



Modelos Probabilísticos Teóricos *Discretos e Contínuos*

Bernoulli, Binomial, Poisson, Uniforme, Exponencial,
Normal



Distribuição de Probabilidades

- A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória:
 - **quais** são os **resultados** possíveis;
 - **qual** é a **probabilidade** de cada resultado acontecer.
- Variável discreta: pares valores – probabilidade.
- Variável contínua: função densidade de probabilidades



Modelo de Bernoulli

- Modelo teórico discreto
- Apenas dois resultados possíveis: “sucesso”, “fracasso”.

x	$p(x)$
0	$1 - p$
1	p
Total	1

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p \times (1 - p)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



Modelo Binomial

- Modelo teórico discreto
- X terá distribuição binomial se:
 - $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
 - X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias discretas INDEPENDENTES com distribuição de Bernoulli, com parâmetro p CONSTANTE.
- X : número de “sucessos” em n realizações de um experimento de Bernoulli
 - Com probabilidade de “sucesso” p constante ($0 < p < 1$)



Exemplo 1

- Lançamento de moeda honesta 4 vezes, identificação face voltada para cima: registro do número de caras (C).
- “Sucesso” = Cara; $p = 0,5$; $1 - p = 0,5$
- Independência
- $P(X=0) = P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4) = P(K_1) \times P(K_2) \times P(K_3) \times P(K_4)$
- $P(X=0) = (1 - p)^4 = 0,0625$
- $P(X=1) = P[(C_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4) \cup (K_1 \cap C_2 \cap K_3 \cap K_4) \cup [(K_1 \cap K_2 \cap C_3 \cap K_4) \cup [(K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap C_4)]]$
- Cada sub-evento é M.E. com os outros.
- $P(X=1) = 4 \times p \times (1-p)^3 = 0,25$



Modelo binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

$$C_{n,x} = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! x!}$$

$$E(X) = n \times p \quad V(X) = n \times p \times (1 - p)$$



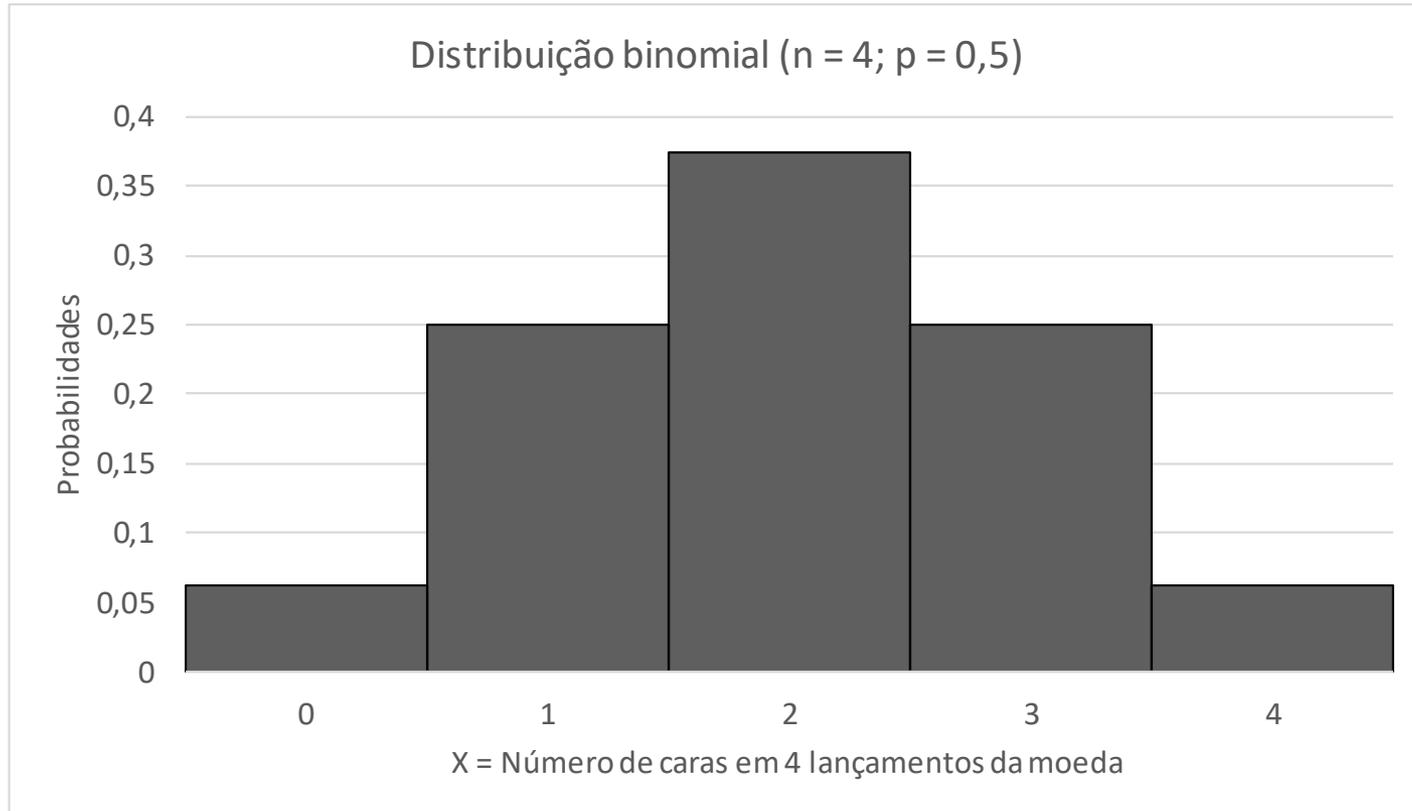
Exemplo 1 – pelo modelo binomial

□ $n = 4; p = 0,5; 1 - p = 0,5$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0,5^0 \times (0,5)^{4-0} = 1 \times 1 \times 0,0625 = 0,0625$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,5^1 \times (0,5)^{4-1} = 4 \times 0,5 \times 0,125 = 0,25$$

Exemplo 1 – pelo modelo binomial



$$E(X) = n \times p = 4 \times 0,5 = 2 \quad V(X) = n \times p \times (1 - p) = 4 \times 0,5 \times 0,5 = 1$$



Modelo de Poisson

- Modelo teórico discreto.
- Experimento aleatório com espaço amostral infinito enumerável.
- Número de observações de uma variável em um intervalo contínuo (tempo ou espaço): distribuição de Poisson.

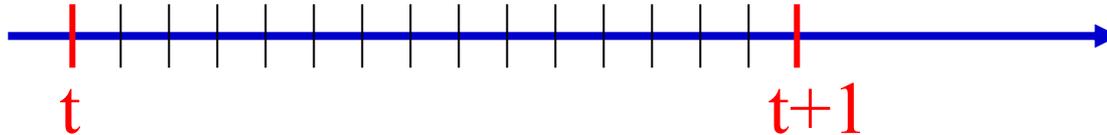
Exemplos:

- chamadas telefônicas por minuto,
- mensagens que chegam a um servidor por segundo
- acidentes por dia,
- defeitos por m², etc..



Modelo de Poisson

$X = \text{núm. de ocorrências em } [t, t+1]$



n intervalos de amplitude $1/n$, com $n \mapsto \infty$
 $p = \text{probab. de ocorrência em cada intervalo}$

$$P(X = x) \approx \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{aligned} n &\mapsto \infty \\ p &\mapsto 0 \\ n \times p &\mapsto \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$P(X = x) \longrightarrow \frac{\lambda \times t^x e^{-\lambda \times t}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$



Modelo de Poisson

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda \times t} \times (\lambda \times t)^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

$$E(X) = \lambda \times t \quad V(X) = \lambda \times t$$



Exemplo 2

- Estudos de tráfego mostram que cerca de 3 mensagens chegam a um servidor a cada milissegundo.
- Calcule a probabilidade de que pelo menos 4 mensagens cheguem em 1 milissegundo.

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + \dots$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$



Exemplo 2

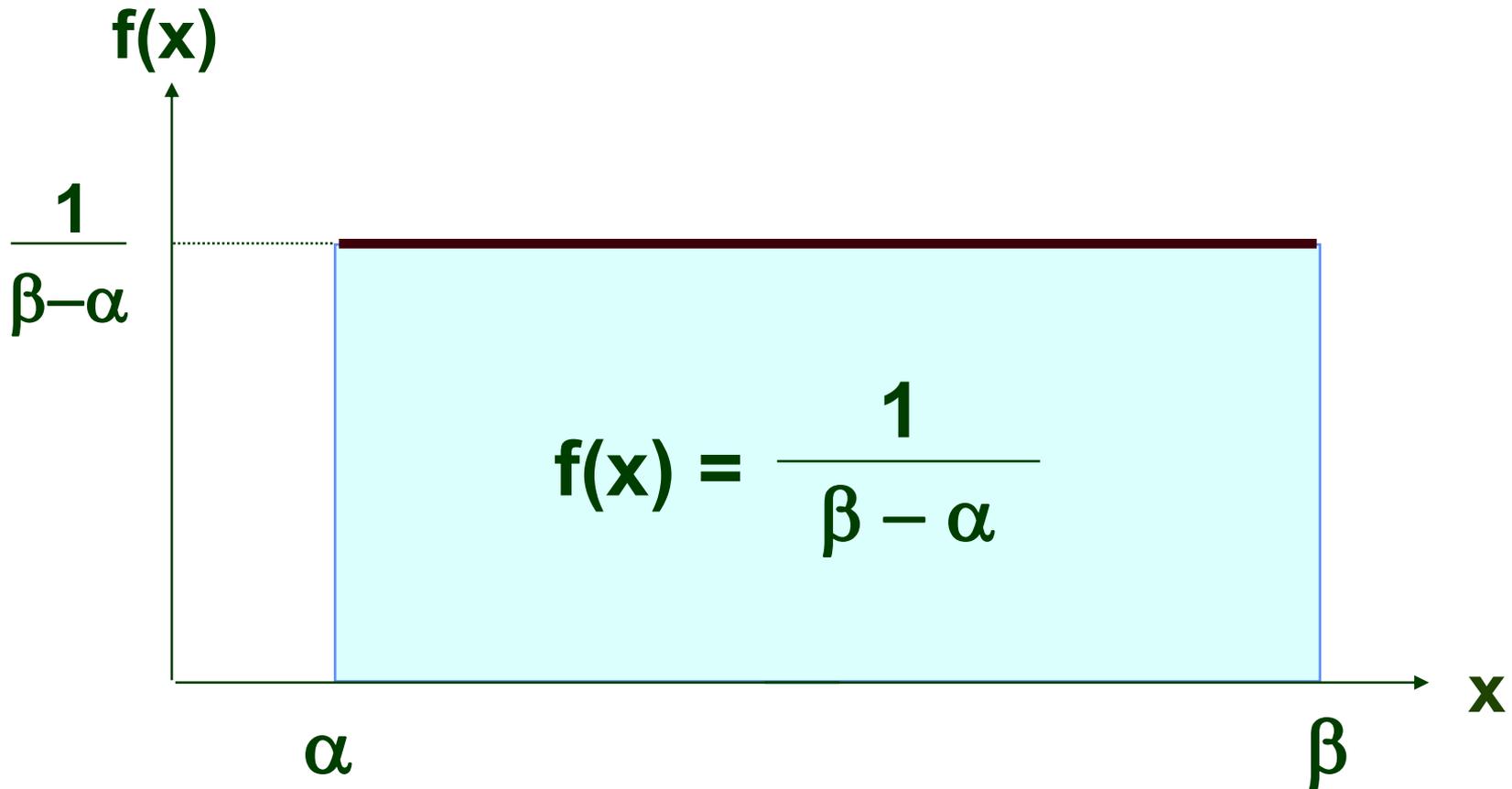
x	P(X=x)	Resultado
0	$P(X = 0) = \frac{e^{-3 \times 1} \times (3 \times 1)^0}{0!}$	0,0498
1	$P(X = 1) = \frac{e^{-3 \times 1} \times (3 \times 1)^1}{1!}$	0,1494
2	$P(X = 2) = \frac{e^{-3 \times 1} \times (3 \times 1)^2}{2!}$	0,224
3	$P(X = 3) = \frac{e^{-3 \times 1} \times (3 \times 1)^3}{3!}$	0,224

$$P(X \geq 4) = 1 - 0,6472 = 0,3528$$

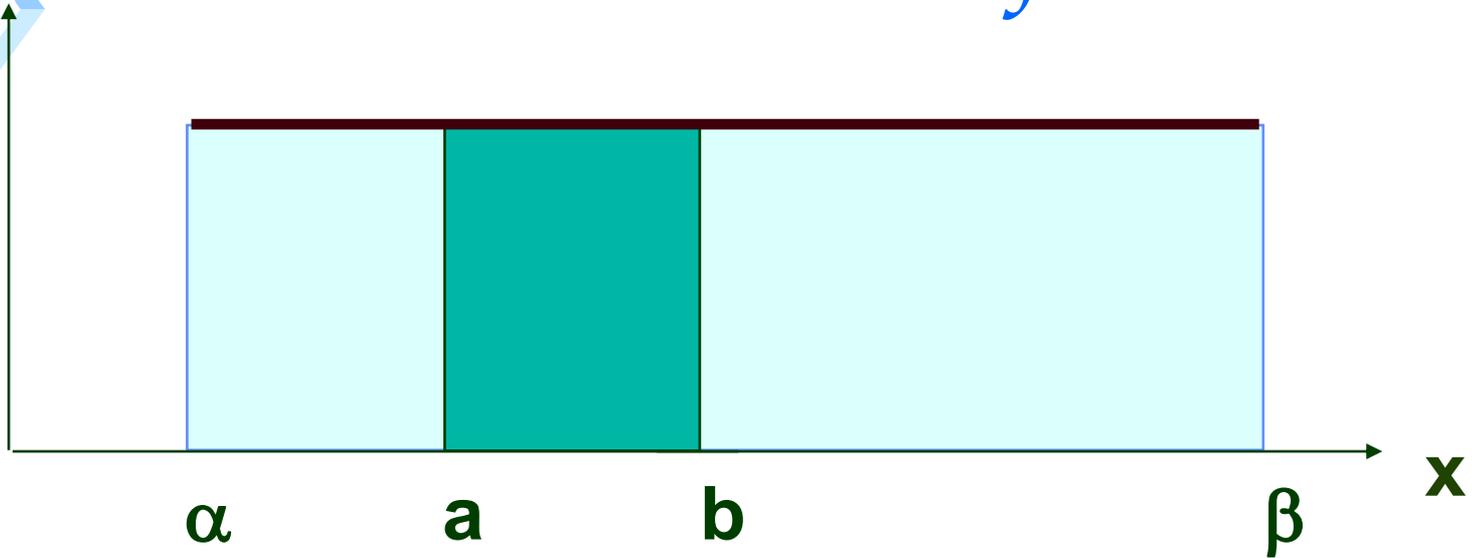
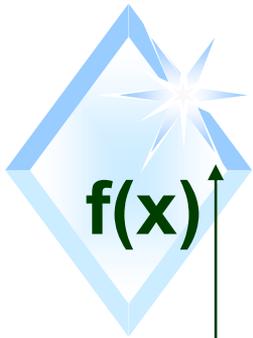


Modelo Uniforme

- Modelo teórico contínuo.



Modelo Uniforme



$$P(a < X < b) = \frac{b - a}{\beta - \alpha}$$

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

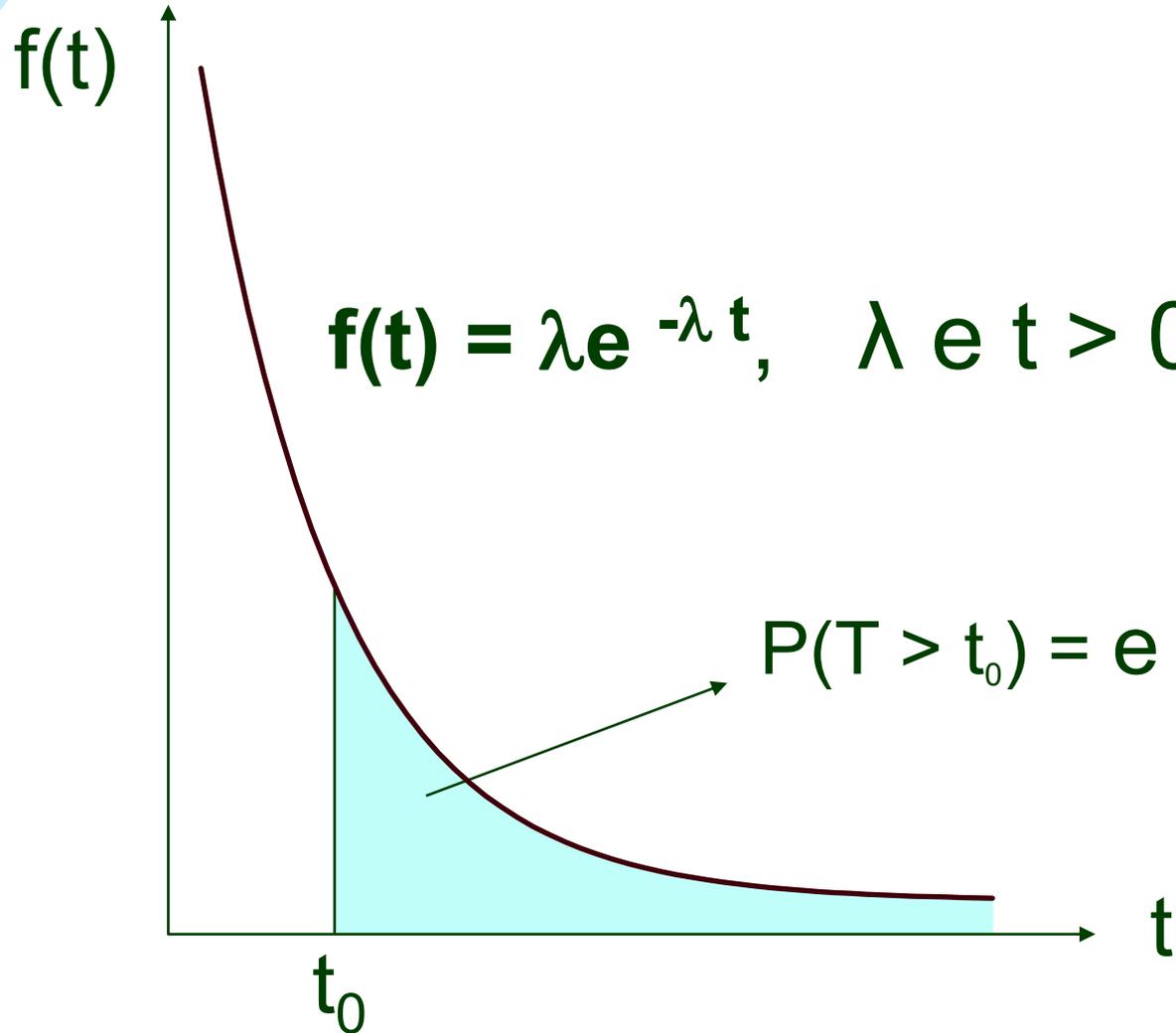


Modelo Exponencial

- Relação com a Poisson.
- X : variável aleatória *discreta* com distribuição de Poisson – número de ocorrências em um intervalo finito com uma taxa λ .
- T : variável aleatória *contínua* – tempo *entre* as ocorrências seguirá uma distribuição exponencial com valor esperado $1/\lambda$



Modelo Exponencial



$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$



Exemplo 3

- O setor de manutenção de uma empresa fez um levantamento das falhas de um importante equipamento, constatando que há, em média, 0,75 falha por ano e que o tempo entre falhas segue uma distribuição exponencial. Qual é a probabilidade do equipamento não falhar no próximo ano?



Exemplo 3

$$\lambda = 0,75$$

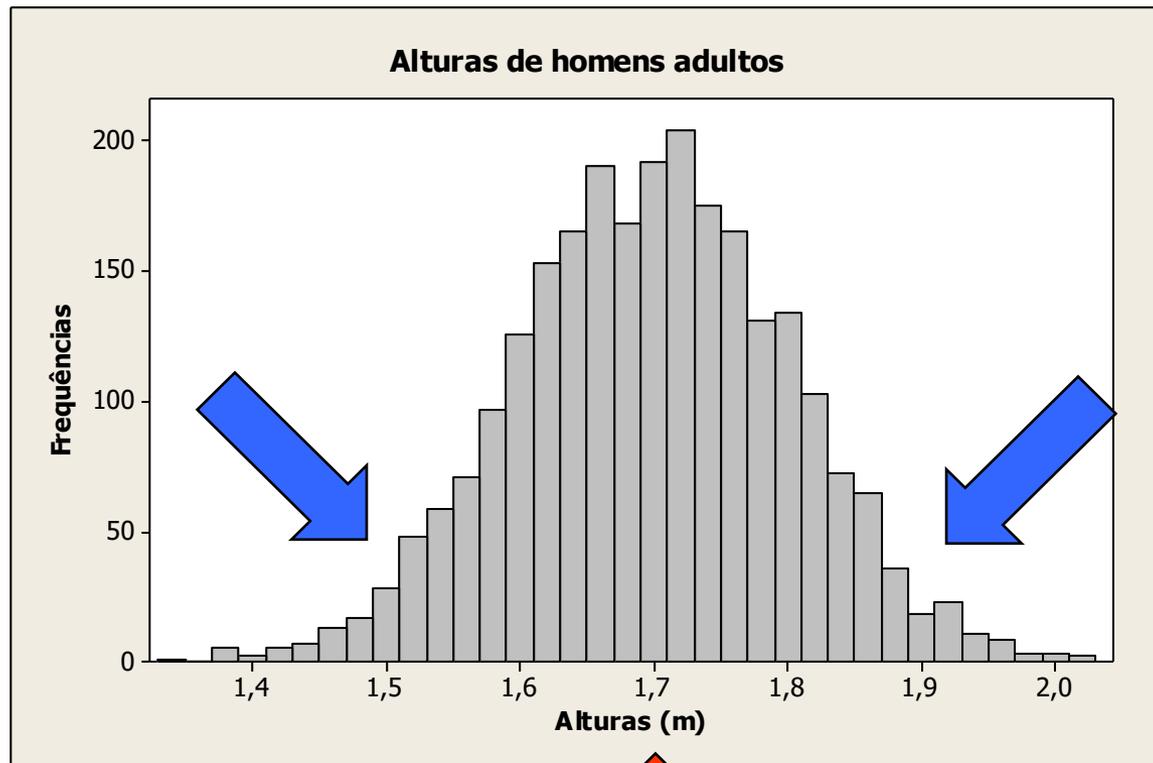
$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(T > 1) = e^{-(0,75)1} = \mathbf{0,4724} \text{ ou } \mathbf{47,24\%}$$



Modelo Normal

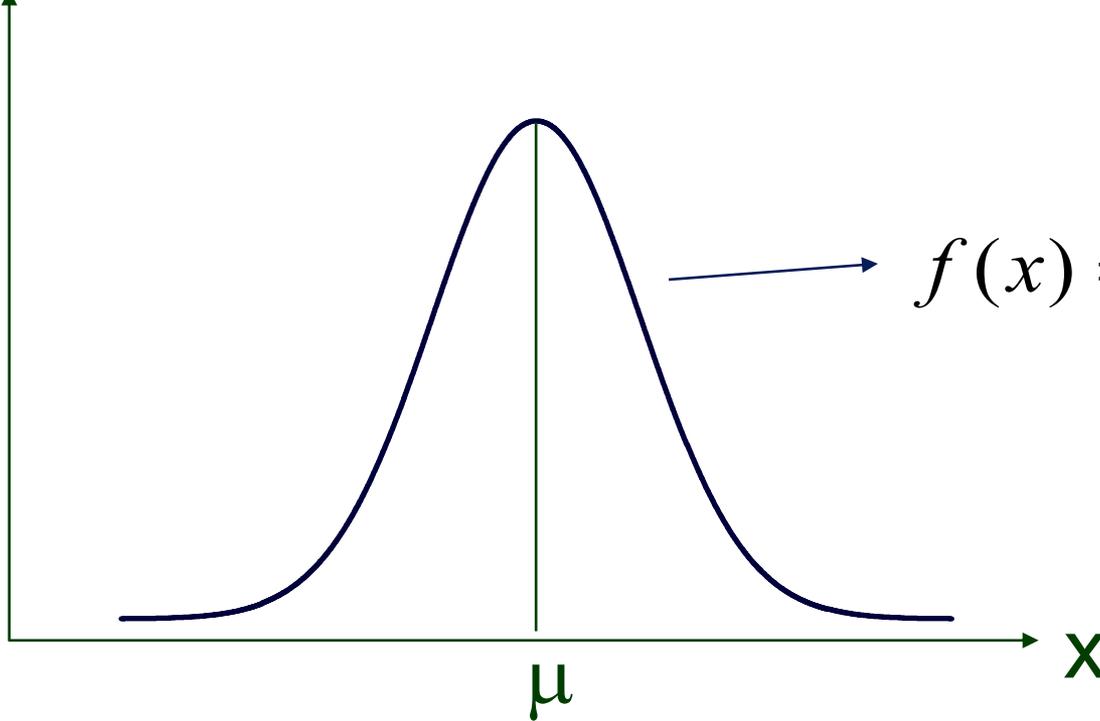
Muitas variáveis aleatórias tem distribuições como:





Modelo Normal

$f(x)$



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

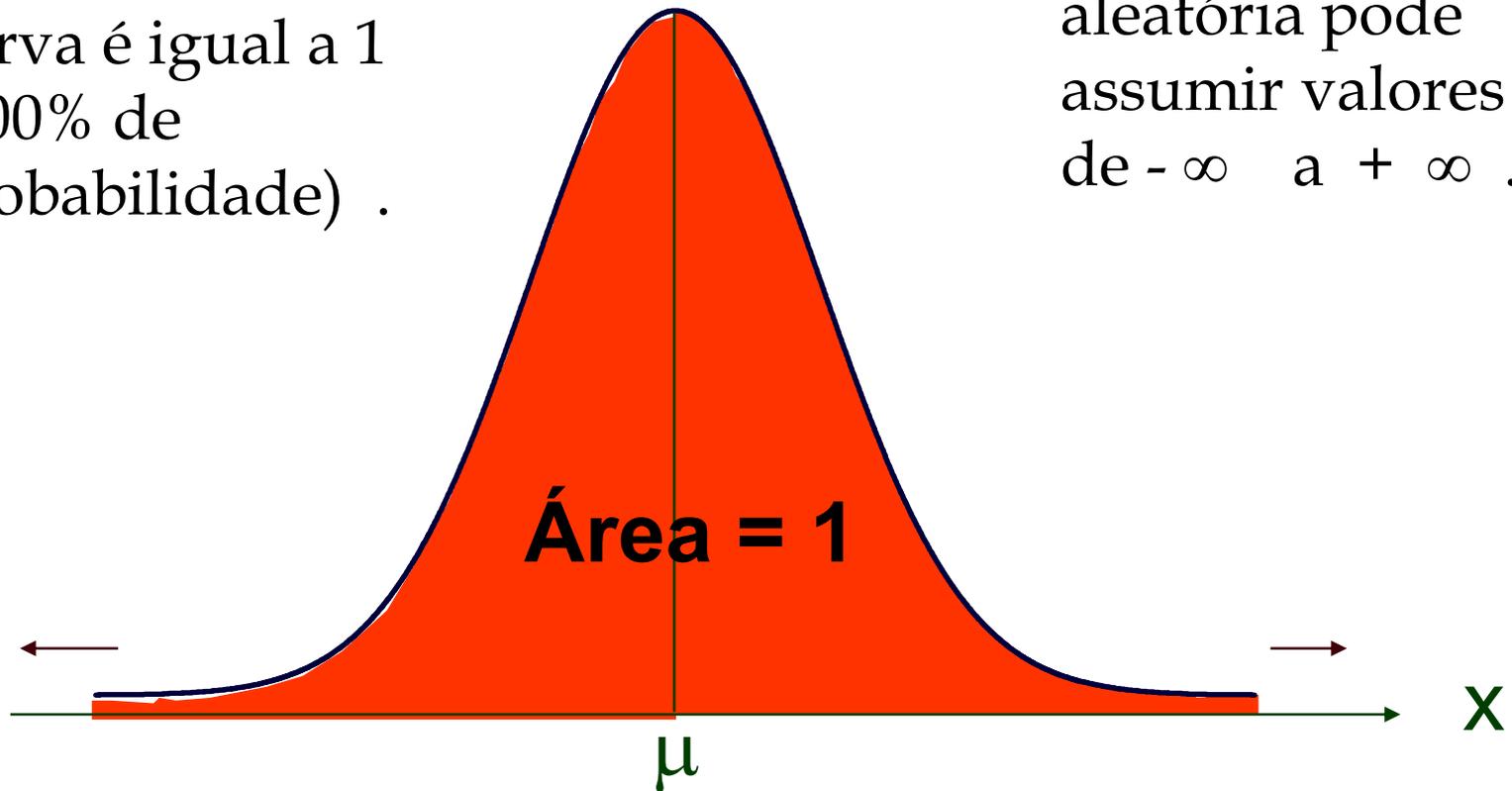
μ : média
 σ : desvio padrão



Características

- Área abaixo da curva é igual a 1 (100% de probabilidade) .

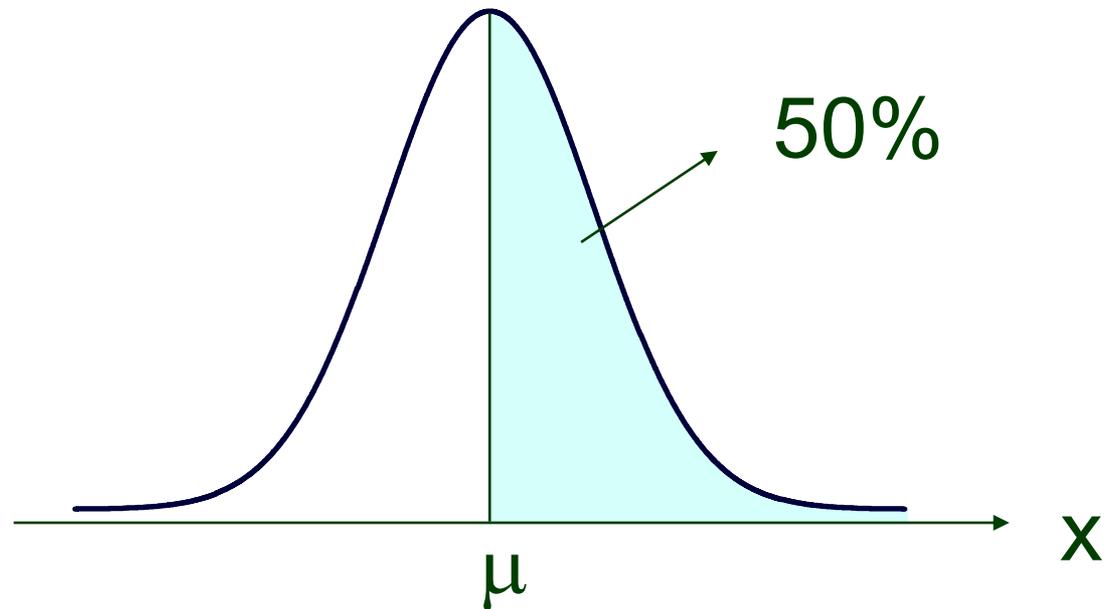
- A variável aleatória pode assumir valores de $-\infty$ a $+\infty$.





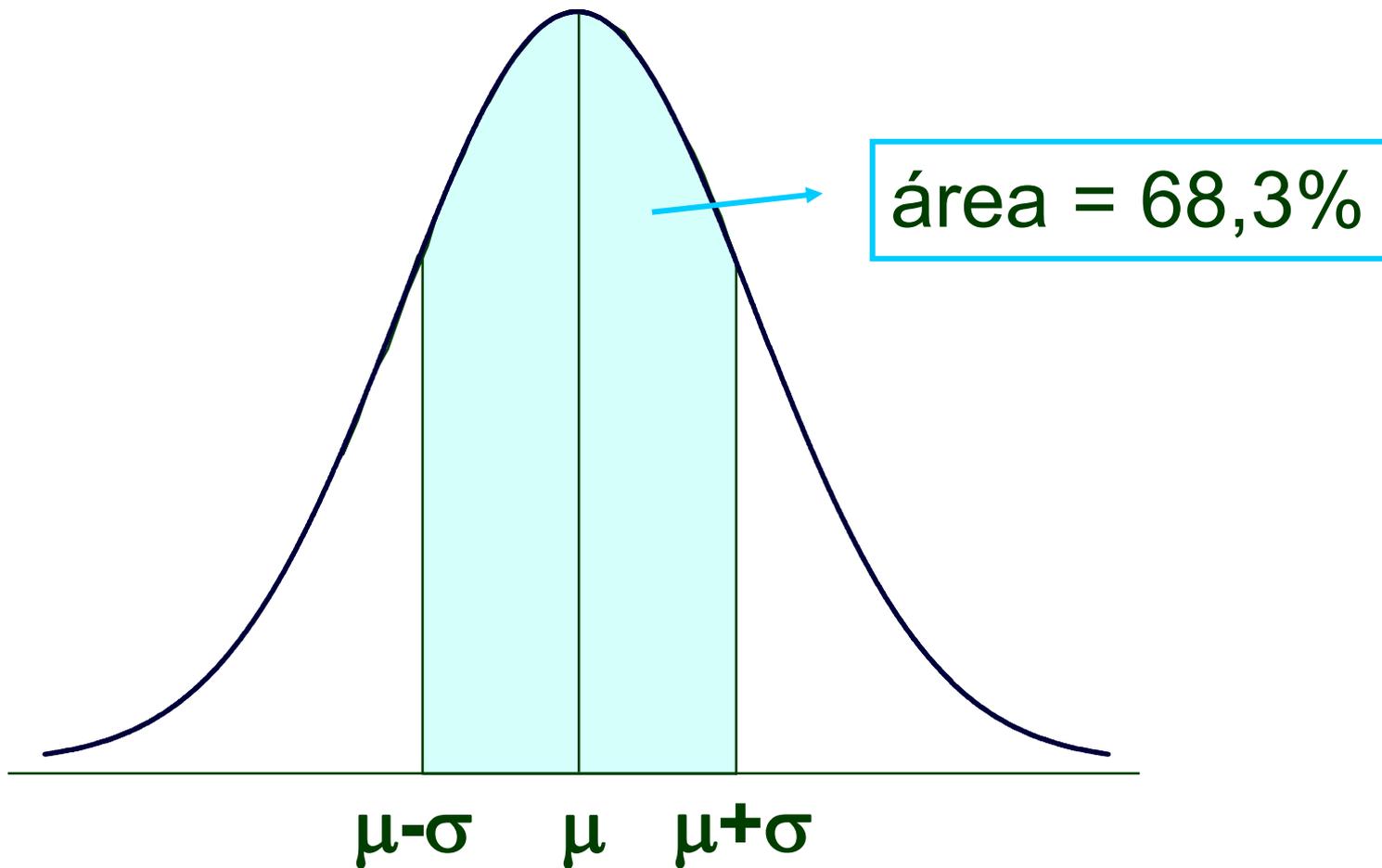
Características

- Simetria em relação à média.



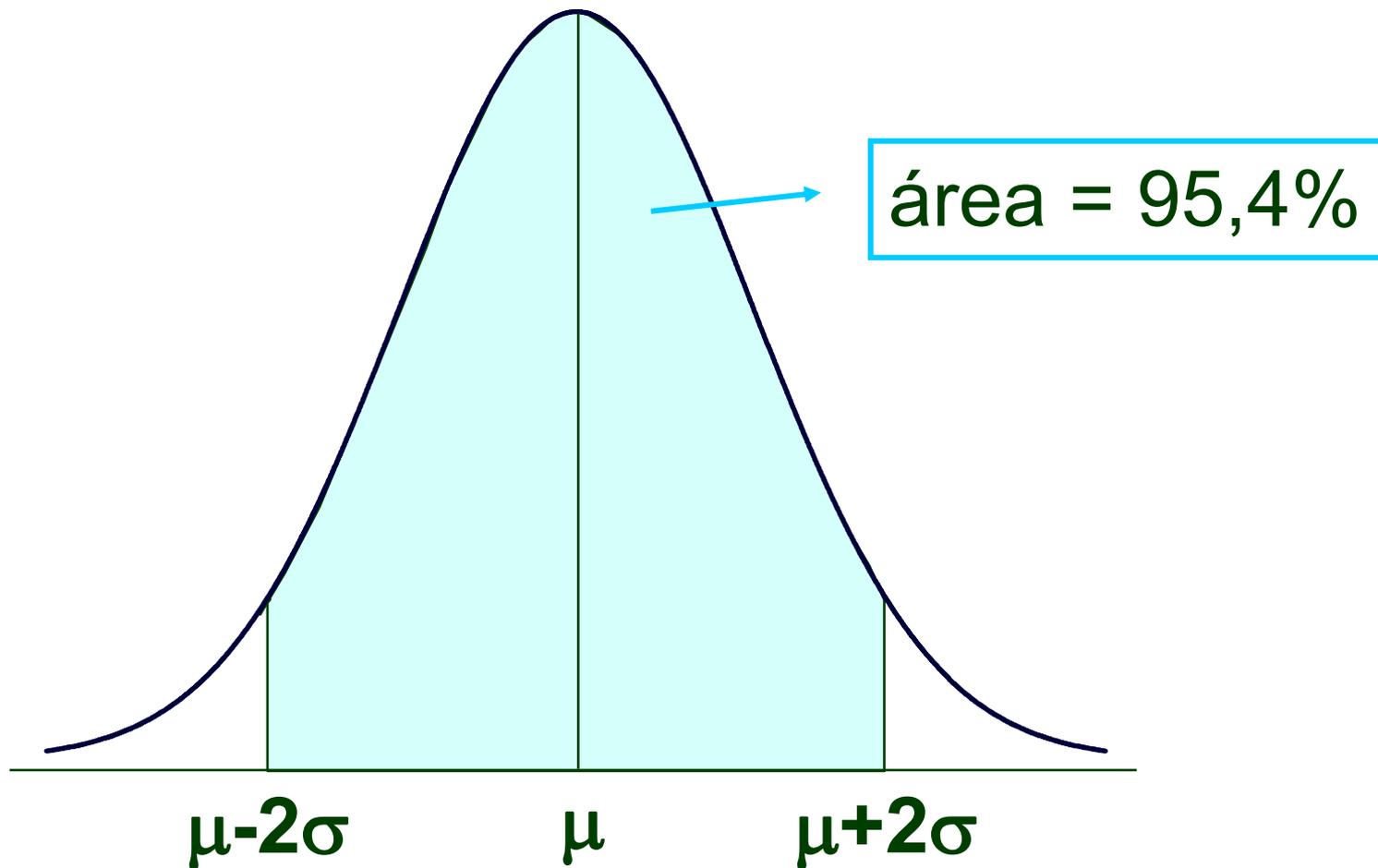


Exemplo



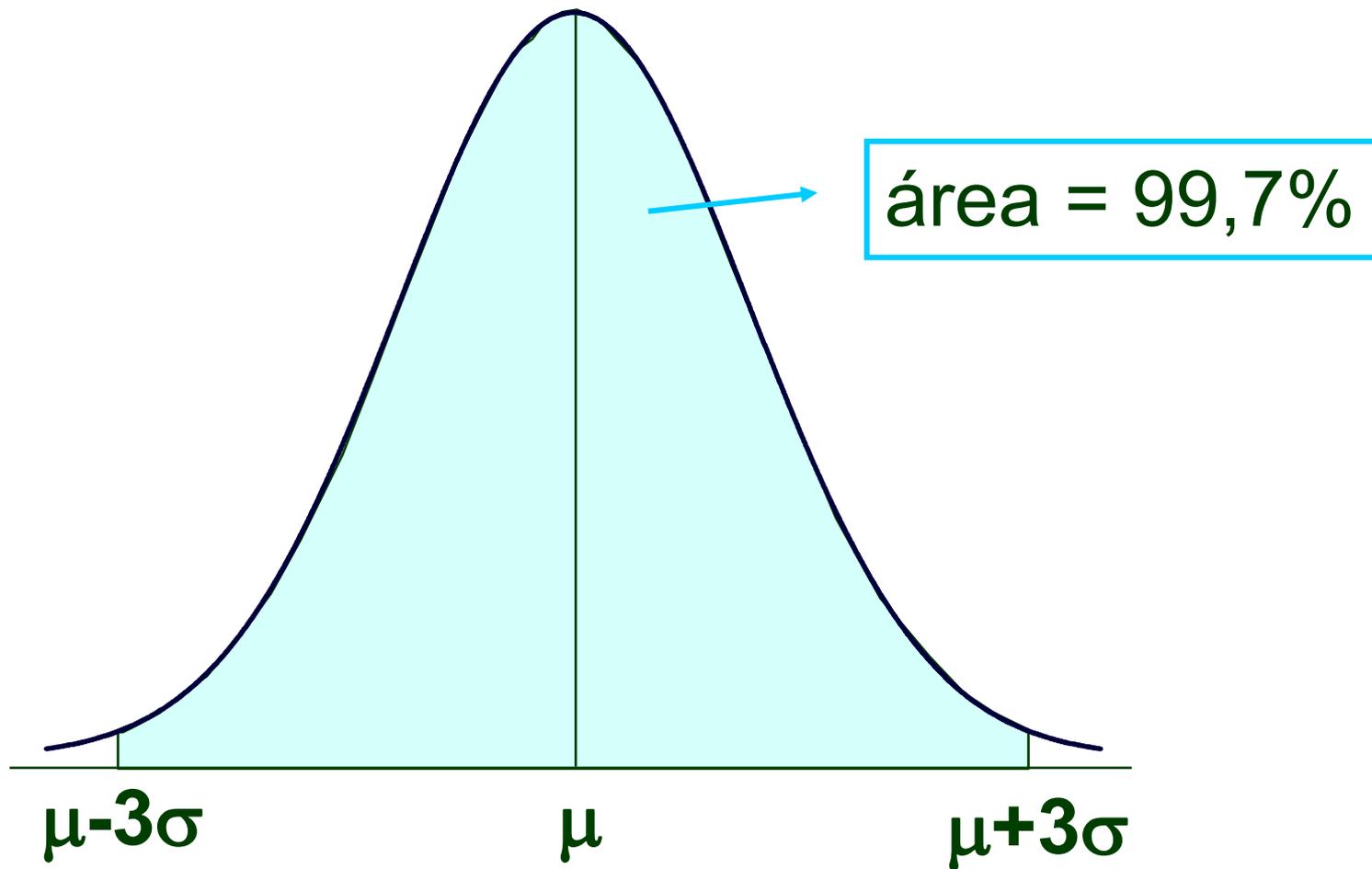


Exemplo





Exemplo





Normal Padronizada

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

z - variável normal padronizada

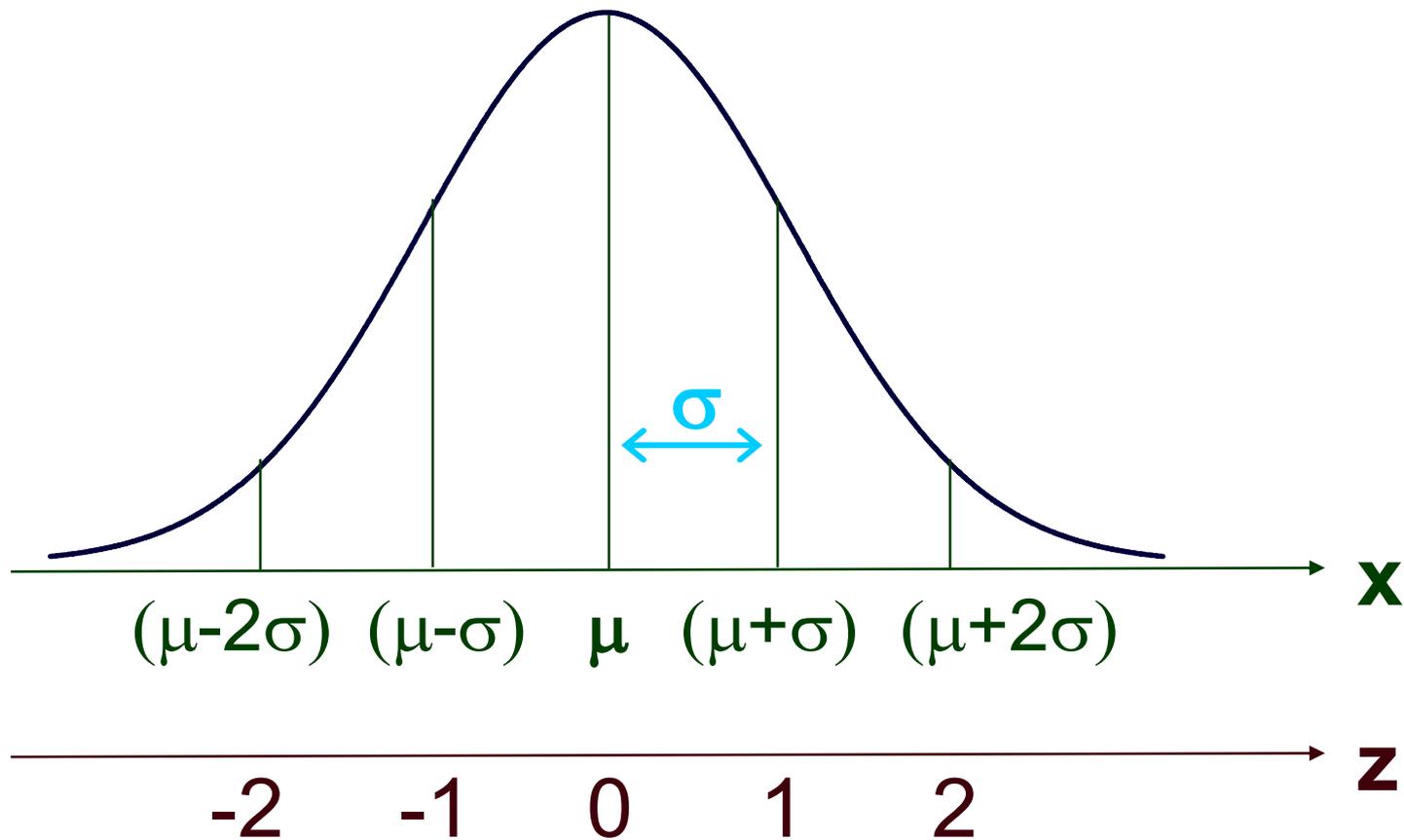
x - variável normal

μ - média

σ - desvio padrão



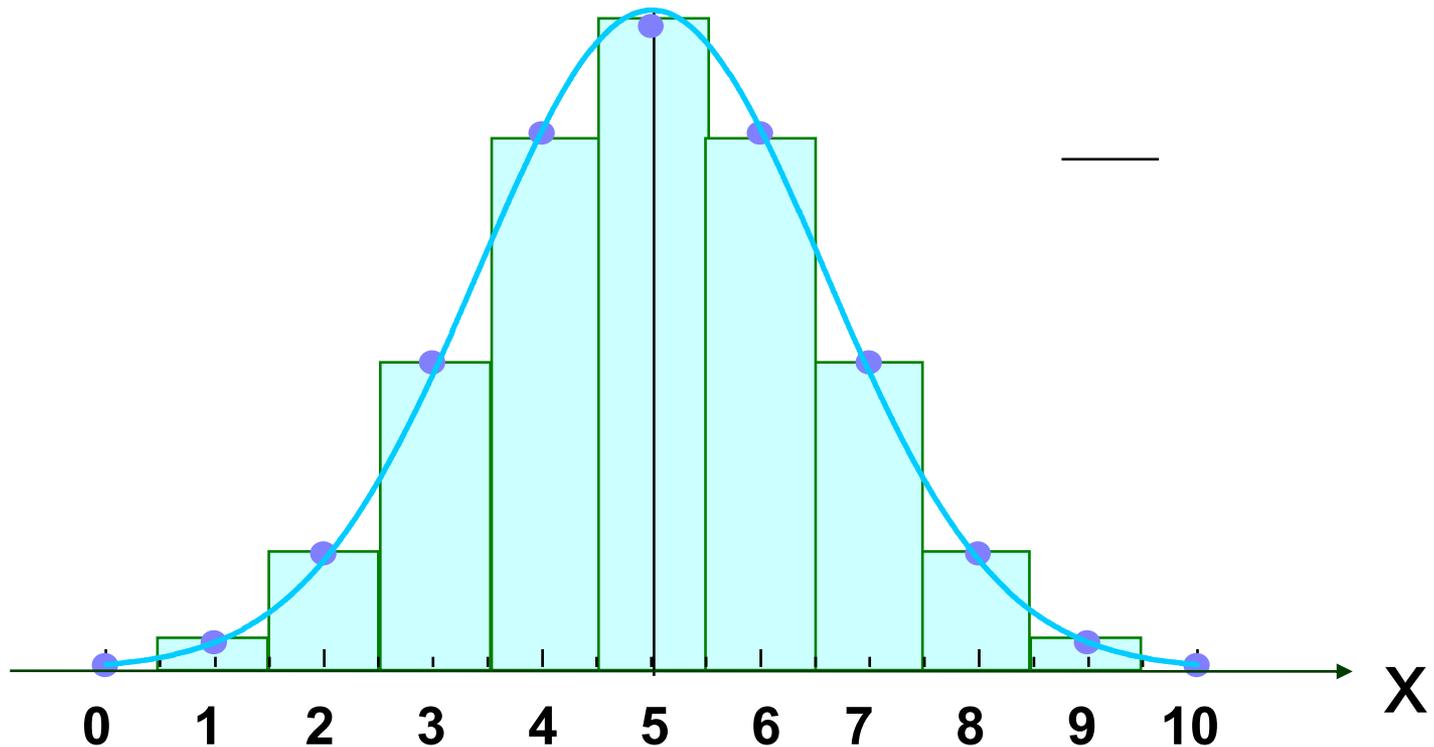
Normal Padronizada





Aproximação da Binomial pela Normal

- Quando o número de ensaios (n) da binomial é grande, a distribuição binomial pode ser aproximada por uma normal com média $n \times p$ e variância $n \times p \times (1 - p)$.





Exemplo 4

- Considere que um aluno irá fazer um teste de Estatística. Pelo que estudou ele tem **50%** de probabilidade de responder corretamente uma questão. Se o teste tem **10** perguntas, seja **X** o número de respostas corretas.

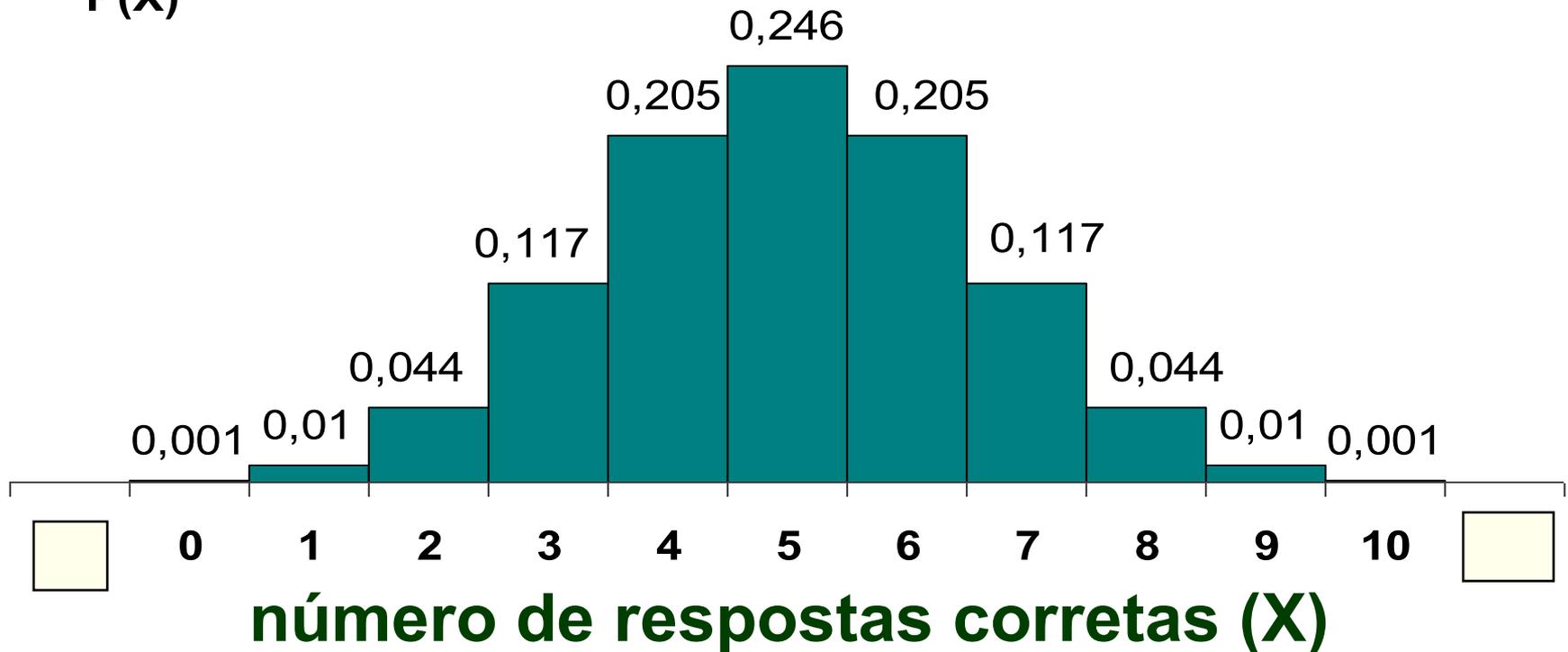


Exemplo 4

Distribuição binomial:

$n=10$ $p=0,5$

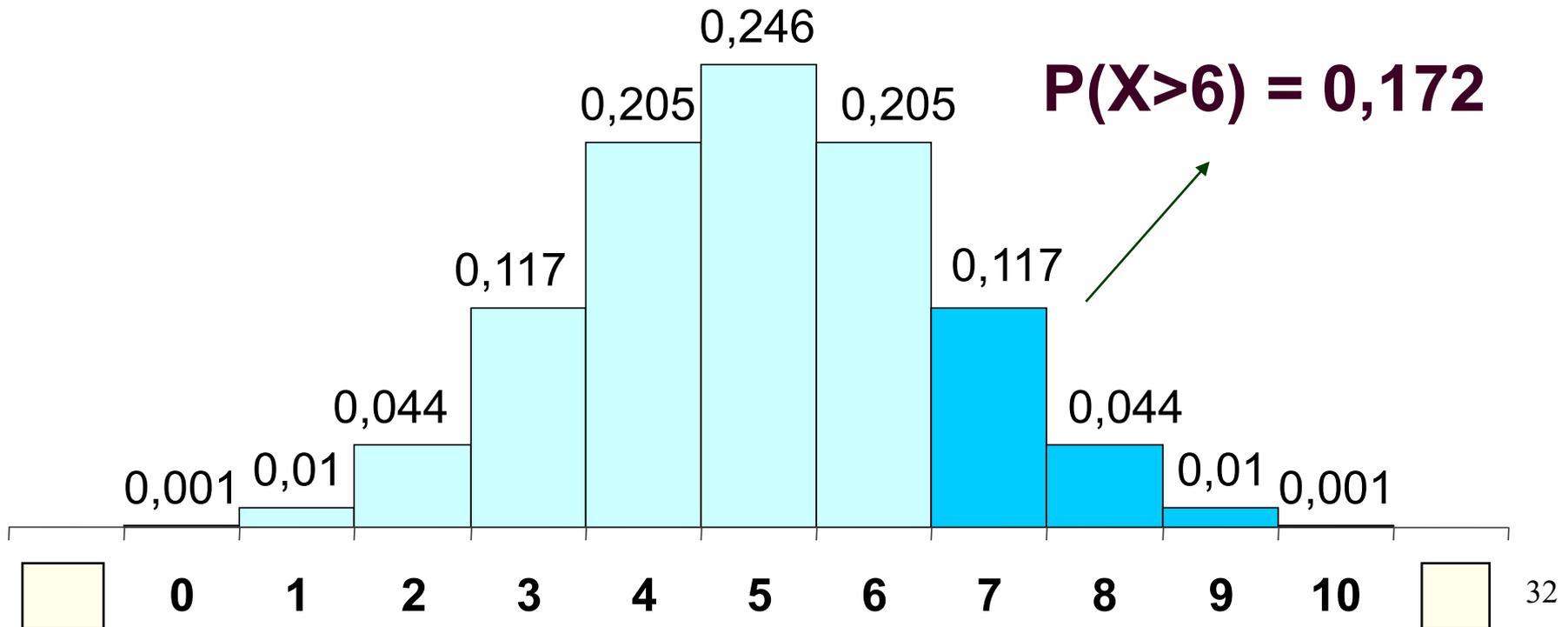
P(X)





Exemplo 4

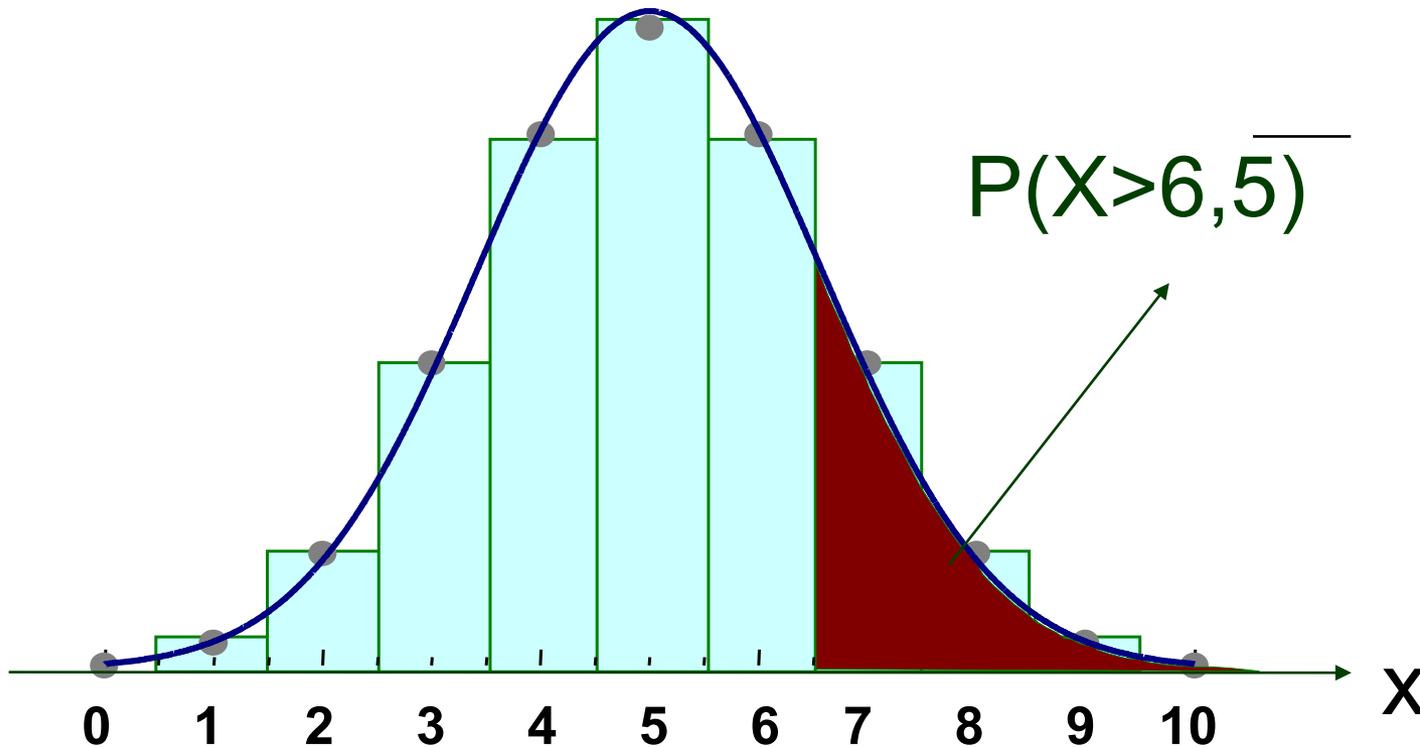
- Qual é a probabilidade de ocorrer mais de 6 corretas?
- $P(X > 6) = P(7) + P(8) + P(9) + P(10) = 0,117 + 0,044 + 0,010 + 0,001 = 0,172$





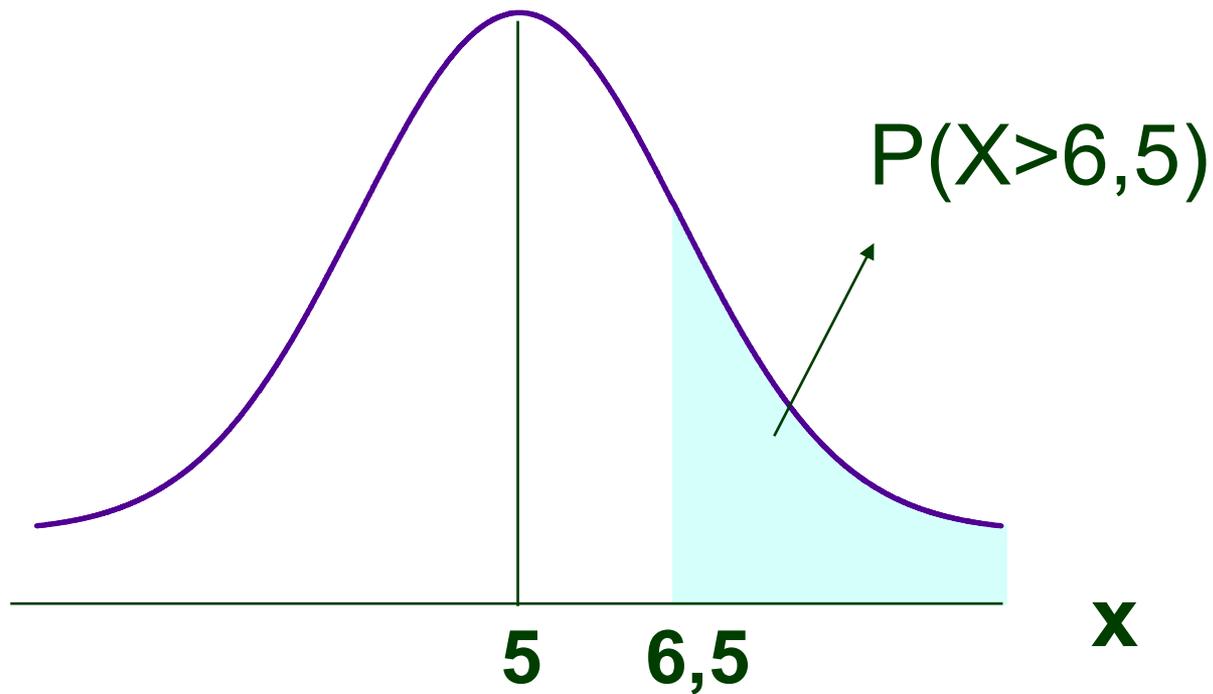
Exemplo 4 (de novo)

- Qual é a probabilidade de ocorrer mais de 6 respostas afirmativas? (usando a normal)





Exemplo 4 (de novo)

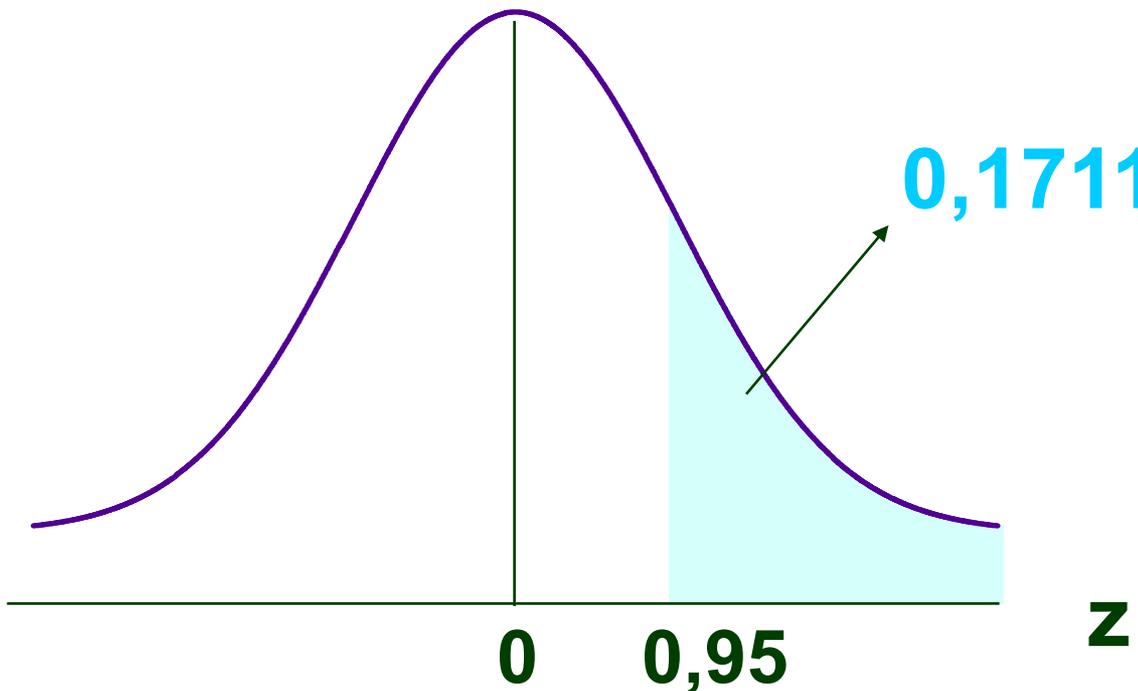




Exemplo 4 (de novo)

$$\mu = 5 \quad \sigma = 1,581139 \quad x = 6,5$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6,5 - 5}{1,581139} = 0,95$$



Lembrando:
a probabilidade.
Exata (pela
binomial)
era de 0,1720