PODER DO TESTE

Poder do Teste e Tamanho de Amostra para Testes de Hipóteses

Tipos de erro num teste estatístico

Realidade (desconhecida)	Decisão do teste	
	aceita H_0	rejeita H_0
H_0 verdadeira	decisão correta (probab = $1 - \alpha$)	erro tipo I (probab = α)
H_0 falsa	erro tipo II (probab = β)	decisão correta (probab = $1 - \beta$)

$$P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

$$P(\text{erro tipo II}) = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = \beta$$

Poder do teste

- Definimos **poder** de um teste estatístico como a probabilidade do teste rejeitar H_0 quando H_0 é realmente falsa, ou seja, o *poder* de um teste é igual a $1 - \beta$.
- O poder do teste dependerá de alguns fatores:
  - Do nível de significância α adotado;
  - Da distância entre o valor "real" do parâmetro e o considerado verdadeiro em H_0.
  - Da variabilidade da população.
  - Do tamanho da amostra retirada.

Questões

- Para o mesmo tamanho de amostra n
  - Se o valor considerado como “real” for muito próximo daquele adotado em H_0:
    - o teste terá maior dificuldade para detectar a diferença: menor poder, menor 1- **β**, maior **β**, mas, menor gravidade do erro.
  - Se o valor considerado como “real” for muito distante daquele adotado em H_0:
    - o teste terá maior facilidade para detectar a diferença: maior poder, maior 1- **β**, menor **β**, mas, maior gravidade do erro.

Exercício 18 – Capítulo 8

- Num certo banco de dados, o tempo para a realização das buscas é aproximadamente normal com média 53 s e desvio padrão 14 s. Modificou-se o sistema para reduzir o tempo. Foram contados os tempos para 30 buscas. Admita que as 30 observações possam ser consideradas uma amostra aleatória e que não houve alteração na variância. Use α = 1%. Calcule o poder do teste se a verdadeira média de tempo fosse de:
  - 40s, 41s, 42s, 43s, 44s, 45s, 46s, 47s, 48s, 49s, 50s, 51s, 52s.

Resolução – 1ª parte

- H0: μ = 53 s
- H1: μ < 53 s
- α = 0,01, n = 30, σ = 14 s

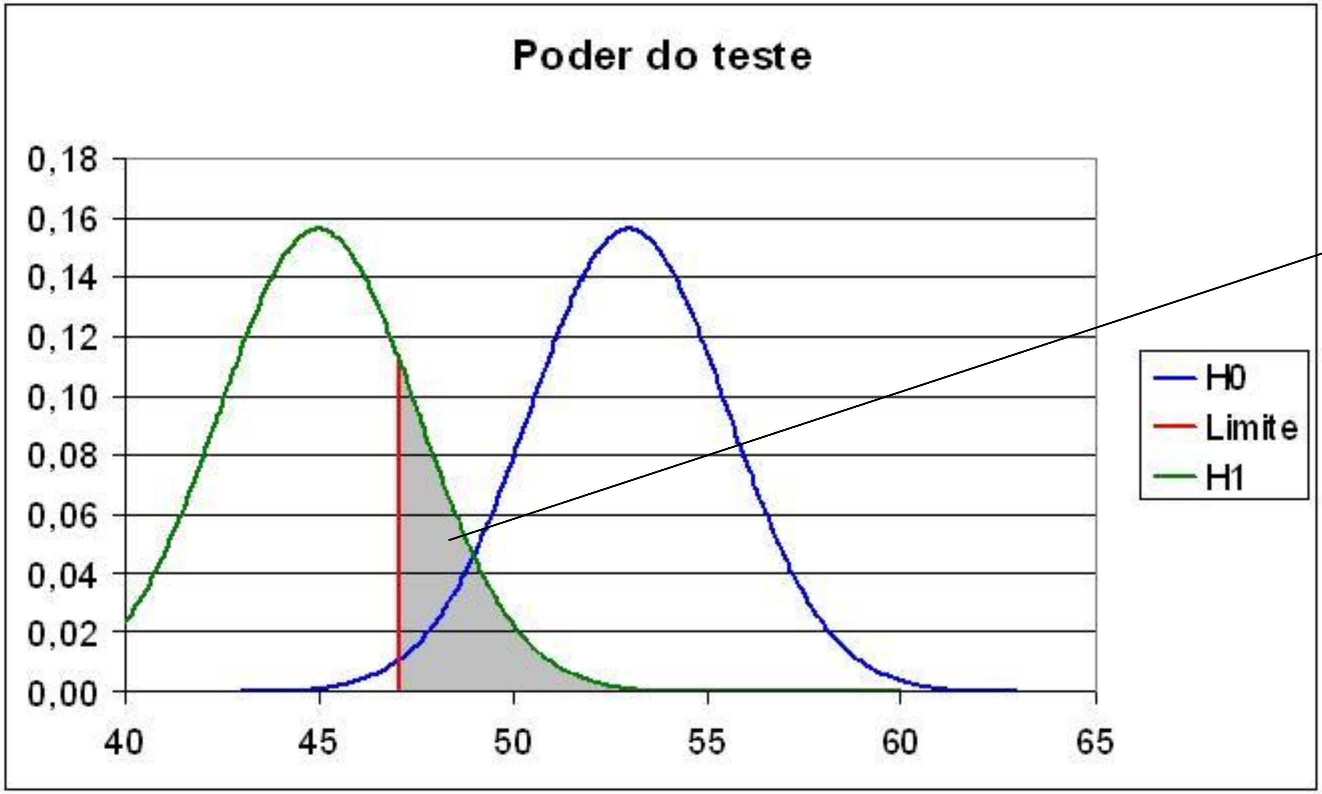
$$Z_c = -2{,}326$$

$$\overline{X}_c = \mu + Z_c \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 53 - 2{,}326 \times \frac{14}{\sqrt{30}} = 47{,}05$$

Resolução 2ª parte

Média "real" = 45 s

$$Z_\beta = \frac{47{,}05 - 45}{\left(14/\sqrt{30}\right)} = 0{,}80$$



$\beta = 0{,}2108$

Poder = 0,7892

Resolução 3ª parte

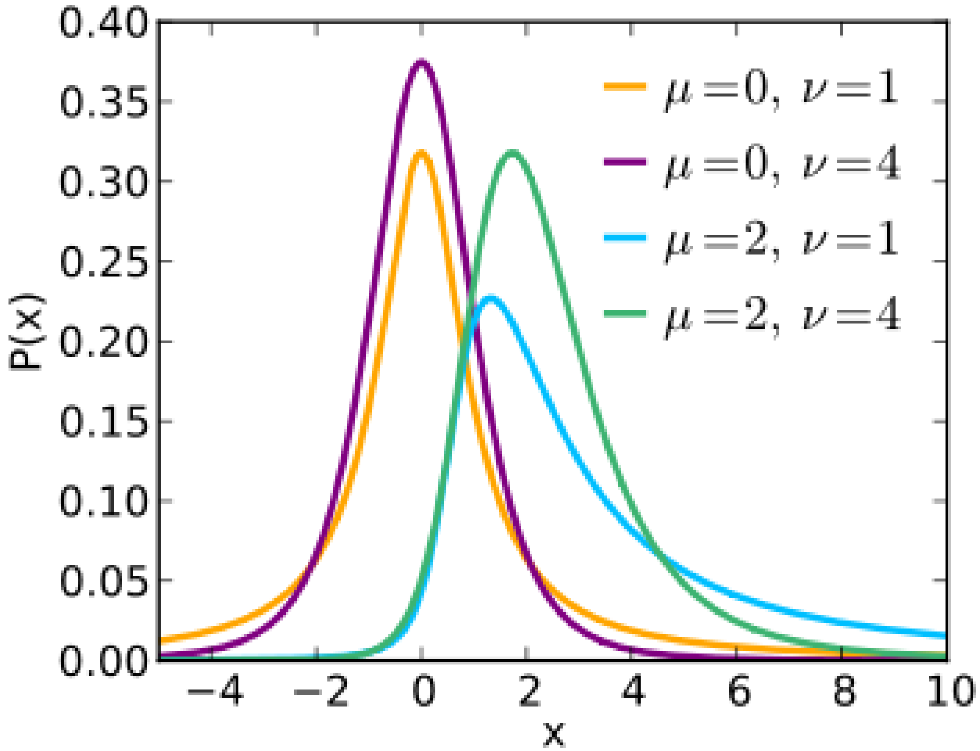
H0			
Média	53	53	53
Desvio padrão	14	14	14
n	30	30	30
alfa	0,01	0,01	0,01
Zc	-2,326347874	-2,326347874	-2,326347874
xbar c	47,05376503	47,05376503	47,05376503
H1			
Média	40	47	52
Desvio padrão	14	14	14
n	30	30	30
Zb	2,759647303	0,021034515	-1,935117476
β	0,00289319	0,491609061	0,973512059
Poder	0,99710681	0,508390939	0,026487941

Poder do teste de 1 média – σ^2 desconhecida

- Variável de teste: t de Student com n – 1 graus de liberdade.
- Calcular a probabilidade de aceitar H_0 quando H_0 é falsa (probabilidade de erro tipo II - β), ou o complementar, o poder do teste.
  - Quando o verdadeiro valor da média é $\mu = \mu_0 + \delta$ (H_0 falsa) a distribuição passa a ser a t não central, com n-1 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade $(\delta \times \sqrt{n})/s$
  - Se $\delta \neq 0$, a distribuição t não central passa a ser a distribuição t usual.

Distribuição t não central

- Dois parâmetros: graus de liberdade (>0), e não centralidade ($\in \Re$).



Cálculo do poder do teste 1 média – σ^2 desconhecida

- Supondo que a média real seja μ, a média testada em H_0 μ_0, e s como estimativa confiável de σ:
  - Usar curvas características de operação para obter o poder do teste para um determinado nível de significância.
    - Abscissa: fator de não centralidade
      - $H_1: \mu \neq \mu_0 \quad d = |\mu - \mu_0| / s$
      - $H_1: \mu > \mu_0 \quad d = (\mu - \mu_0)/s$
      - $H_1: \mu < \mu_0 \quad d = (\mu_0 - \mu)/s$
    - Ordenada, poder do teste.
    - Curvas para diferentes tamanhos de amostra.

Cálculo do poder do teste 1 média – σ^2 desconhecida

- Supondo que a média real seja μ, a média testada em H_0 μ_0, e s como estimativa confiável de σ:
  - Usar aplicativos computacionais.
    - R:
      - Hipóteses ($<$, $>$, $\neq$);
      - Nível de significância;
      - Estimativa de σ;
      - Desvio (diferença entre μ e μ_0);
    - Outros: Minitab, PopTools

Cálculo do poder do teste 1 média – σ^2 desconhecida

- Solução alternativa:
  - Realizar cálculos aproximados do poder do teste através da distribuição t de Student.
    - Encontrar valor crítico da média amostral em H_0.

$$\overline{X}_c = \mu_0 + t_c \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

    - Calcular valor de t_β, em H_1 (supondo média = μ, e desvio padrão igual a s).

$$t_\beta = \frac{(\overline{X}_c - \mu) \times \sqrt{n}}{s}$$

    - Obter o valor de β ou 1-β (poder do teste).

Exercício 19 – Capítulo 8

- Um certo tipo de pneu dura, em média, 50.000 km. O fabricante investiu em uma nova composição de borracha para pneus, objetivando aumentar sua durabilidade. Vinte pneus, fabricados com esta nova composição, apresentaram desvio padrão de 4.000 km. Use $\alpha = 1\%$. Calcule o poder do teste se a verdadeira média de durabilidade dos pneus fosse de:
  - 55000 km, 54000 km, 53000 km, 52000 km, 51000 km.

Resolução – 1ª parte

- H0: μ = 50000 km
- H1: μ > 50000 km
- α = 0,01, n = 20, s = 4000 km

$$t_c = 2{,}5395$$

$$\overline{X}_c = \mu + t_c \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 50000 + 2{,}5395 \times \frac{4000}{\sqrt{20}} = 52271{,}38$$

Resolução 2ª parte

H0			
Média	**50000**	**50000**	**50000**
Desvio padrão	**4000**	**4000**	**4000**
n	**20**	**20**	**20**
alfa	**0,01**	**0,01**	**0,01**
t_c	**2,539483189**	**2,539483189**	**2,539483189**
xbar c	**52271,38282**	**52271,38282**	**52271,38282**
H1			
Média	**55000**	**53000**	**51000**
Desvio padrão	**4000**	**4000**	**4000**
n	**20**	**20**	**20**
t_β	**-3,050686755**	**-0,814618777**	**1,4214492**
β	**0,003289453**	**0,21269192**	**0,914303505**
Poder	**0,996710547**	**0,78730808**	**0,085696495**

Tamanho de amostra para Testes

- Definir:
  - distância entre valor testado e valor "real" em número de desvios padrões;
  - valor de α ou 1- α;
  - valor de β ou poder do teste (1-β) .

Testes de Média

- Média com σ^2 conhecida:
  - Teste bilateral:

$$n \approx \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_{\beta}}{\delta} \right)^2$$

$$\delta = \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma}$$

  - Teste unilateral:

$$n \approx \left(\frac{Z_{\alpha} + Z_{\beta}}{\delta} \right)^2$$

Testes de Média

- Média com σ^2 desconhecida – amostra piloto n_0:
  - Teste bilateral:

$$n \approx \left(\frac{t_{n_0-1,\frac{\alpha}{2}} + t_{n_0-1,\beta}}{\delta} \right)^2$$

$$\delta = \frac{|\mu - \mu_0|}{s_0}$$

  - Teste unilateral:

$$n \approx \left(\frac{t_{n_0-1,\alpha} + t_{n_0-1,\beta}}{\delta} \right)^2$$

Testes de proporção

- Teste bilateral:

$$n \approx \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{p_0 \times (1 - p_0)} + Z_\beta \times \sqrt{p \times (1 - p)}}{p - p_0} \right)^2$$

- Teste unilateral:

$$n \approx \left(\frac{Z_\alpha \times \sqrt{p_0 \times (1 - p_0)} + Z_\beta \times \sqrt{p \times (1 - p)}}{p - p_0} \right)^2$$

Exercício 18 – Capítulo 8

- Num certo banco de dados, o tempo para a realização das buscas é aproximadamente normal com média 53 s e desvio padrão 14 s. Modificou-se o sistema para reduzir o tempo. Foram contados os tempos para 30 buscas. Admita que as 30 observações possam ser consideradas uma amostra aleatória e que não houve alteração na variância. Use $\alpha = 1\%$. Qual deveria ser o tamanho mínimo de amostra para detectar, com 90% de probabilidade, que a média real vale 50s?

Resolução

- Teste unilateral: μ_0 = 53 s, μ = 50 s, σ = 14 s
- $\delta = |\mu - \mu_0| / \sigma = |53 - 50| / 14 = 0{,}214$
- α = 0,01; Poder = 1- β = 0,9; β = 0,1
- Z_α = 2,326; Z_β = 1,282
- Resolvendo:

$$n \approx \left(\frac{Z_\alpha + Z_\beta}{\delta} \right)^2 = \left(\frac{2{,}326 + 1{,}282}{0{,}214} \right)^2 = 283{,}48 \approx 284$$