INE 5111 – LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE

1) Em um sistema de transmissão de dados existe uma probabilidade igual a 0,05 de um dado ser transmitido erroneamente. Ao se realizar um teste para analisar a confiabilidade do sistema foram transmitidos 4 dados.
a) Qual é a probabilidade de que tenha havido erro na transmissão? (R.: 0,1855)
b) Qual é a probabilidade de que tenha havido erro na transmissão de exatamente 2 dados? (R.: 0,0135)
Trata-se do modelo Binomial: cada realização tem apenas 2 resultados possíveis, o número de realizações é conhecido, e a probabilidade de sucesso é suposta constante (pois não há nenhuma informação em contrário). n = 4 π = 0,05. A fórmula será: $P(X = x_i) = C_{4,x_i} \times 0{,}05^{x_i} \times 0{,}95^{n-x_i}$
a) Haverá erro quando X for maior do que zero, então[1]*:* $x_i = 0$
$P(X>0) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{4,0} \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{4-0} =$

$$1-\frac{4!}{0!\times(4-0)!}\times 0{,}05^0\times 0{,}95^4 = 1-\frac{4\times3\times2\times1}{1\times4\times3\times2\times1}\times1\times0{,}95^4 = 1-0{,}8145 = 0{,}1855$$

b) Exatamente 2 dados, significa $x_i = 2$, *então:*
$P(X = 2) = C_{4,2} \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^{4-2} =$

$$\frac{4!}{2!\times(4-2)!}\times0{,}05^2\times0{,}95^2 = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}\times0{,}05^2\times0{,}95^2 = 0{,}0135$$

2) Jogando-se uma moeda honesta cinco vezes e observando a face voltada para cima. Há interesse em calcular a probabilidade de ocorrência de uma, duas, ..., cinco caras. Qual é a probabilidade de obter ao menos quatro caras? (R.: 0,1875)
Trata-se do modelo Binomial: cada realização tem apenas 2 resultados possíveis, o número de realizações é conhecido, e a probabilidade de sucesso é suposta constante (pois não há nenhuma informação em contrário). n = 5 π = 0,5. A fórmula será: $P(X = x_i) = C_{5,x_i} \times 0{,}5^{x_i} \times 0{,}5^{n-x_i}$
Pelo menos 4 caras, significa 4 ou mais, como o limite máximo é 5, procura-se $P(X \geq 4)$:
$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = C_{5,4} \times 0{,}5^4 \times 0{,}5^{5-1} + C_{5,5} \times 0{,}5^5 \times 0{,}5^{5-5} =$

$$\frac{5!}{4!\times(5-4)!}\times0{,}5^4\times0{,}5^{5-4}+\frac{5!}{5!\times(5-5)!}\times0{,}5^5\times0{,}5^{5-5} = \frac{5\times4!}{4!\times1}\times0{,}5^5+\frac{5!}{5!\times0!}\times0{,}5^5 = 0{,}1875$$

3) Suponha que você vai fazer uma prova com 10 questões do tipo verdadeiro-falso. Você nada sabe sobre o assunto e vai responder as questões por adivinhação.
a) Qual é a probabilidade de acertar exatamente 5 questões? (R. 0,2461)
b) Qual é a probabilidade de acertar pelo menos 8 questões? (R.: 0,05468)
Trata-se do modelo Binomial: cada realização tem apenas 2 resultados possíveis, o número de realizações é conhecido, e a probabilidade de sucesso é suposta constante (pois não há nenhuma informação em contrário), e igual a 0,5 (50%), pois você nada sabe sobre o conteúdo e há apenas duas respostas possíveis (verdadeiro ou falso). n = 10 π = 0,5. A fórmula será: $P(X = x_i) = C_{10,x_i} \times 0{,}5^{x_i} \times 0{,}5^{n-x_i}$
a) Exatamente 5 questões, significa X = 5.

$$P(X = 5) = C_{10,5} \times 0{,}5^5 \times 0{,}5^{10-5} = \frac{10!}{5!\times(10-5)!}\times0{,}5^5\times0{,}5^5 = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5!\times5\times4\times3\times2\times1}\times0{,}5^{10} = 0{,}2461$$

b) Pelo menos 8 questões significa acertar 8, ou 9 ou 10 questões: $X \geq 8$

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$
$$= C_{10,8} \times 0{,}5^8 \times 0{,}5^2 + C_{10,9} \times 0{,}5^9 \times 0{,}5^1 + C_{10,10} \times 0{,}5^{10} \times 0{,}5^0$$
$$= \frac{10!}{8!\times(10-8)!}\times0{,}5^8\times0{,}5^{10-2}+\frac{10!}{9!\times(10-9)!}\times0{,}5^9\times0{,}5^{10-9}+\frac{10!}{10!\times(10-10)!}\times0{,}5^{10}\times0{,}5^{10-10}$$

[1] Lembre-se que 0! (fatorial de zero) vale 1, e que um número elevado a zero, por exemplo, $0{,}5^0$, é igual a 1.

$$= \frac{10\times 9\times 8!}{8!\times 2!}\times 0{,}5^{10} + \frac{10\times 9!}{9!\times 1!}\times 0{,}5^{10} + \frac{10!}{10!\times 0!}\times 0{,}5^{10} = 0{,}05468$$

4) Suponha que 10% da população seja canhota. São escolhidas 3 pessoas ao acaso, com o objetivo de calcular a probabilidade de que o número de canhotos entre eles seja 0, 1, 2 ou 3. Qual é a probabilidade de ao menos uma das pessoas ser canhota? (R.: 0,271)

Trata-se do modelo Binomial: cada realização tem apenas 2 resultados possíveis, o número de realizações é conhecido, e a probabilidade de sucesso é suposta constante (pois não há nenhuma informação em contrário). $n = 3$ $\pi = 0{,}1$. A fórmula será: $P(X = x_i) = C_{3,xi}\times 0{,}1^{xi}\times 0{,}9^{n-xi}$

Ao menos uma pessoa canhota significa 1 ou 2 ou 3, ou seja, $X \geq 1$.

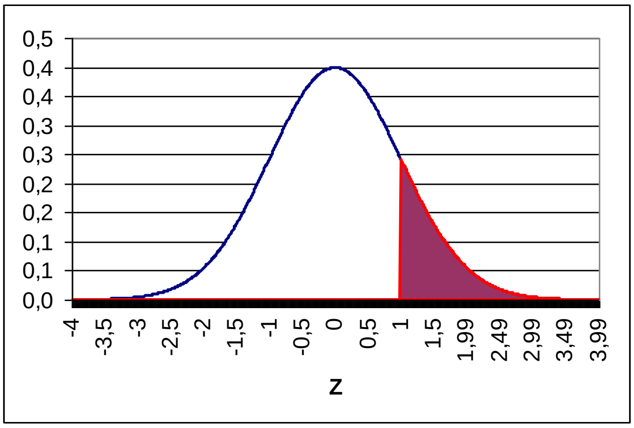
$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{3,0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^3$

$$= 1 - \frac{3!}{0!\times(3-0)!}\times 0{,}1^0 \times 0{,}9^3 = 1 - \frac{3\times 2\times 1}{1\times 3\times 2\times 1}\times 1\times 0{,}9^3 = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$$

5) Trace uma curva normal e sombreie a área desejada, obtendo então as probabilidades

a) P(Z > 1,0) (R.: 0,1587) b) P(Z < 1,0) (R.:0,8413) c) P(Z > -0,34) (R.: 0,6331)
d) P(0 < Z < 1,5) (R.: 0,4332) e) P(-2,88 < Z < 0) (R.: 0,498)
f) P(-0,56 < Z < -0,20) (R.: 0,133) g) P(-0,49 < Z < 0,49) (R.: 0,3758)
h) P(2,5 < Z < 2,8) (R.: 0,0036) i) P(Z < -0,2) (R.: 0,4207) j) P(Z > -0,2) (R.:0,5793)
k) P(-0,2 < Z < 0) (R.: 0,0793) l) P(-0,2 < Z < 0,4) (R.: 0,2347)

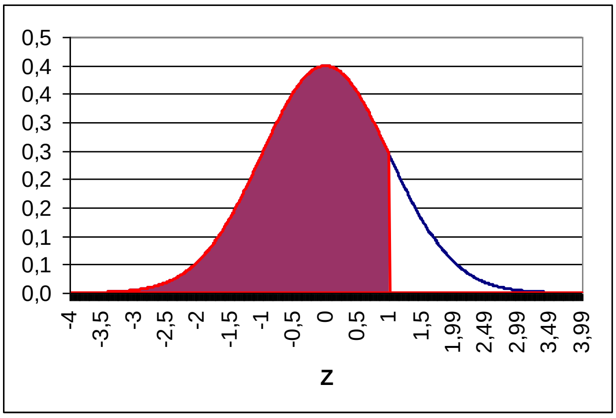
a) No gráfico abaixo P(Z>1,0)



A área sombreada corresponde a P(Z>1,0). Esta probabilidade pode ser obtida diretamente da tabela:

P(Z> 1,0) = 0,1587

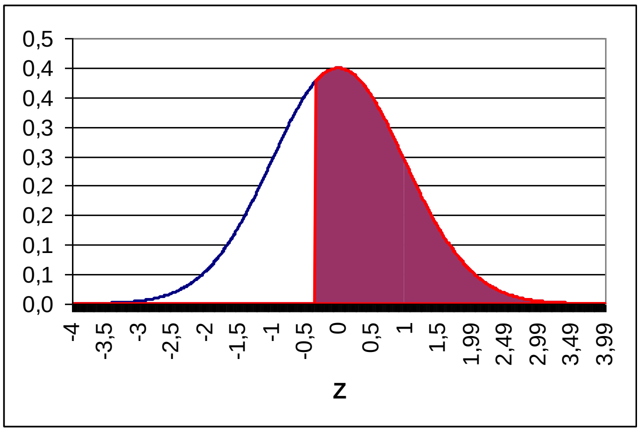
b) No gráfico abaixo P(Z < 1,0)



A área sombreada corresponde a P(Z<1,0). Esta probabilidade NÃO pode ser obtida diretamente da tabela. Mas pelas propriedades de probabilidade sabemos que:
P(Z<1,0) = 1 – P(Z≥1,0). Esta última probabilidade pode ser obtida diretamente da tabela, e é igual à probabilidade encontrada no item a (P(Z>1,0)), pois Z é uma variável aleatória contínua. Então:

P(Z< 1,0) = 1 – P(Z>1,0) = 1 - 0,1587 = 0,8413

c) No gráfico abaixo P(Z>-0,34)



A área sombreada corresponde a $P(Z>-0{,}34)$. Esta probabilidade NÃO pode ser obtida diretamente da tabela, pois o Z é negativo. Mas pelas propriedades de probabilidade sabemos que:

$P(Z>-0{,}34) = 1 - P(Z<-0{,}34)$.

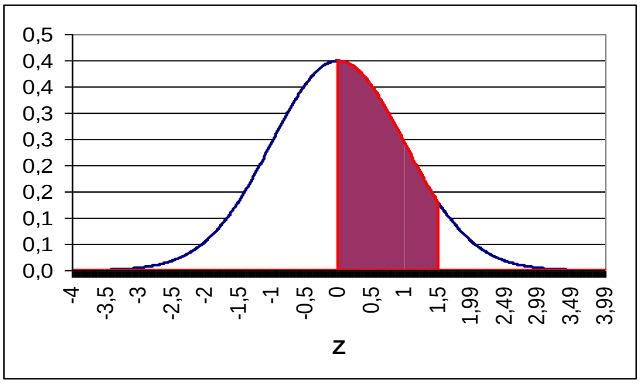
E devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero:

$P(Z<-0{,}34) = P(Z>0{,}34)$, *e esta última probabilidade pode ser obtida da tabela.*

Então: $P(Z>-0{,}34) = 1 - P(Z>0{,}34) =$

$1 - 0{,}3669 = 0{,}6331$

d) No gráfico abaixo $P(0 < Z < 1{,}5)$



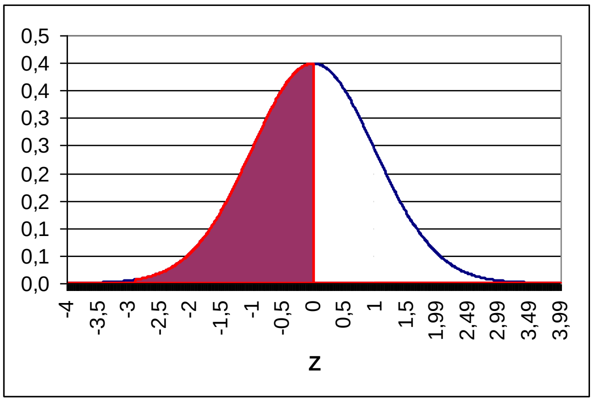
Para obter a probabilidade de Z estar entre 0 e 1,5 basta obter a probabilidade de Z ser maior do que zero e subtrair a probabilidade de Z ser maior do que 1,5: o resultado será exatamente a probabilidade do intervalo procurado.

$P(0 < Z < 1{,}5) = P(Z>0) - P(Z>1{,}5)$

$= 0{,}5 - 0{,}0668 = 0{,}4332$

Esta probabilidade foi facilmente obtida por que os valores de Z são ambos positivos.

e) No gráfico abaixo $P(-2{,}88 < Z < 0)$



Podemos usar um raciocínio semelhante ao da letra d): $P(-2{,}88<Z<0) = P(Z<0) - P(Z<-2{,}88)$.

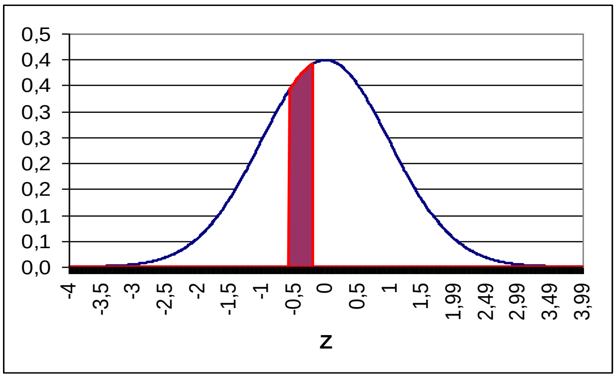
A probabilidade $P(Z<0)$ *é igual a* $P(Z>0)$*, mas* $P(Z<-2{,}88)$ *não pode ser obtida diretamente da tabela. Contudo, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero:* $P(Z<-2{,}88) = P(Z>2{,}88)$. *Então:*

$P(-2{,}88<Z<0) = P(Z>0) - P(Z>2{,}88) =$

$0{,}5 - 0{,}0020 = 0{,}4980$

O valor de Z -2,88 é "invisível" no gráfico ao lado devido à grande distância da média (2,88 desvios padrões).

f) No gráfico abaixo $P(-0{,}56<Z<-0{,}2)$

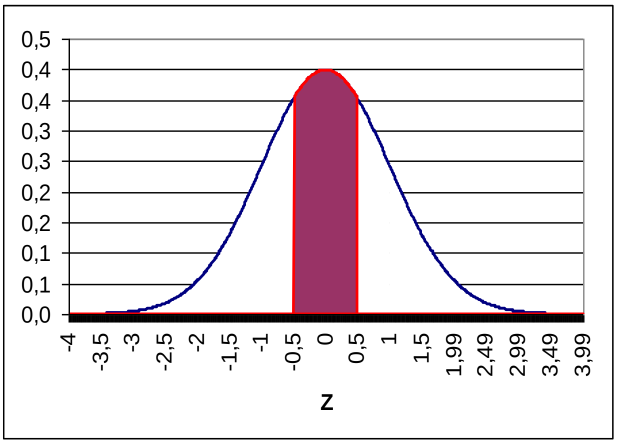


Podemos usar um raciocínio semelhante ao da letra e, tendo em mente que os dois valores que definem o intervalo são negativos, e que há simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero:

$P(-0{,}56<Z<-0{,}2) = P(Z>0{,}2) - P(Z>0{,}56)$

$= 0{,}4207 - 0{,}2877 = 0{,}133$

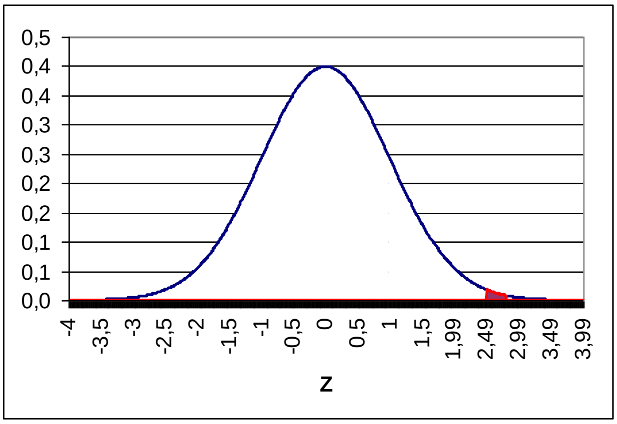
g) No gráfico abaixo P(-0,49 < Z < 0,49)



Usemos um raciocínio semelhante ao das letras d e e, mas agora os valores que definem o intervalo têm sinais diferentes, mas são iguais em módulo, isto é estão à mesma distância da média (zero). Sendo assim, P(Z>0,49) = P(Z<-0,49), devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média. Recordando que a probabilidade de ocorrência de um evento é igual a 1 menos a probabilidade do seu complementar, então:

P(-0,49<Z<0,49) = 1- 2 × P(Z>0,49)
= 1 – 2 × 0,3121 = 0,3758

h) No gráfico abaixo P(2,5 <Z < 2,8)

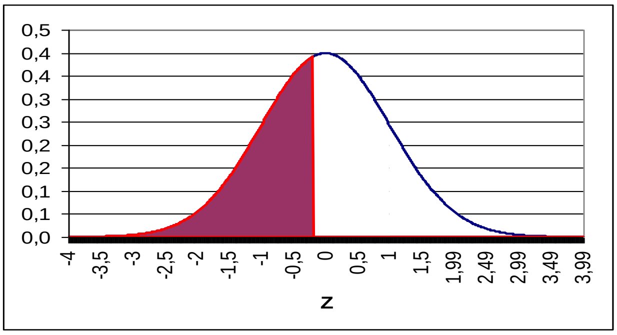


Usando um raciocínio semelhante ao da letra d, basta obter a probabilidade de Z ser maior do que 2,5 e subtrair a probabilidade de Z ser maior do que 2,8: o resultado será exatamente a probabilidade do intervalo procurado.

P(2,5< Z < 2,8) = P(Z>2,5) – P(Z>2,8)
= 0,0062 – 0,0026 = 0,0036

Esta probabilidade foi facilmente obtida por que os valores de Z são ambos positivos. O valor obtido é pequeno, pois o intervalo está a mais de 2 desvios padrões da média.

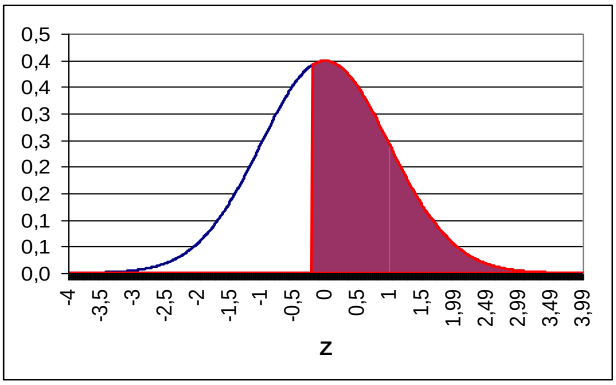
i) No gráfico abaixo P(Z<-0,2)



A probabilidade procurada não pode ser obtida diretamente da tabela: esta define as probabilidades de Z ser MAIOR do que um certo valor. Entretanto, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero:

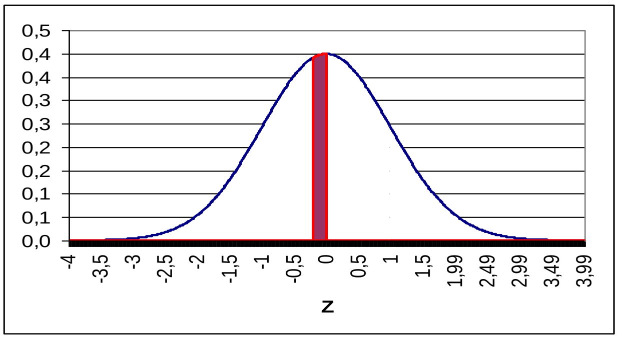
P(Z<-0,2) = P(Z>0,2) = 0,4207

j) No gráfico abaixo P(Z>-0,2)



A probabilidade procurada não pode ser obtida diretamente da tabela, pois Z aqui é negativo. Entretanto, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero, e usando a propriedade do evento complementar:

P(Z>-0,2) = 1-P(Z>0,2) = 1-0,4207 = 0,5793 *k) No gráfico abaixo P(-0,2<Z<0)*

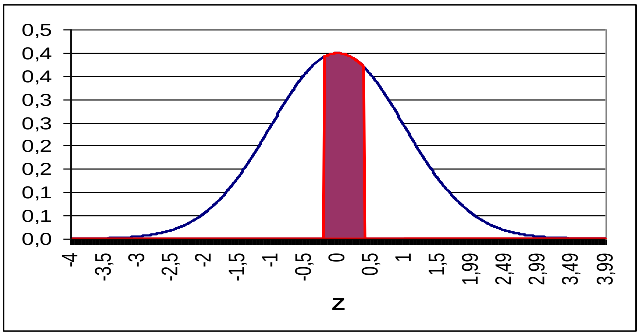


Podemos usar o raciocínio da letra e. A probabilidade P(Z<0) é igual a P(Z>0), mas P(Z<-0,2) não pode ser obtida diretamente da tabela. Contudo, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero: P(Z<-0,2) = P(Z>0,2). Então:

P(-0,2<Z<0) = P(Z>0) – P(Z>0,2) =

0,5 – 0,4207 = 0,0793

l) No gráfico abaixo P(-0,2<Z<0,4)



Usemos um raciocínio semelhante ao da letra g, mas os valores que definem o intervalo têm sinais e valores diferentes. Mas, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média: P(Z<-0,2) = P(Z>0,2). Recordando que a probabilidade de ocorrência de um evento é igual a 1 menos a probabilidade do seu complementar, então:

P(-0,2<Z<0,4) = 1- P(Z>0,2) - P(Z>0,4)

= 1 – 0,4207 – 0,3446 = 0,2347

6) Determine os valores de z1 que correspondem às seguintes probabilidades:

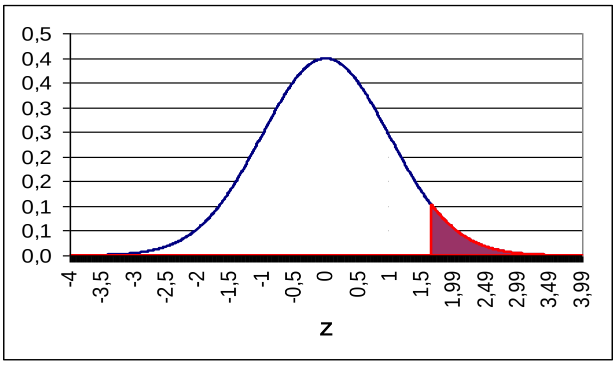
a) P(Z > z1) = 0,0505 (R.: 1,64) b) P(Z > z1) = 0,0228 (R.: 2) c) P(Z < z1) = 0,0228 (R.: -2)

d) P(0 < Z < z1) = 0,4772 (R.: 2) e) P(-z1 < Z < z1) = 0,95 (R.: 1,96)

f) P(Z < z1) = 0,0110 (R.: -2,29) g) P(Z < z1) = 0,0505 (R.: -1,64) h) P(Z < z1) = 0,5 (R.: 0)

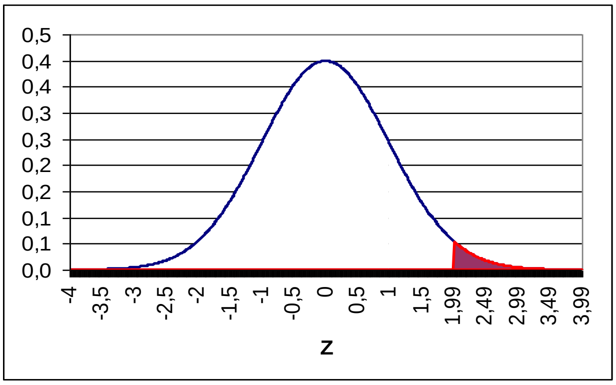
i) P(-z1 < Z < z1) = 0,6825 (R.: 1,0) j) P(-z1 < Z < z1) = 0,9544 (R.: 2,0)

a) No gráfico abaixo $P(Z>Z_1) = 0{,}0505$



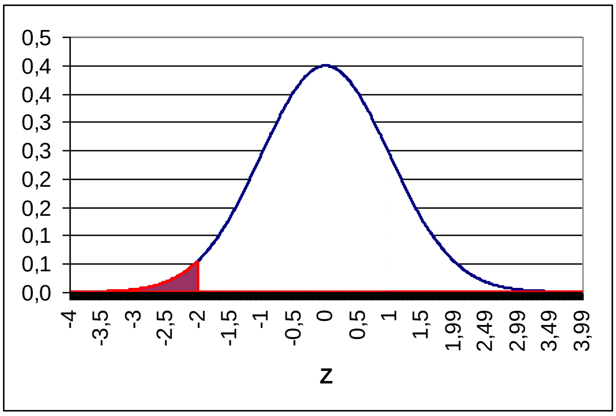
Procura-se o valor de Z_1 *tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,0505. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 1,6. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,04, resultando em* $Z_1 = 1{,}64$.

b) No gráfico abaixo $P(Z>Z_1) = 0{,}0228$.



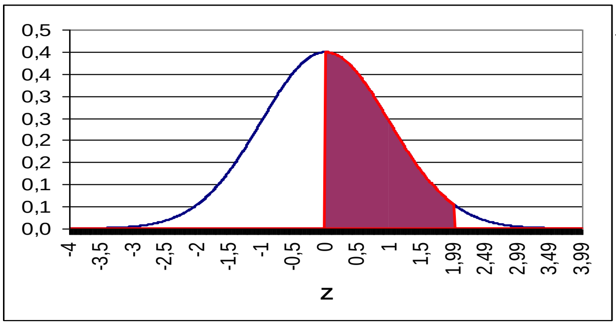
Procura-se o valor de Z_1 *tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,0228. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 2,0. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,00, resultando em* $Z_1 = 2{,}00$.

c) No gráfico abaixo $P(Z<Z_1) = 0,0228$



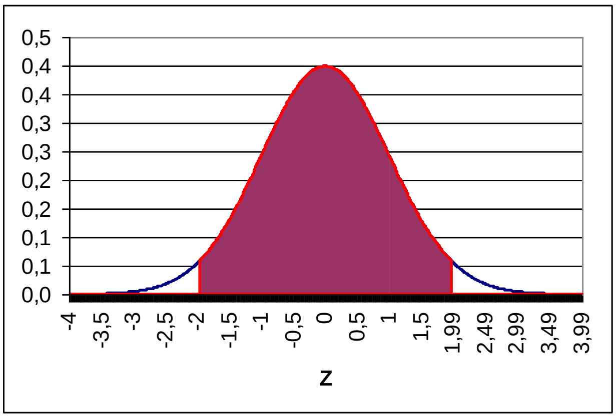
Procura-se o valor de Z_1 tal que a probabilidade de Z ser MENOR do que ele seja igual a 0,0228. Desta forma NÃO podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Entretanto, devido à simetria da distribuição normal padrão à média zero, sabemos que:
$P(Z<Z_1) = 0,0228 = P(Z>-Z_1) = 0,0228$
De acordo com a letra b $-Z_1 = 2,00$, então $Z_1 = -2,00$.
Observe a coerência do resultado: como a área é limitada por um valor ABAIXO de zero, obviamente Z_1 teria que ser negativo.

d) No gráfico abaixo $P(0<Z<Z_1) = 0,4772$



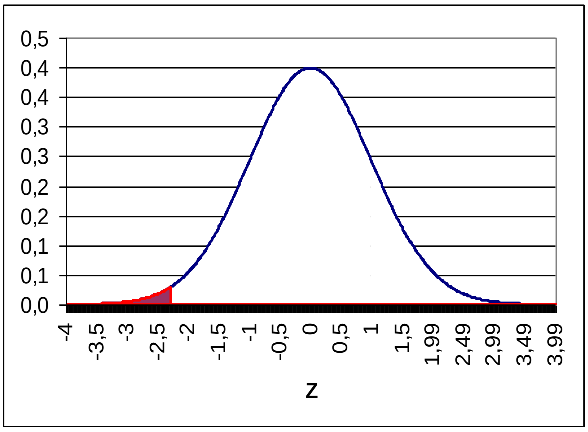
Procura-se o valor de Z_1 tal que a probabilidade de Z estar entre 0 e ele seja igual a 0,4772. Percebe-se que Z_1 será POSITIVO.
$P(0<Z<Z1) = 0,4772 = P(Z>0) – P(Z>Z_1)$
$P(Z>Z1) = 0,5 – 0,4772 = 0,0228$.
Observe que se trata do mesmo problema da letra b, então $Z_1 = 2$.

e) No gráfico abaixo $P(-Z_1<Z<Z_1) = 0,95$.



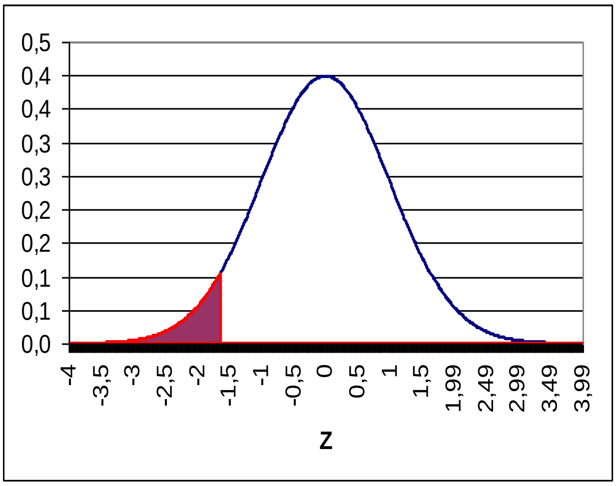
Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z estar entre $–Z_1$ e $+Z_1$ seja igual a 0,95. Como os dois valores estão à mesma distância de zero
$P(Z<-Z_1) = P(Z>Z_1) = (1-0,95)/2 = 0,025$
$P(Z>Z1) = 0,025$.
Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,025. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 1,9. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,06, resultando em $Z_1 = 1,96$.

f) No gráfico abaixo $P(Z<Z1) = 0,0110$



Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z ser MENOR do que ele seja igual a 0,0110. Este valor não pode ser identificado diretamente na tabela, mas devido à simetria da distribuição normal à média zero: $P(Z<Z_1) = 0,0110 = P(Z>-Z_1)$.
Procura-se $-Z_1$ tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,0110. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 2,2. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,09, resultando em $-Z_1 = 2,29$. Logo $Z_1 = -2,29$ (observe a coerência com o gráfico, pois Z_1 é menor do que zero).

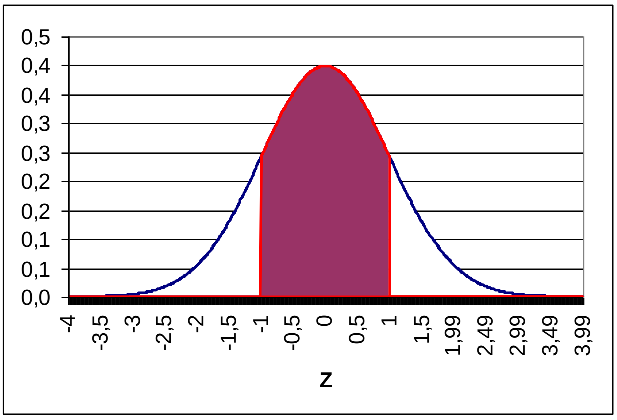
g) No gráfico abaixo $P(Z<Z_1) = 0{,}0505$



Procura-se o valor de Z_1 tal que a probabilidade de Z ser MENOR do que ele seja igual a 0,0505. Este valor não pode ser identificado diretamente na tabela, mas devido à simetria da distribuição normal à média zero: $P(Z<Z_1) = 0{,}0505 = P(Z>-Z_1)$
Procura-se o valor de $-Z_1$ tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,0505. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 1,6. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,04, resultando em $-Z_1 = 1{,}64$. Logo $Z_1 = -1{,}64$ (observe a coerência com o gráfico, pois Z_1 é menor do que zero).

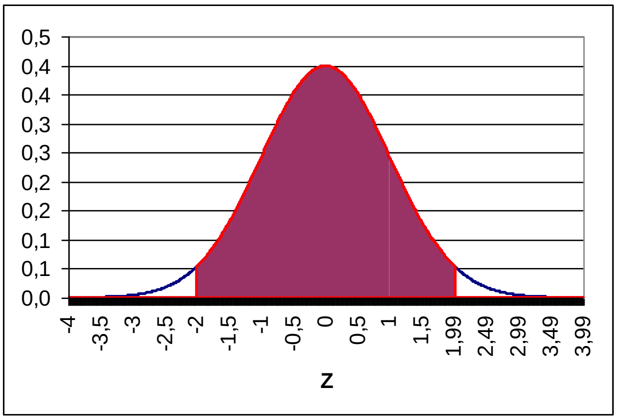
h) $P(Z<Z_1) = 0{,}5$. Como a distribuição normal padrão é simétrica em relação à sua média zero, então $Z_1 = 0$, pois há 50% de chance dos valores serem menores do que zero.

i) No gráfico abaixo $P(-Z_1<Z<Z_1) = 0{,}6825$



Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z estar entre $-Z_1$ e $+Z_1$ seja igual a 0,6825. Como os dois valores estão à mesma distância de zero
$P(Z<-Z_1) = P(Z>Z_1) = (1-0{,}6825)/2 = 0{,}1587$
$P(Z>Z1) = 0{,}1587$.
Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,1587. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 1,0. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,00, resultando em $Z_1 = 1{,}00$.

j) No gráfico abaixo $P(-Z_1<Z<Z_1) = 0{,}9544$



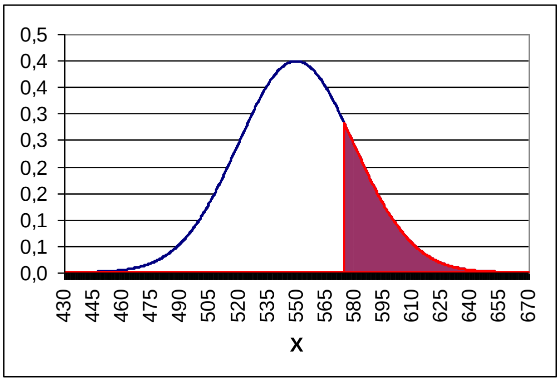
Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z estar entre $-Z_1$ e $+Z_1$ seja igual a 0,9544. Como os dois valores estão à mesma distância de zero
$P(Z<-Z_1) = P(Z>Z_1) = (1-0{,}9544)/2 = 0{,}0228$
$P(Z>Z1) = 0{,}0228$.
Procura-se Z_1 tal que a probabilidade de Z ser MAIOR do que ele seja igual a 0,0228. Desta forma podemos procurar esta probabilidade diretamente na tabela. Na coluna da extrema esquerda identificamos a linha 2,0. E na primeira linha encontramos a segunda decimal 0,00, resultando em $Z_1 = 2{,}00$.

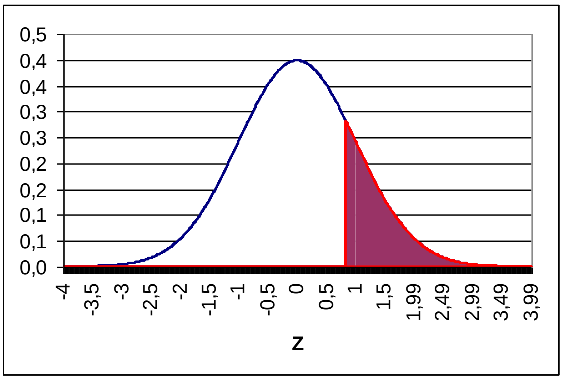
7) Uma variável aleatória contínua X apresenta distribuição normal com média 25 e desvio padrão igual a 2. Determine os valores de Z para os seguintes valores de X:
a) 23,0 (R.: -1,0) b) 23,5 (R.: -0,75) c) 24,0 (R.: -0,5) d) 25,2 (R.: 0,1) e) 25,5 (R.: 0,25)
A solução desta questão passa pela equação $Z = (x - \mu)/\sigma$, sabendo-se que $\mu = 25$ e $\sigma = 2$.

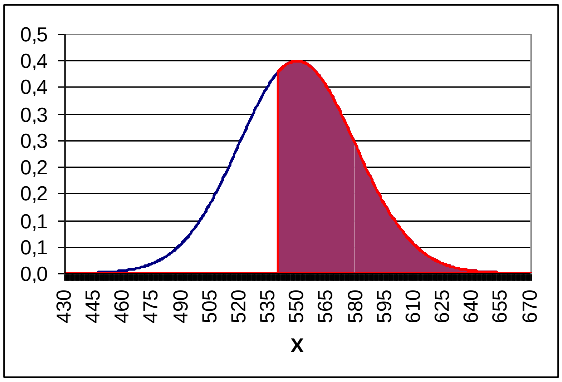
a) Z = (23-25)/2 = -1,0 b) Z = (23,5-25)/2 = -0,75 c) Z = (24-25)/2 = -0,5
d) Z = (25,2-25)/2 = 0,1 e) Z = (25,5 – 25)/2 = 0,25

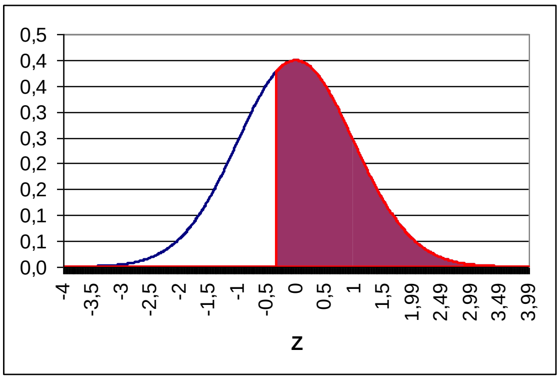
8) Uma variável aleatória contínua X apresenta distribuição normal com média 40 e desvio padrão igual a 3. Determine os valores de X para os seguintes valores de Z:
a) 0,10 (R.: 40,3) b) 2,00 (R.: 46) c) 0,75 (R.: 42,25) d) –2,53 (R.: 32,41)
e)–3,00 (R.: 31) f) –3,20 (R.: 30,4)
Novamente devemos usar a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$, mas isolar o valor de x: $x = \mu + Z\times\sigma$, sabendo que $\mu = 40$ e $\sigma = 3$.
a) x = 40 + (0,1×3) = 40,3 b) x = 40 + (2×3) = 46 c) x = 40 + (0,75×3) = 42,25
d) x = 40 + (-2,53×3) = 32,41 e) x = 40 + (-3×3) = 31 f) x = 40 + (-3,2×3) = 30,4

9) Suponha que o escore dos estudantes no vestibular seja uma variável aleatória com distribuição normal com média 550 e variância 900. Se a admissão em certo curso exige um escore mínimo de 575, qual é a probabilidade de um estudante ser admitido? E se o escore mínimo for 540? (R.: 0,2033; 0,6293)
Em ambos os casos é preciso encontrar os valores de Z correspondentes aos escores mínimos 575 e 540. Como 575 é maior do que 550, o valor de Z associado será positivo, e como 540 é menor do que 550, Z será negativo. Vamos apresentar os cálculos, lembrando que o desvio padrão vale 30 (raiz quadrada de 900, que é a variância).
Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ podemos encontrar os valores de Z correspondentes a 575 e 540:
$Z_1 = (575-550)/30 = 0,83$ $Z_2 = (540-550)/30 = - 0,33$.
Então P(X>575) = P(Z>0,83) e P(X>540) = P(Z>-0,33). Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:









Nos dois primeiros gráficos vemos P(X>575) = P(Z>0,83), esta última probabilidade pode ser obtida diretamente da tabela: P(Z>0,83) = 0,2033.
Nos gráficos seguintes vemos P(X>540) = P(Z>-0,33), sendo que esta última probabilidade não pode ser obtida diretamente da tabela. Mas, como a distribuição normal padrão é simétrica em relação à média zero, e lembrando-se da propriedade da probabilidade do evento complementar: P(Z>-0,33)=1 - P(Z>0,33) = 1 – 0,3707 = 0,6293.

10) Supondo que a altura X de um estudante do sexo masculino, tomado ao acaso de uma universidade, tenha distribuição normal com média 170 cm e desvio padrão 10 cm.

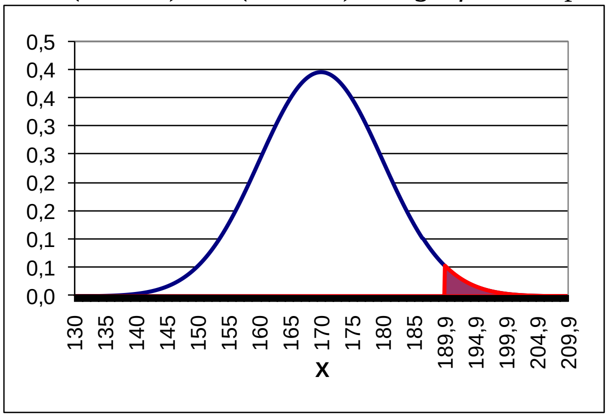
a) P (X>190cm) = ? R.: 0,0228 b) P (150<X<190) = ? R.: 0,9544

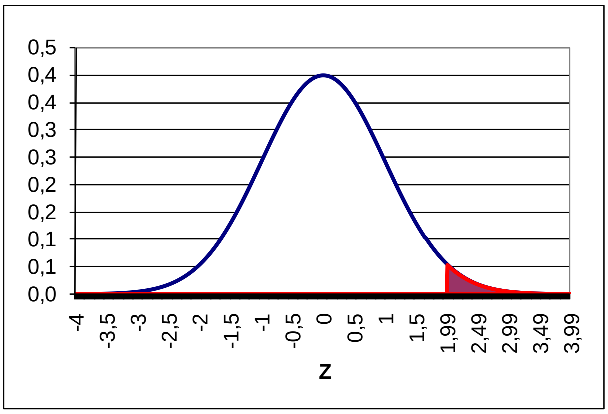
c) P (X ≤ 160) = ? R.: 0,1587

Em todos os casos é preciso encontrar os valores de Z correspondentes aos valores de altura.

a) Como 190 é maior do que 170, o valor de Z associado será positivo. Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ *podemos encontrar o valor de Z correspondente a 190:* $Z_1 = (190-170)/10 = 2{,}00$.

Então $P(X>190) = P(Z>2{,}00)$. *Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:*





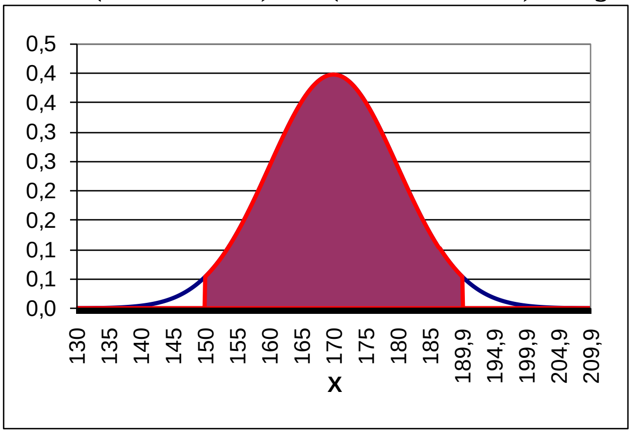
$P(Z>2{,}00)$ pode ser obtida diretamente da tabela: $P(Z>2{,}00) = 0{,}0228$.

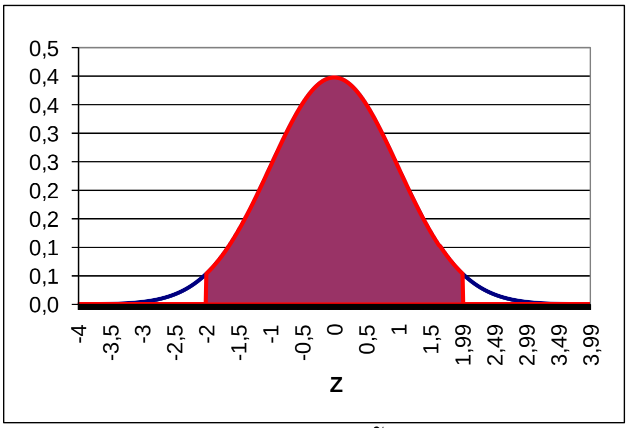
b) Precisamos calcular os escores Z associados aos valores 150 e 190. Como 150 é menor do que 170, o valor de Z associado será negativo, e como 190 é maior do que 170, o valor associado de Z será positivo (já calculado na letra a).

Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ *podemos encontrar os valores de Z correspondentes a 150 e 190:*

$Z_1 = (150-170)/10 = -2{,}00$ $Z_2 = (190-170)/10 = 2{,}00$.

Então $P(150<X<190) = P(-2{,}00<Z<2{,}00)$. *Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:*





A área sombreada corresponde a $P(-2{,}00<Z<2{,}00)$. *Esta probabilidade NÃO pode ser obtida diretamente da tabela. Mas, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero:* $P(Z>2{,}00) = P(Z<-2{,}00)$. *Além disso, sabe-se que a soma de todas as probabilidades precisa ser igual a 1, o que permite obter:*

$P(-2{,}00<Z<2{,}00) = 1 – P(Z<-2{,}00) – P(Z>2{,}00) = 1 – P(Z>2{,}00) – P(Z>2{,}00)$.

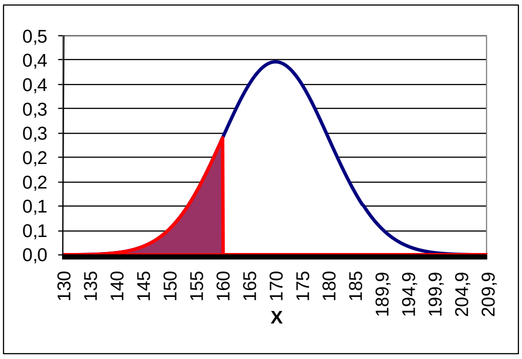
$P(Z>2{,}00)$ pode ser obtida diretamente da tabela (ver letra a): $P(Z>2{,}00) = 0{,}0228$.

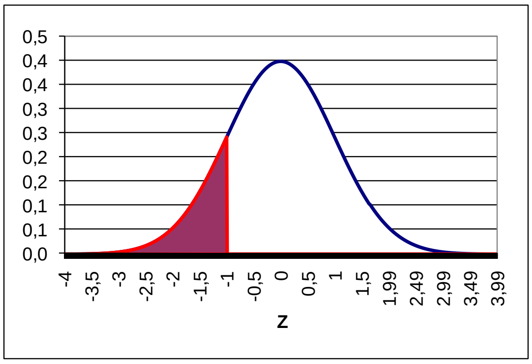
Substituindo na fórmula:

$P(150<X<190) = P(-2{,}00<Z<2{,}00) = 1 – P(Z>2{,}00) – P(Z>2{,}00) = 1 – 0{,}0228 - 0{,}0228 = 0{,}9544$

c) Como 160 é menor do que 170, o valor de Z associado será negativo. Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ *podemos encontrar o valor de Z correspondente a 160:* $Z_1 = (160-170)/10 = -1{,}00$.

Então $P(X<160) = P(Z<-1{,}00)$. *Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:*





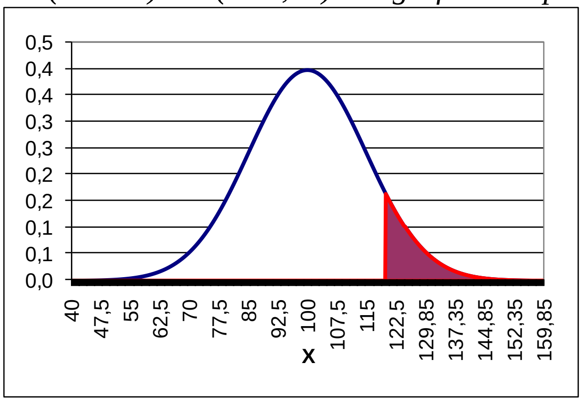
A probabilidade procurada não pode ser obtida diretamente da tabela: esta define as probabilidades de Z ser MAIOR do que um certo valor. Entretanto, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero: P(X<160) = P(Z<-1,0) = P(Z>1,0) = 0,1587

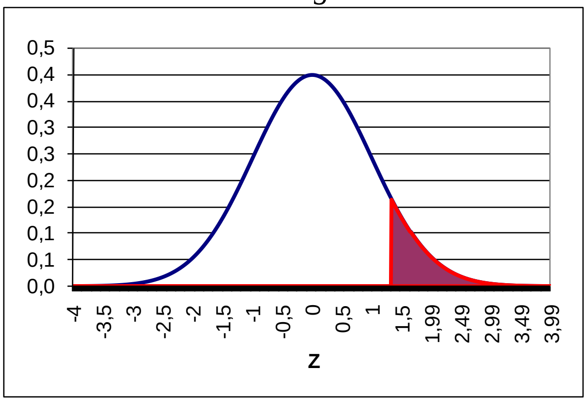
11) Admitindo que a distribuição de Q.I. de crianças de uma certa escola, seja normal com média 100 pontos e desvio padrão 15 pontos, calcule:

a) Probabilidade de uma criança, tomada ao acaso nesta escola, acusar Q.I. superior a 120 pontos? R.: 0,0918

b) Probabilidade de uma criança, tomada ao acaso nesta escola, acusar Q.I. na faixa de 90 a 110 pontos? R.: 0,4972

a) Como 120 é maior do que 100, o valor de Z associado será positivo. Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ podemos encontrar o valor de Z correspondente a 120: $Z_1 = (120-100)/15 = 1,33$. Então P(X>120) = P(Z>1,33). Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:





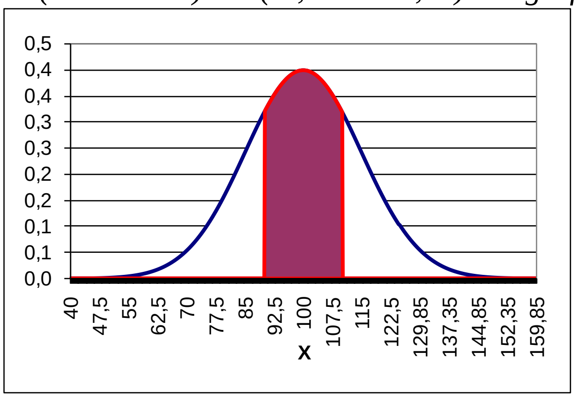
P(Z>1,33) pode ser obtida diretamente da tabela: P(Z>1,33) = 0,0918.

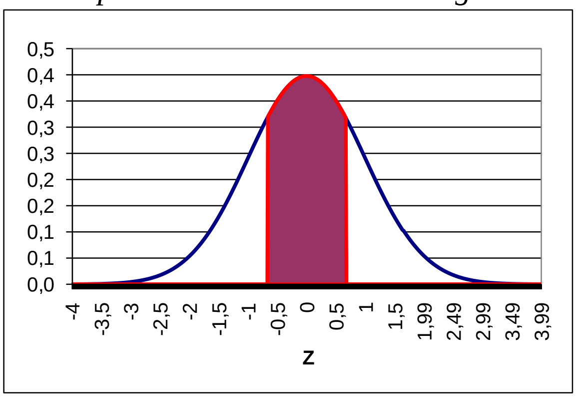
b) Precisamos calcular os escores Z associados aos valores 90 e 110. Como 90 é menor do que 100, o valor de Z associado será negativo, e como 110 é maior do que 100, o valor associado de Z será positivo.

Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ podemos encontrar os valores de Z correspondentes a 90 e 110:

$Z_1 = (90-100)/15 = -0,67$ $\quad$ $Z_2 = (110-100)/15 = 0,67$.

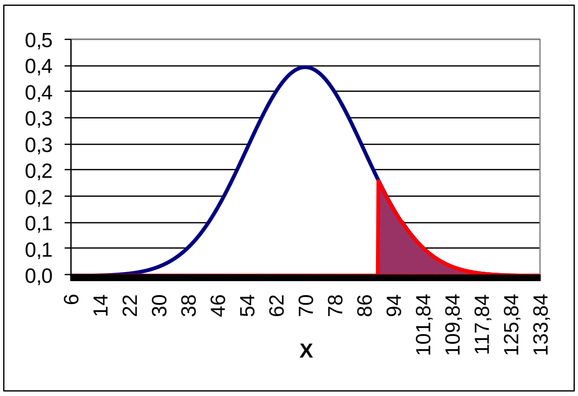
Então P(90<X<110) = P(-0,67<Z<0,67). Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:

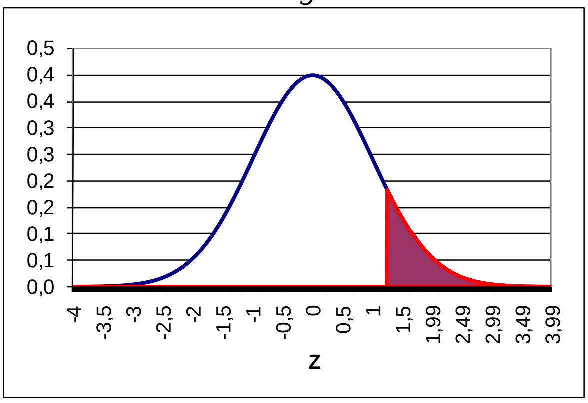




A área sombreada corresponde a P(-0,67<Z<0,67). Esta probabilidade NÃO pode ser obtida diretamente da tabela. Mas, devido à simetria da distribuição normal padrão em relação à média zero: P(Z>0,67) = P(Z<-0,67). Além disso, sabe-se que a soma de todas as probabilidades precisa ser igual a 1, o que permite obter:
P(-0,67<Z<0,67) = 1 – P(Z<-0,67) – P(Z>0,67) = 1 – P(Z>0,67) – P(Z>0,67).
P(Z>0,67) pode ser obtida diretamente da tabela: P(Z>0,67) = 0,2514.
Substituindo na fórmula:
P(90<X<110) = P(-0,67<Z<0,67) = 1 – P(Z>0,67) – P(Z>0,67) = 1 – 0,2514 - 0,2514 = 0,4972

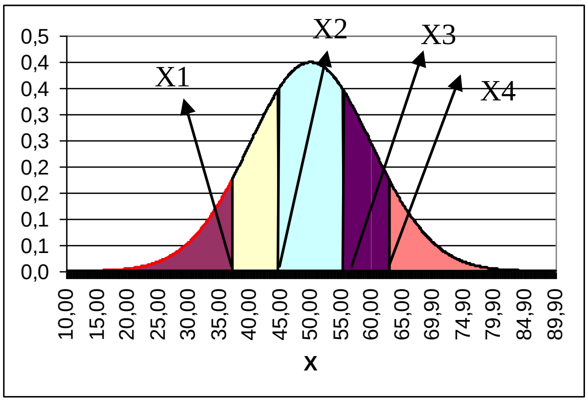
12) Suponha que em certa região, o peso dos homens adultos tenha distribuição normal com média 70 kg e desvio padrão 16 kg. E o peso das mulheres adultas tenha distribuição normal com média 60 kg e desvio padrão 12 kg. Ao selecionar uma pessoa ao acaso, o que é mais provável: uma mulher com mais de 75 kg, ou um homem com mais de 90 kg? R.: Ambos têm a mesma probabilidade, 0,1056.
Em todos os casos é preciso encontrar os valores de Z correspondentes aos valores de peso. Precisamos encontrar a probabilidade de selecionar um homem com mais de 90 kg e comparar com a probabilidade de selecionar uma mulher com mais de 75 kg.
Para o peso dos homens. Procuramos P(X>90). Como 90 é maior do que 70 (média de peso dos homens), o valor associado de Z será positivo. Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ *podemos encontrar o valor de Z correspondente a 90:* $Z_1 = (90-70)/16 = 1,25$.
Então P(X>90) = P(Z>1,25). Os gráficos respectivos são mostrados a seguir:

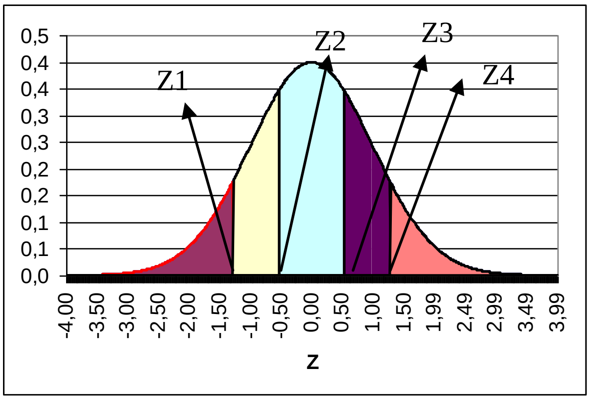




P(Z>1,25) pode ser obtida diretamente da tabela: P(Z>1,25) = 0,1056.
Para o peso das mulheres. Procuramos P(X>75). Como 75 é maior do que 60 (média de peso das mulheres), o valor associado de Z será positivo. Usando a equação $Z = (x - \mu)/\sigma$ *podemos encontrar o valor de Z correspondente a 75:* $Z_1 = (75-60)/12 = 1,25$. *O mesmo resultado obtido para os homens. Então:*
P(Peso homens > 90kg) = P(Peso mulheres > 75 kg) = P(Z>1,25) = 0,1056

13) Um professor aplica um teste e obtém resultados distribuídos normalmente com média 50 e desvio padrão 10. Se as notas são atribuídas segundo o esquema a seguir, determine os limites numéricos para cada conceito:
A: 10% superiores; (R.: 62,8) B: notas acima dos 70% inferiores e abaixo dos 10% superiores; (R.: 55,2)
C: notas acima dos 30% inferiores e abaixo dos 30% superiores; (R.: 44,8)
D: notas acima dos 10% inferiores e abaixo dos 70% superiores; (R.: 37,2) E: 10% inferiores
Sugestão: faça um desenho da distribuição normal com os percentuais (áreas).
O problema é definir as faixas de percentuais, obter os valores de Z correspondentes e depois os valores das notas que definem os conceitos. Veja os gráficos abaixo.





$P(Z>Z_4) = 0,1$ $P(Z>Z_3) = 0,3$ $P(Z>Z_2) = 0,7$ $P(Z>Z_1) = 0,9$

Procurando na tabela da distribuição normal padrão:

$Z_4 \cong 1,28$, $x_4 = 50 + 1,28 \times 10 = 62,8$ $Z_3 \cong 0,53$, $x_3 = 50 + 0,53 \times 10 = 55,3$

$P(Z>Z_2) = 0,7$, $P(Z>- Z_2) = 1 – 0,7 = 0,3$ $- Z_2 \cong 0,53$ $Z_2 \cong -0,53$, $x_2 = 50 -0,53 \times 10 = 44,7$

$P(Z>Z_1) = 0,9$, $P(Z>- Z_1) = 1 – 0,9 = 0,1$ $- Z_1 \cong 1,28$ $Z_1 \cong -1,28$, $x_1 = 50 -1,28 \times 10 = 37,2$

As notas então serão 37,2, 44,7, 55,3 e 62,8.