Exercícios de Teoria da Probabilidade INE 5118
Prof. Paulo Sergio da Silva Borges – UFSC – 2005 **02/03/2005**
Eng. Elétrica

LISTA 1

Conjuntos e Modelos Probabilísticos

A Álgebra de Conjuntos tem diversas propriedades, que são conseqüências elementares das definições. Exemplos:
$S \cup T = T \cup S$; $S \cup (T \cup U) = (S \cup T) \cup U$; $S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$; $S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$;
$(S^c)^c = S$; $S \cap S^c = \varnothing$; $S \cup \Omega = \Omega$; $S \cap \Omega = S$. (Ω: espaço amostral; $\varnothing$: conjunto vazio)
Duas propriedades particularmente úteis são dadas pelas leis de De Morgan, as quais estabelem que:

(i) $\left(\bigcup_n S_n\right)^c = \bigcap_n S_n^c$ e (ii) $\left(\bigcap_n S_n\right)^c = \bigcup_n S_n^c$.

1. Tem-se que $P(A) = 0.55$, $P(B^c) = 0.35$, e $P(A \cup B) = 0.75$.
Determine $P(B)$ e $P(A \cap B)$.
Resposta: $P(B)=1-P(B^c)=0.65$; $P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B)$ $\therefore$ $P(A \cap B)=0.55+0.65-0.75 =$ **0.35**

2. Sejam A e B dois conjuntos. Sob que condições o conjunto $A \cap (A \cup B)^c$ *é vazio*?
Resposta: **Sempre**. A prova fica para o aluno tentar.

3. Sejam A e B dois conjuntos.
(a) Mostre que $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$ e $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$.
Resposta: Por De Morgan (ii): $(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$; Por(i) $(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B$.

(b) Considere um lançamento de um dado de 6 faces. Seja A o conjunto de resultados onde um número ímpar aparece na face superior. Seja B o conjunto de resultados onde 1 ou 2 aparecem. Calcule os conjuntos em ambos os lados das equações do item (a) acima e verifique se estas são verdadeiras. Resposta: Para o aluno tentar.

4. Sejam A e B dois conjuntos com um número finito de elementos. Mostre que o número de elementos em $A \cap B$ mais o número de elementos em $A \cup B$ é igual ao número de elementos em A mais o número em B. Resposta: Para o aluno tentar.

5. Tem-se que $P(A^c) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, e $P(A \cap B) = 0.2$. Determine $P(A \cup B)$. Resposta: $P(A \cup B)=$ **0.5**

6. Lança-se uma vez um dado de 4 faces (tetraedro, com faces 1, 2, 3 e 4) e depois lança-se outras vezes até que se obtenha uma face diferente da primeira. Seja ($r1$, $r2$) o resultado do experimento, onde $r1$ and $r2$ são as faces que sairam no primeiro e último lançamento, respectivamente. Assumir que todos os resultados possíveis são igualmente prováveis.
Encontre a probabilidade de que:
(a) $r1$ é par. Resposta: **1/2**
(b) Ambos $r1$ e $r2$ são pares. Resposta: **1/6**
Para ambos r1 e r2 serem pares, é necessário inciar com r1: par, P(r1:par)=1/2. O experimento $\mathcal{E}$ termina quando r2 $\neq$ r1. A probabilidade de que $\mathcal{E}$ termine no 2º lançamento é $1/2 \times 3/4 = 3/8$, sendo que a P(r2=par $\neq$ r1)= 1/4 e P(r2=impar)=2/4. A probabilidade de que $\mathcal{E}$ prossiga para o 3º lançamento é 1/4. Neste, repete-se a situação anterior. Então, a P(r1 e r2: pares)= $1/2 \times [1/4 + 1/4 \times 1/4 + 1/4 \times 1/4 \times 1/4 + \ldots \rightarrow$ soma de PG$] = (1/8)/(1-1/4) = 1/6$.
(c) $r1 + r2 < 5$. Resposta: **1/3**
Para que este novo $\mathcal{E}$ termine atendendo a condição com n=2 lançamentos, os seguintes 4 pares (r1, r2) são admissíveis: (1, 3), (1,2), (2, 1), (3, 1). Há o total de16 pares: os 4 listados correspondem a sucesso, outros 8 a fracasso (r1+ r2 $\geq$ 5) e 4 (r1=r2) conduzem a um novo lançamento do dado. Assim, P(sucesso|n=2)= 4/16=1/4. P(n>2)=4/16=1/4. Havendo o terceiro lançamento, as mesmas probabilidades ocorrem. Logo, P(sucesso)= (1/4)/(1-1/4)

7. Um dado mágico de 4 faces (1, 2, 3, 4) é lançado duas vezes, sendo S a soma dos pontos obtidos. A probabilidade de que $S = k$ é proporcional à soma k, para $k = 2, 3, \ldots, 8$, e todas as maneiras que uma dada soma k possa ser conseguida são igualmente prováveis. Construa um modelo probabilístico adequado de se obter faces iguais.

Resposta: w = constante de proporcionalidade; Então, (2+3+4+5+6+7+8)w = 1; w=1/35

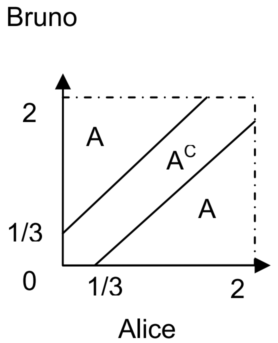
P(2 $\times$1)=2/35; P(2 $\times$2)=4/105; P(2 $\times$3)=4/105; P(2 $\times$4)=8/35.

8. Você compete em um torneio especial de xadrez onde você joga uma partida com cada um de quatro oponentes, mas V. pode escolher a ordem destes. V. vence o torneio se ganhar duas partidas consecutivas. V. conhece a probabilidade de vencer cada adversário. Qual a sua probabilidade de conquistar o torneio, assumindo que V. escolha a ordem ótima para as partidas?

Resposta: Sendo p_i e q_i (i= 1,2, 3, 4 - adversários) as probabilidades de ganhar ou perder, respectivamente, uma partida, a probabilidade de vencer o torneio é dada por $p_1*p_2 + q_1*p_2*p_3 + p_1*q_2*p_3*p_4 + q1*q_2*p_3*p_4$, podendo quaisquer adversários assumir os índices 1, 2, 3 e 4.

9. Alice e Bruno escolhem individualmente um número real entre 0 e 2. Assumem-se probabilidades uniformes para os eventos. Considere os seguintes eventos:
A: A magnitude da diferença dos dois números é maior que 1/3.
B: Pelo menos um dos números é maior que 1/3.
C: Os dois números são iguais.
D: O número de Alice é maior que 1/3.
Encontre as probabilidades **P**(A), **P**(B), **P**($A \cap B$), **P**(C), **P**(D), **P**($A \cap D$).

Resposta (parcial)



P(A) = 25/36

Demais eventos e probabilidades pedidas ficam por conta do aluno.

10. Demonstre a fórmula **P**[($A \cap B^c$) $\cup$ ($A^c \cap B$)] = **P**(A) + **P**(B) − 2**P**($A \cap B$), a qual fornece a probabilidade de que exatamente um dos eventos A ou B ocorrerá. [Compare com a fórmula **P**($A \cup B$) = **P**(A) + **P**(B) − **P**($A \cap B$), que dá a probabilidade de que *pelo menos* um dos eventos A e B ocorrerá]

11. Mostre a seguinte generalização da fórmula **P**($A \cup B \cup C$) = **P**(A) + **P**($A^c \cap B$) + **P**($A^c \cap B^c \cap C$)
Sejam os eventos A, B, C, e D. Então, **P**($A \cup B \cup C \cup D$) = **P**(A)+**P**($A^c \cap B$)+**P**($A^c \cap B^c \cap C$)+**P**($A^c \cap B^c \cap C^c \cap D$).

Probabilidade Condicional

12. O disquete contendo a única cópia do seu TCC ficou corrompido, e misturou-se com três outros disquetes iguais também corrompidos. Assim, é igualmente provável que cada um dos quatro disquetes seja o que contém o seu TCC. O seu colega, perito em computador, ofere-se para dar uma olhada, e V. sabe de experiências anteriores que a probabilidade de ele encontrar seu TCC em qualquer dos quatro disquetes é 40%, se o TCC estiver presente. Sabendo-se que ele procurou no disco 1 mas não encontrou, qual a probabilidade de que seu TCC esteja no disco i, para i=1, 2, 3, 4?

Resposta (parcial): P(TCC+|D+)=0.40; P(TCC–|D+)=0.60; P(TCC+|D–)=0.00; P(TCC–|D–)=1.00; P(D+)=0.25; P(D+)=0.75
P(D1+|TCC–)=[P(TCC–|D1+)$\times$P(D1+)]/P(TCC–); P(TCC–)= P(TCC–|D1+)$\times$P(D1+)+ P(TCC–|D1–)$\times$P(D1–)=0.60$\times$0.25+ 1$\times$0.75= 0.90; logo, P(D1+|TCC–)=[0.60$\times$0.25]/0.90=1/6; Cálculos para os demais disquetes para o aluno tentar resolver.

13. Uma pessoa esqueceu o ultimo dígito do número de um telefone, e resolve teclá-lo ao acaso. Quantas vezes precisará tentar (não contando repetições do mesmo dígito) para que a probabilidade de conseguir o número correto seja mais do que 50%?

Resposta: P(sucesso em k tentativas)=1/10+9/10×1/9+9/10×8/9×1/8+...=1/10+1/10+1/10+...= $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{10}$ >0.5; Logo, k=6.

14. Lançam-se dois dados comuns equilibrados de 6 faces.
(a) Encontre a probabilidade de obter pontos iguais
(b) Sabendo-se que a soma dos pontos resultou em 4 ou menos, calcule a probabilidade de obter pontos iguais..
(c) Determine a probabilidade de que pelo menos um dado resultou 6.
(d) Sabendo-se que nos dois dados sairam pontos diferentes, determine a probabilidade de que pelo menos um dado resultou 6.

Resposta: (a) P(pts iguais)= 6/36=1/6; (b) P($\Sigma \le 4$)= 6/36=1/6; P(pts iguais|$\Sigma \le 4$)=P(pts iguais ∩ ($\Sigma \le 4$))/ P($\Sigma \le 4$)= =(2/36)/(1/6)=1/3 (c) P(pelo menos uma face 6) = (36 – 25)/36= 11/36; (d) P(pelo menos uma face 6| pts ≠) = P(pelo menos uma face 6 ∩ pts ≠)/P(pts ≠) = (10/36)/(1-1/6)=1/3

15. Repita os itens (a)-(d) do problema anterior sabendo-se que:
(i) Em ambos os dados, a probabilidade de cada face é proporcional aos pontos da mesma.
(ii) Em ambos os dados, a probabilidade de cada face é inversamente proporcional aos pontos da mesma.
(iii) Em um dos dados, a probabilidade de cada face é proporcional aos pontos e no outro é inversamente proporcional aos pontos.
(iv) A probabilidade de um resultado (conjuntamente nos dois dados) é proporcional à soma dos pontos dos dados.
(v) A probabilidade de um resultado (conjuntamente nos dois dados) é proprcionalao produto dos pontos dos dados.

Solução e Respostas para o aluno tentar (para resolver, calcule as constantes de proporcionalidade em cada caso).

16. Uma moeda é lançada duas vezes. Leteska afirma que o evento {duas caras HH} tem a mesma probabilidade se soubermos que (a) o primeiro lançamento deu cara (H✪) ou se soubermos que (b) pelo menos um dos lançamentos deu cara (¬TT). (i) Ela está certa? (ii) Faz diferença se a moeda é equilibrada ou não? (iii) Como se pode generalizar o raciocínio da Leteska?

Resposta: (i) Não; (ii) Sim; (iii) Sendo p=P(H)=1-q=1-P(T), P(HH|(a))=p e P(HH|(b)= p/(2-p).

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes

17. Um novo teste foi desenvolvido para determinar se um estudante está estressado com o estudo de Teoria da Probabilidade. O teste é 95% acurado se o estudante NÃO está estressado, mas acerta somente 85% se ele ou ela está de fato estressado. Sabe-se que 99.5% de todos os estudantes estão estressados. Dado que um teste particular acusa que um certo estudante não está estressado, qual a probabilidade de que o resultado esteja correto?

Resposta: P(estudante com stress)=0.995; P(teste +)=P(teste+|com stress)×P(com stress)+ P(teste+|sem stress)×P(sem stress)=0.85×0.995 + 0.05×0.005=0.846; P(sem stress | teste –)=? = (0.95×0.005)/(1–0.846)=0.030844156 ou ~3.1%.

18. Um caminhante de trilhas inicia tomando uma dentre *n* trilhas disponíveis, denotadas por 1, 2, . . . , *n*. Após uma hora de percurso, cada trilha *i* subdivide-se em 1+*i* subtrilhas, e apenas uma dentre cada grupo de subtrilhas conduz ao destino desejado. Esta disposição é sabida pelo caminhante, mas ele não tem mapas nem sabe identificar qual o índexador *i* de cada trilha. Portanto, sempre faz escolhas aleatórias das trilhas e subtrilhas. Qual a probabilidade de ele alcançar o seu destino?

Resposta: P(destino)= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}$ para n=1, 2, 3, ...

19. Ana e Bia têm o total de 2*n*+1 moedas, cada qual com P(H=cara) = *p*. Bia lança *n* + 1 moedas, e Ana lança as *n* restantes. Mostre (pode ser por indução matemática) que, após as moedas terem sido lançadas, se *p* = ½, a probabilidade de que Bia obtenha mais caras do que Ana é 1⁄2.

Resposta: Faça a indução utilizando n=1 e n=2. Tente obter a formulação analítica geral em função de n e p quaisquer.

20. Uma fita magnética com informação em dígitos binários corrompeu-se, de sorte que apenas pode ser lida com erros nos bits. A probabilidade de que um bit “0” seja corretamente detectado (lido 0) é

0.90, e para um bit “1” (lido 1) é 0.85. Cada bit na fita é um 0 ou 1 com igual probabilidade. Dado que V. leu um bit como sendo “1”, qual a probabilidade de a leitura estar correta (era originalmente “1”)?

Resposta: Para o aluno tentar resolver.

02/03/2005
Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se
$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. Se também $\mathbf{P}(B) > 0$, então $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.
Se A e B são independentes, A e B^c também são.
Dois eventos A e B são ditos condicionalmente independentes**,** dado outro evento C com $P(C) > 0$, se $\mathbf{P}((A \cap B)|C) = \mathbf{P}(A|C)\,\mathbf{P}(B|C)$. Se também $\mathbf{P}(C) > 0$, a independência condicional equivale à condição $\mathbf{P}(A/B \cap C) = \mathbf{P}(A/C)$.
Independência (pura) não implica em independência condicional e vice versa.

Independência de vários eventos: Diz-se que os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se

$$P\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) = \prod_{i\in S} P\left(A_i\right)$$, para todo subconjunto S de {1. 2. ...n}

No caso de três eventos, A_1, A_2, e A_3, a independência obriga a que sejam satisfeitas as quatro condições

$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)$,
$\mathbf{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_3)$,
$\mathbf{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$,
$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$.

As três primeiras condições simplesmente declaram que quaisquer dois eventos (dos três considerados) são independentes, sendo esta propriedade chamada de independência em pares. Mas a quarta condição é também importante e não necessariamente resulta das três primeiras, nem implica nessas.

21. Um provedor de acesso à internet tem dois servidores. Cada um tem a probabilidade de 50% de estar inativo, independentemente do outro. Porém, apenas um servidor é necessário para o provedor atender à clientela. Suponha que um cliente tenta acessar a internet em quatro ocasiões diferentes, suficientemente espaçadas no tempo, de forma que se possa considerar as quatro tentativas como independentes. Qual a probabilidade de que o cliente seja capaz de acessar a internet em exatamente três das quatro ocasiões?

Resposta: 0.421875

22. Um dado peculiar (paralelepípedo) tem seis faces diferentes duas a duas. As faces mostrando 1 ou 6 têm 1” × 1.5”, as com 2 ou 5 têm 1” × 0.4”, e as com 3 ou 4 têm 0.4” × 1.5”. Assuma que a probabilidade de sair uma certa face (para cima) é proporcional à sua área. Lança-se esse dado duas vezes. Qual a probabilidade de obter uma dupla (números iguais)? (Obs.: faces opostas somam 7)

Resposta: 0.2216

23. Um estacionamento tem uma única fileira com n vagas ($n \geq 2$). Maria (M) chega quando todas as vagas estão livres. Antonio (A) é o próximo a chegar. Cada pessoa faz uma escolha aleatória igualmente provável dentre as disponíveis. (a) Descreva o espaço amostral. (b) Calcule a probabilidade de que as vagas escolhidas estejam distantes uma da outra no máximo dois espaços.

Resposta: (a) Ω: {MiAj; i=1, 2, ...n; j=1,2, n; $\forall$ i≠j} (b) Descreva as os pontos do espaco amostral em um plano cartesiano e tente formular a expressão analítica geral para a probabilidade, considerando que todos os pontos são igualmente prováveis.

24. Tem-se três moedas. A primeira (A) é equilibrada, pintada de verde (V) na face “cara” (H) e de laranja (L) na “coroa” (T). As outras duas moedas (B, C) são iguais e viciadas, tais que a probabilidade de sair “cara” é p, e são pintadas de verde na face “coroa”e de roxo (R) na face “cara”. Duas dessas três moedas são selecionadas ao acaso e lançadas. Descreva os resultados no espaço amostral. Experimentalmente, foi determinado que a probabilidade de que as duas moedas escolhidas e lançadas apareçam com as faces (para cima) da mesma cor é de 29/96. Nessas circunstâncias, quais são os possíveis valores de *p*?

Resposta: (a) Ω: tabela abaixo.

Par de moedas escolhido	Resultados possíveis em Ω			
AB (p=1/3)	HAHB	HATB	TAHA	TATB
cores	VR	V V	LR	LV
Probabilidade | AB	0.5p	0.5(1-p)	0.5p	0.5(1-p)
AC (p=1/3)	HAHC	HATC	TAHC	TATC
cores	VR	V V	LR	LV
Probabilidade | AC	0.5p	0.5(1-p)	0.5p	0.5(1-p)
BC (p=1/3)	HBHC	HBTC	TBHC	TBTC
cores	RR	RV	VR	V V
Probabilidade | BC	p^2	p(1-p)	p(1-p)	$(1-p)^2$

(b) Eventos <mesma cor> : {HATB, HATC, HBHC, TBTC}

P(mesma cor) = 1/3 × $[0..5(1-p) + 0.5(1-p) + p^2+(1-p)^2] = 29/96$ ∴ ***p*= 0.625 e 0.875**

25. Uma companhia está entrevistando potenciais empregados. Suponha que cada candidato é qualificado ou não com probabilidades *q* e 1 − *q*, respectivamente. A companhia tenta determinar a qualificação de um candidato através de 20 perguntas falso-verdadeiro. Um candidato qualificado tem a probabilidade *p* de responder uma questão corretamente, enquanto que um não-qualificado tem a mesma probabilidade *p* de responder incorretamente. As respostas às diferentes questões são assumidas como independentes. Se a companhia considera qualificado qualquer candidato que tenha acertado pelo menos 15 das respostas, determine uma fórmula para a probabilidade de que esse critério identifique corretamente alguém que deva ser qualificado ou não.

Resposta: P(Q|(≥15 RC em 20 RT))= P((≥15 RC em 20 RT) | Q) × q / P(15 RC em 20 RT)

P(15 RC em 20 RT) = 15504 × $[p^{15}(1-p)^5 q + (1-p)^{15} p^5(1-q)]$

P(Q|(15 RC em 20 RT)) = 15504 × $p^{15}(1-p)^5$ × q / 15504 × $[p^{15}(1-p)^5 q + (1-p)^{15} p^5(1-q)]$

26. Um certo júri é composto de 7 jurados. Cada jurado tem uma probabilidade de 0.20 de tomar a decisão errada quanto à condenação ou absolvição do réu, independentemente dos demais. Se o júri chega a um veredito pela regra da maioria, qual a probabilidade de que o veredito seja errado?

Resposta: $2\times\sum_{k=0}^{3} C_7^k \times 0.80^k 0.20^{7-k}$ = **0.0667** (0 a 3 acertos, de 2 tipos: (culp| inoc) e (inoc| culp))

27. Três pessoas lançam, cada qual uma vez, um dado equilibrado de *n* faces. Seja *Aij* o evento em que a pessoa *i* e a pessoa *j* obtêm faces iguais. Mostre que os eventos *A*12, *A*13, e *A*23 são independentes dois a dois, mas não independentes em conjunto.

Resposta: Há 216 resultados possíveis e igualmente prováveis para os lançamentos das pessoas 1, 2 e 3, que podem ser representados pelos pontos do espaço amostral denotados (k1, k2, k3) , para k1, k2, k3 = 1, 2, ... 6. As quatro condições de independência conjunta dos três eventos são:

P(A12 ∩ A13) = P(A12)P(A13)=(1/6)×(1/6)=1/36, correspondente a {k1, k2, ★}, sendo k1=k2 e ★=qualquer k3.
P(A12 ∩ A23) = P(A12)P(A23)=(1/6)×(1/6)=1/36; → {k1, ★, k3), sendo k1=k3 e ★=qualquer k2.
P(A13 ∩ A23) = P(A13)P(A23)=(1/6)×(1/6)=1/36; → {★, k2, k3), sendo k2=k3 e ★=qualquer k1.
P(A12 ∩ A13 ∩ A23) = P(A12)P(A13)P(A23) → {k1, k2, k3), sendo k1=k2=k3.

A quarta condição não se verifica, pois P(A12 ∩ A13 ∩ A23) =6/216= 1/36 ≠ P(A12)P(A13)P(A23) = 1/216.

28. Calculando as chances (odds) - Seja *A* um evento tal que 0 < **P**(*A*) < 1.

As chances *a favor* de *A* são definidas como $O(A)=\frac{P(A)}{P(A^c)}$, enquanto que as chances *contra A* são definidas como o inverso de **O**(*A*). Para associar o termo “chances” com o seu uso comum, imagine por exemplo que, se a probabilidade de um cavalo vencer uma corrida é 1/3, as chances contra ele

são de 2 para 1. Um prêmio "justo" para apostas nesse cavalo seria então o pagamento, caso ele vença, de R$2 para cada R$1 apostado, mais o R$1 original. "Justo", aqui, significa que a banca, na média, empataria o prêmio pago com a arrecadação das apostas feitas.
Este problema aborda uma fórmula para calcular "as chances condicionais", isto é, baseadas em alguma informação parcial. Se *A* e *B* são eventos com **P**(*A*) > 0 e **P**(*B*) > 0, as chances a favor de *A* dado *B* são definidas como $O(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(A^c|B)}$. Mostre que **O**(*A*|*B*) = **L**(*B* |*A*)**O**(*A*),

sendo **L**(*B* |*A*) a chamada *razão de verossimilhança* de *B* dado *A*, e definida como $L(B|A) = \frac{P(B|A)}{P(B|A^c)}$

.

28. Testando Hipóteses - Sena Zar é uma jogadora compulsiva que acha que em cada dia ela terá ou sorte (S) ou azar (A). Se for um dia de sorte, ela ganhará apostando preto ou vermelho na roleta com probabilidade *pS* > 1⁄2. Se for de azar, ganhará com *pA* < 1⁄2. Sena vai ao cassino todos os dias, e acredita que sabe a probabilidade *a priori* de que cada dia seja de sorte ou azar, isto é, corresponda a *pS* ou *pA*. Para aumentar suas chances, Sena adota um sistema através do qual ela estima *on-line*, continuamente, se um dado dia é de sorte ou azar, para isso mantendo uma contagem do número de apostas ganhas e perdidas. Ela continua jogando até que as chances condicionais do evento X: { [com sorte nesse dia] | [o número de ganhos e perdas até o momento] } cai abaixo de um certo limiar. Assim que isso acontece, ela pára de jogar. Forneça um algoritmo simples para a atualização das chances condicionais de Sena a cada jogada.

Nota: Este é um problema típico de sistemas de testes seqüenciais de hipóteses, onde a probabilidade de uma certa hipótese ser verdadeira, dada alguma evidência, é calculada e vai sendo continua e seqüencialmente atualizada.

Resposta:

$$O(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(A^c|B)}$$

30. Sejam *A* e *B* eventos tais que $A \subset B$. Podem *A* e *B* ser independentes?

Resposta: Podem, se B ≡ Ω (Ω = espaço amostral).

31. Sabe-se que os eventos *A* e *B* são independentes, e que *A* e *C* também o são. É correto afirmar que *A* é independente de ($B \cup C$)? Prove, ou dê um contraexemplo para sustentar a sua resposta.

32. Suponha que *A*, *B*, e *C* são independentes. Use a definição de independência para mostrar que *A* e ($B \cup C$) são independentes.

$S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U)$; $S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U)$;

Enumeração/contagem

33. Em um estacionamento há 100 carros que parecem todos em ótimas condições, vistos de fora. Entretanto, *K* desses carros estão mecanicamente sucateados. O número *K* pertence ao conjunto {0, 1, . . . , 9}, sendo todos esses valores igualmente prováveis.

(a) Testamos 20 diferentes carros escolhidos ao acaso, e para nossa grata surpresa, todos estão em perfeitas condições. Dado este conhecimento, qual a probabilidade de que *K* = 0?

Resposta: (a) Sem reposição: prob. de escolher um carro def. em 100: altera=se a cada escolha.

P(k=0| 0 def em 20) = 0.1/0.439735329565706 = **0.22741** (Tentar encaminhar este item - ver abaixo o caso (b))

(b) Refaça o item (a) quando os 20 carros são escolhidos com reposição, isto é, os que foram testados podem ser novamente escolhidos.

Resposta: (b) Com reposição: prob. de escolher um carro def. em 100= cte= k/100

K= no. def. em 100	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(def)= k/100	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

P(0 def em 20)=	1	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516

P(k=0| 0 def em 20) = 1/ $\sum_{k=0}^{9} C_{100}^{20}\left(\frac{k}{100}\right)^{0}\left(\frac{100-k}{100}\right)^{20}$ = **0.213016**

34. Uma fábrica de doces produz um suprimento igual e continuo de jujubas de cores vermelha (V), laranja (L), amarela (A), branca (B), turquesa (T) e roxa (R). A fábrica empacota as jujubas em potes de 100 unidades cada. Uma possível distribuição de cores, por exemplo, é um pote com 58 vermelhas, 22 amarelas 20 brancas e zero L, T, R. Na sua propaganda, a fábrica garante que não há dois potes com a mesma distribuição de cores. Qual o número máximo de potes que a fábrica pode produzir atendendo o prometido?

Resposta: A questão, já abordada em outro problema similar de outra lista de exercícios, corresponde ao problema clássico de se colocar *n* bolas em N caixas, onde qualquer número de bolas é permitido em cada caixa. Nesta abordagem, por exemplo, {58V, 0L, 22A, 20B, 0T, 0R} corresponde a

V	**L**	**A**	**B**	**T**	**R**
58	0	22	20	0	0

Por sua vez, este procedimento equivale a dispor N + 1 linhas (delimitando cores) e n círculos (jujubas de cada cor) em uma fileira, condicionado a que o primeiro e o último itens sejam linhas. Assim, se tivèssemos potes com apenas 3 jujubas nas 6 cores possíveis, a combinação {V V A} seria representada por:

$$|\ \circ\ \circ\ |\ \ |\ \circ\ |\ \ |\ \ |\ \ |$$

O número de maneiras de que assim se pode combinar N+1 linhas e n círculos é dado por

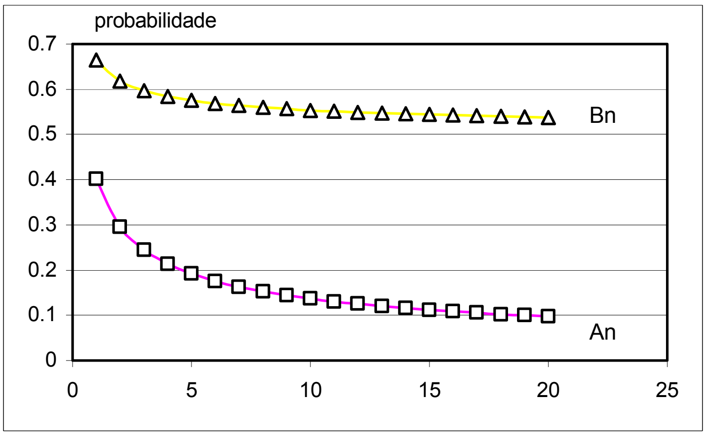
$$C_{N-1+n}^{n} = \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!n!}$$

Das N+1 linhas subtraem-se 2, pois as linhas das extremidades são fixas.

Para N=6 (cores) e n=100, substituindo-se os valores, tem-se $C_{105}^{100} = \frac{105!}{5!100!} = 96560646$.

35. Um dado equilibrado de seis faces é lançado repetidamente de forma independente. Seja {*An*} o evento de obter *n* faces "6" em 6*n* lançamentos, e {*Bn*} o evento de conseguir *n* ou mais "6" em 6*n* lançamentos. (a) **P**(*An*) e **P**(*Bn*) mudam com *n*? (b) Use um computador para investigar o que acontece com **P**(*An*) e **P**(*Bn*) à medida que *n* se torna muito grande.

Resposta: (a) Sim (ver gráfico abaixo)



(b)

P(An)→0 e P(Bn)→0.50 quando n→∞

36. Considere três lançamentos independentes de um dado equilibrado de seis faces.
(a) Qual a probabilidade de que a soma dos pontos seja 11?
(b) Qual a probabilidade de que a soma dos pontos seja 12?

(c) No século XVII, Galileu explicou a observação experimental de que a soma 10 é mais freqüente do que a soma 9, mesmo podendo ambas as somas 10 e 9 ser obtidas em seis diferentes combinações de pontos. V. pode descrever o raciocínio de Galileu?

Resposta: Para o aluno tentar resolver

37. Considere uma partida de gamão com 25 jogos, cada um dos quais podendo resultar em vitória (1 ponto) ou derrota (0 ponto). Encontre o número de seqüências distintas de escores nos jogos, assumindo que:

(a) Todos os 25 jogos são realizados;

(b) A partida é interrompida quando um jogador alcança 13 pontos.

Resposta: (a) 33554432 (b) $2\times\left[\sum_{i=0}^{12} C_{i+12}^{i}\right]$ = 10400600

38. Conte o número de maneiras distintas de que se pode arranjar as letras das palavras

(a) responda (b) bookkeeper Resposta: (a): 40320 (b) 70560