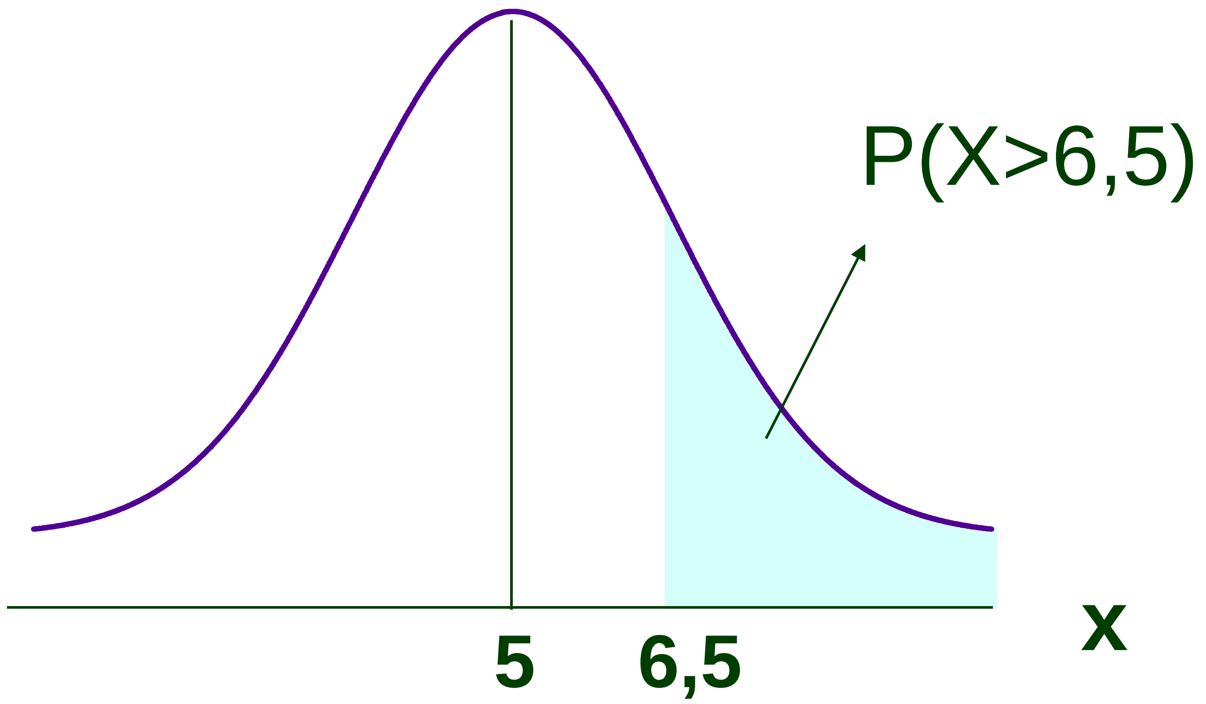


Exemplo 4 (de novo)

- Qual é a probabilidade de ocorrer mais de 6 respostas afirmativas? (usando a normal)



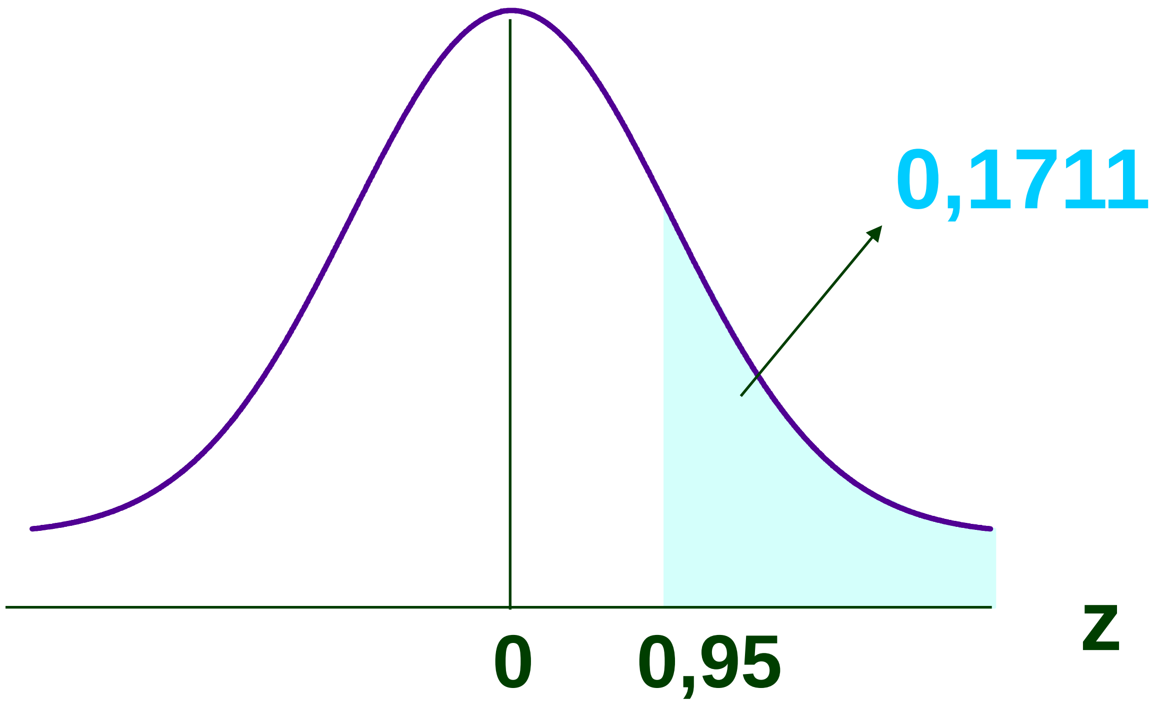
Exemplo 4 (de novo)



Exemplo 4 (de novo)

$\mu = 5 \qquad \sigma = 1{,}581139 \qquad x = 6{,}5$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6{,}5 - 5}{1{,}581139} = \mathbf{0{,}95}$$



Lembrando:
a probabilidade.
Exata (pela
binomial)
era de 0,1720