Distribuição normal

A normal é considerada a distribuição de probabilidade mais importante, pois permite modelar uma infinidade de fenômenos naturais e, além disso, possibilita realizar aproximações para calcular probabilidades de muitas variáveis aleatórias que têm outras distribuições.

A distribuição normal é caracterizada por uma função de probabilidade, cujo gráfico descreve uma curva em forma de sino, como mostra a Figura 1.

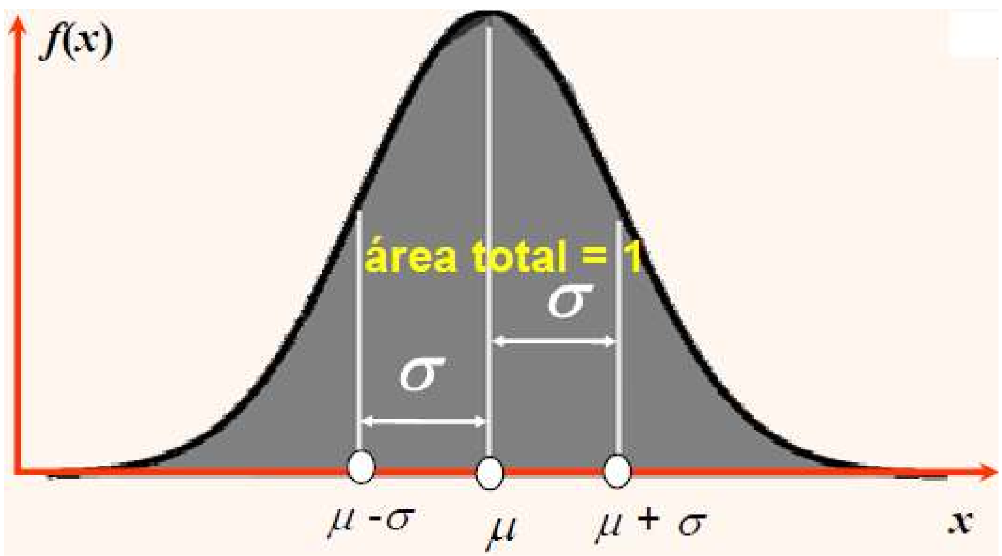


Figura 1- Representação gráfica da função de probabilidade normal e a indicação de seus dois parâmetros: μ e σ.
Fonte: Barbetta; Reis; Bornia, 2009, p.153

Em 1733 Abraham De Moivre desenvolveu a equação matemática da curva normal. Isto possibilitou estabelecer a base para toda a teoria da Estatística indutiva.

A distribuição normal é frequentemente chamada de distribuição de Gauss em honra a Gauss (1775-1855) que também obteve a equação de um estudo de erros em medidas repetidas da mesma quantidade.

Dados os parâmetros $\mu \in \Re$ e o $\sigma > 0$, a função densidade de probabilidade da normal é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Na seqüência, representaremos uma variável aleatória X com distribuição normal de média μ e variância σ^2 por $X : N(\mu, \sigma^2)$. Seguem outras características do modelo normal:

- a curva é simétrica em torno de μ, em conseqüência, os valores da média (μ) e da mediana (m_d) são iguais, e também $P(X < \mu - \alpha) = P(X > \mu + \alpha), \forall \alpha \in \Re$;

- teoricamente, a curva prolonga-se de $-\infty$ a $+\infty$, sendo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

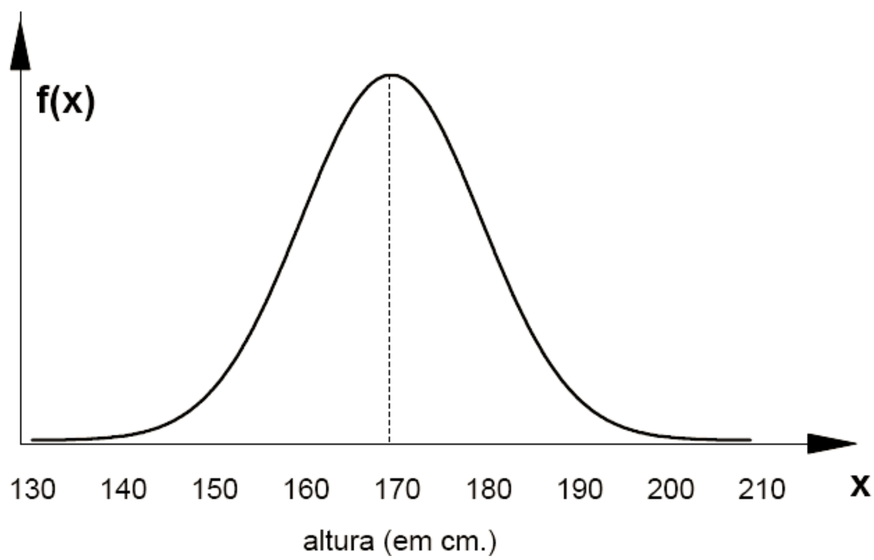
- qualquer combinação linear de variáveis aleatórias normais é também uma v.a. normal; em especial, se $X_1 : N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 : N(\mu_2, \sigma_2^2)$, então $\forall a, b \in \Re$, $Y = aX_1 + bX_2$ tem distribuição normal com

$$E(Y) = a\mu_1 + b\mu_2$$

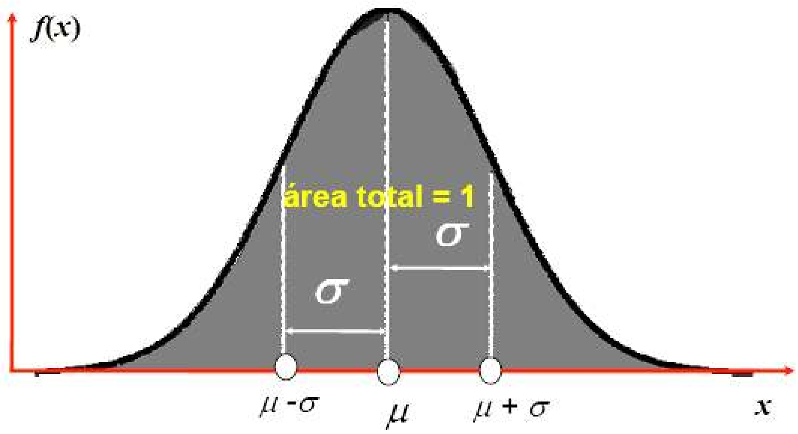
$$V(Y) = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$$

- afastamentos da média, em unidades de desvio padrão, preservam a mesma área sob a curva, independentemente dos valores de μ e σ.

Selecionar, aleatoriamente, de uma certa universidade, um estudante do sexo masculino. Seja **X** a sua altura, em centímetros.



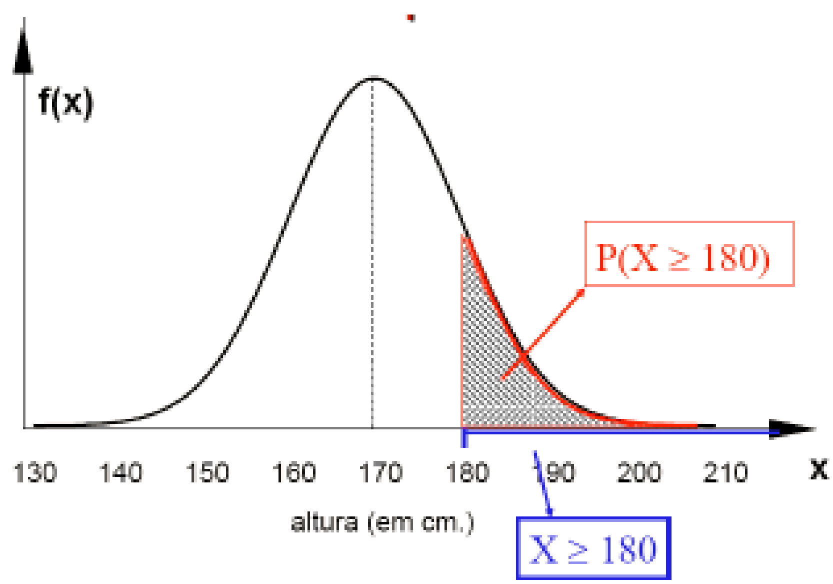
Distribuição normal



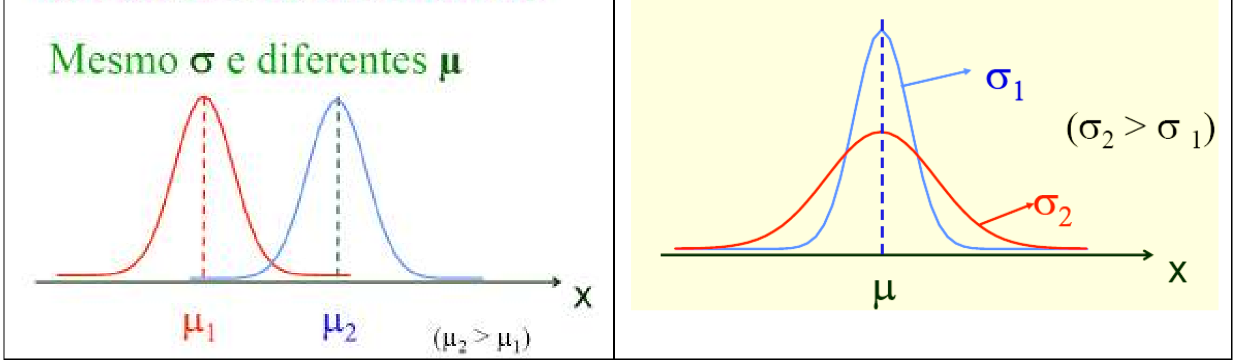
Representar:

- o evento: "o estudante selecionado ter 180 cm ou mais" (X ≥ 180) e

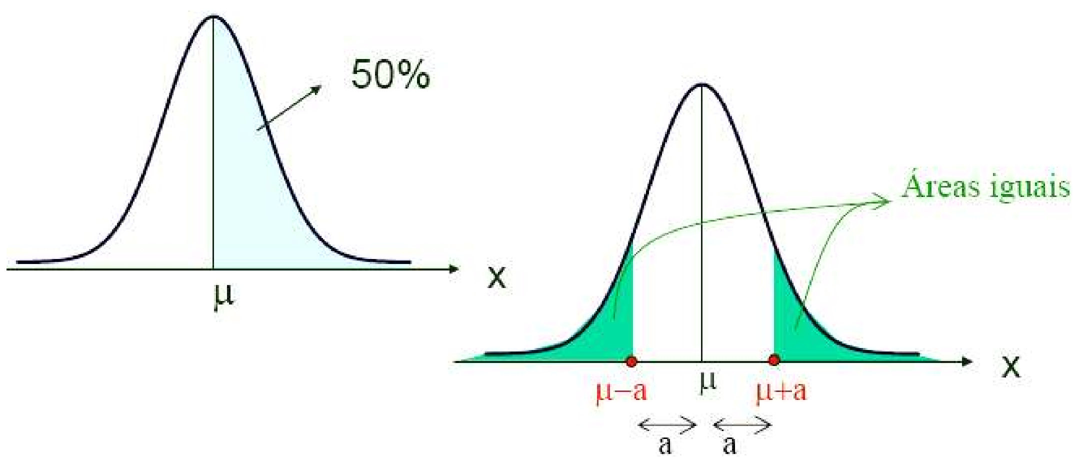
- a probabilidade deste evento: P(X ≥ 180)



Média e Desvio Padrão

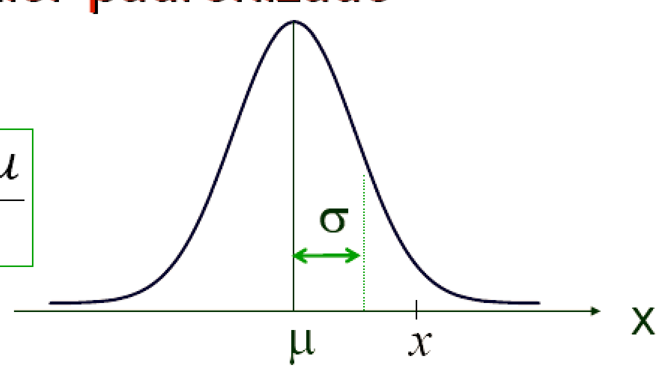


- Simetria em relação à média.



Valor padronizado

$$\boxed{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$



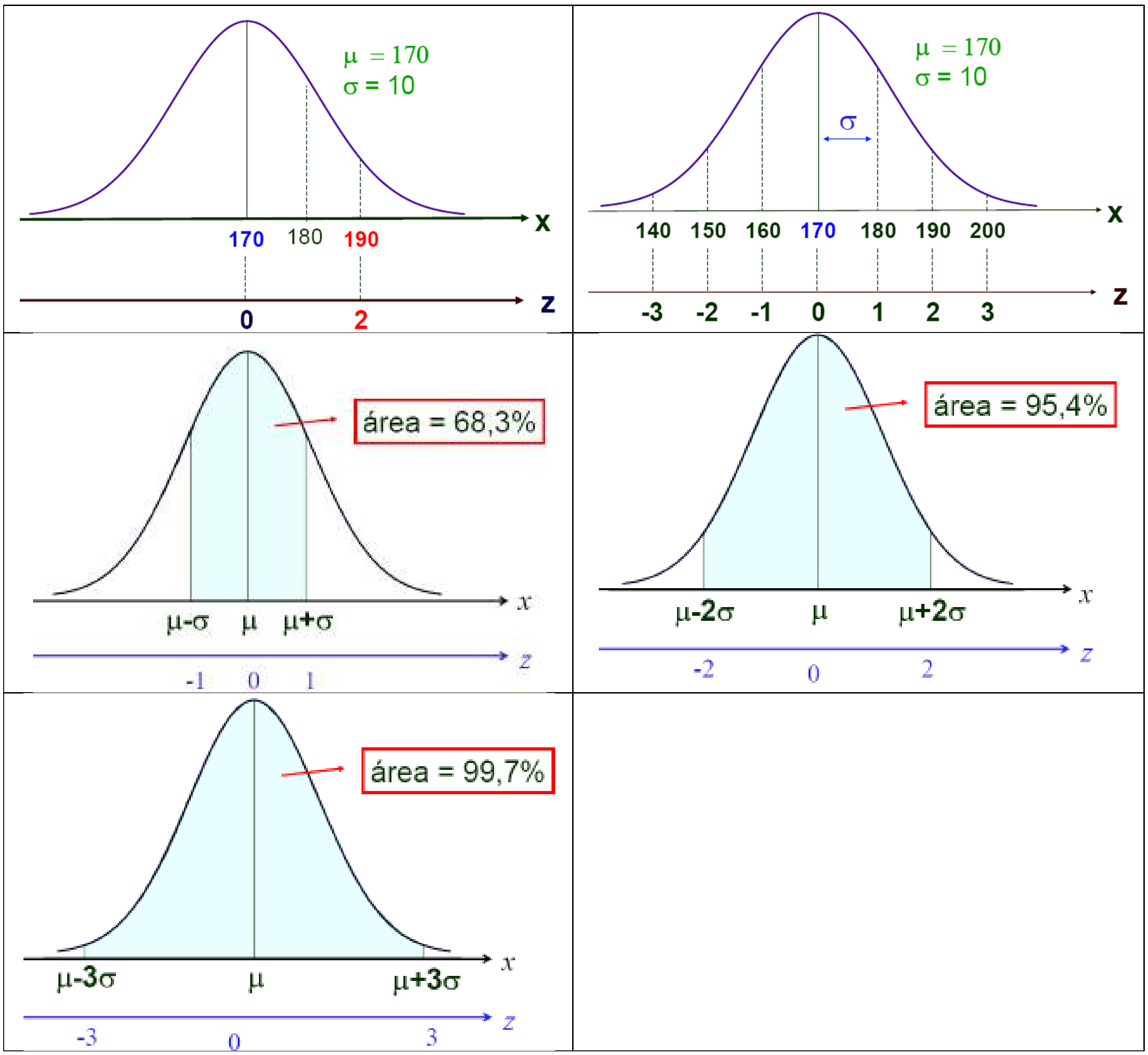
O valor z (*valor padronizado*) é uma medida relativa.

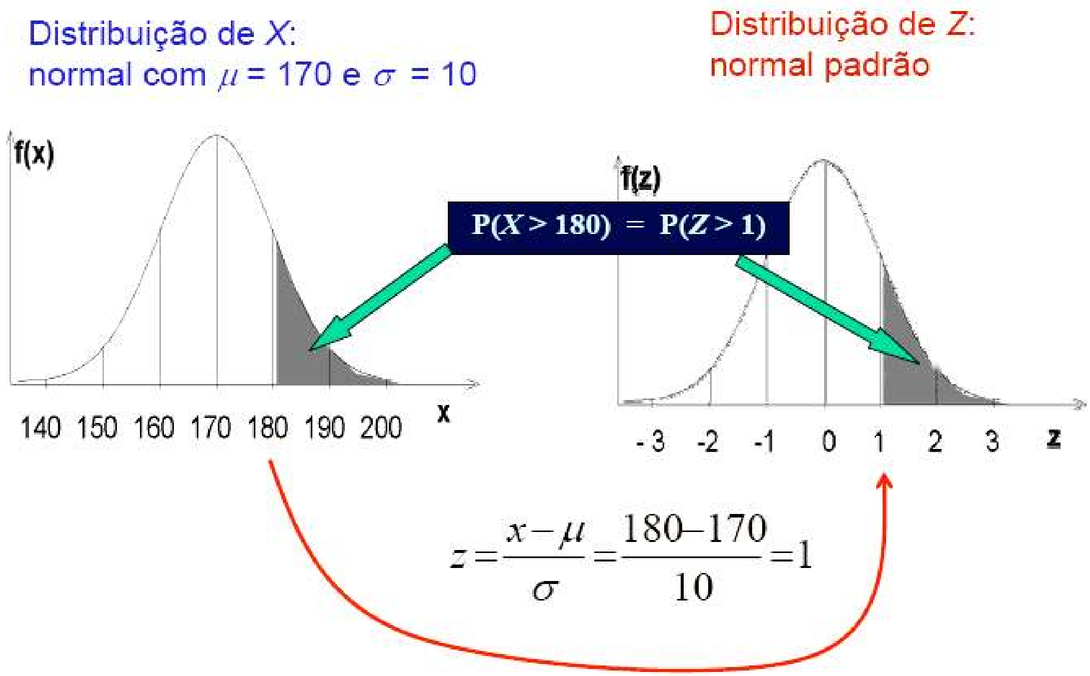
Mede o quanto x se afasta da média (μ), em unidade de desvio padrão (σ).

Exemplo:

Se a altura de um indivíduo for x = 190 cm, então qual é o escore padronizado z correspondente?

$$\boxed{z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{190-170}{10} = 2}$$



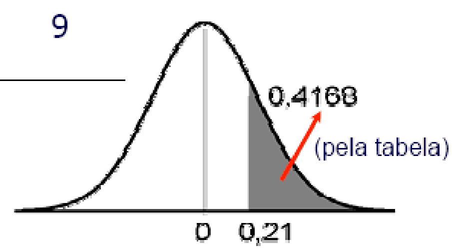


$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{180-170}{10} = 1$$

Tabela da distribuição normal padrão

Ex. Qual é a área acima de z = 0,21?

Z	segunda decimal de z				
	0	1	2	...	9
0,0					
0,1					
0,2		0,4168	(área na cauda superior)		
...					



Exemplo:

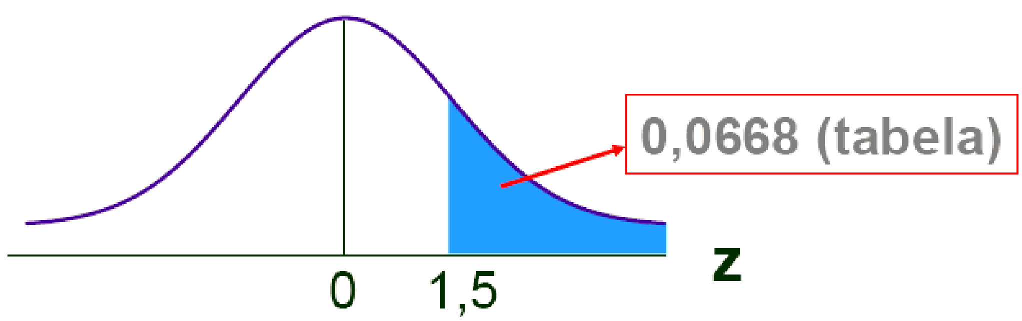
Selecionar, aleatoriamente, de uma certa universidade, um estudante do sexo masculino. Seja **X** o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do estudante sorteado ter altura superior a 185 cm?

- x = 185 cm $(\mu = 170, \quad \sigma = 10)$

Z $= ?$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{185 - 170}{10} = 1,5$$

P(X > 185) = P(Z > 1,5) =



Então, P(X > 185) = P(Z > 1,5) = 0,0668