Probabilidade e Modelos Probabilísticos

Conceitos básicos, variáveis aleatórias

Incerteza e Probabilidade

- Tomar decisões:
  - Curso mais provável de ação:
    - Se desejamos passear de barco e não sabemos nadar, devemos usar um salva-vidas.
    - Se não confiamos na continuidade do fornecimento de energia elétrica, devemos ter lanternas (e pilhas) ou velas (e fósforos) em casa.
  - Incerteza:
    - Por mais medo que se tenha, ou por mais revolto que esteja o mar, pode não acontecer nada no seu passeio de barco.
    - Por pior que seja a concessionária de energia elétrica pode não faltar energia...

Incerteza e Probabilidade

- Como QUANTIFICAR a incerteza?
- Um dos métodos disponíveis: PROBABILIDADE
- Mas apenas para fenômenos (experimentos) ALEATÓRIOS.

Experimentos aleatórios

- Experimentos aleatórios são aqueles nos quais:
  - ANTES do experimento ocorrer não se pode definir qual será o seu resultado.
  - Quando é realizado um grande número de vezes, ele apresenta uma <u>regularidade</u>, que possibilita construir um modelo para prever seus resultados.
- Exemplos
  - Consumo de energia elétrica em uma cidade em um dia.
  - Resultados de jogos que envolvam sorteio (não viciados).
  - Número de pessoas que chegarão em um banco nas próximas 2 horas.

Modelos probabilísticos

Definição do experimento

Definição dos resultados possíveis do experimento

Espaço Amostral

Definição de uma regra que obtenha a probabilidade de cada resultado ocorrer.

Espaço amostral

- Ω, S: TODOS os resultados possíveis.
- Discreto:
  - Finito Ω: {possíveis resultados de sorteio}
  - Infinito numerável Ω: {0, 1, 2, ...}
- Contínuo:
  - Infinito Ω: {Energia/Potência ≥ 0 (MWh ou MW)}

Evento

- Evento = conjunto de resultados possíveis
- Espaço amostral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Eventos: A = número par,

  B = número menor que 3

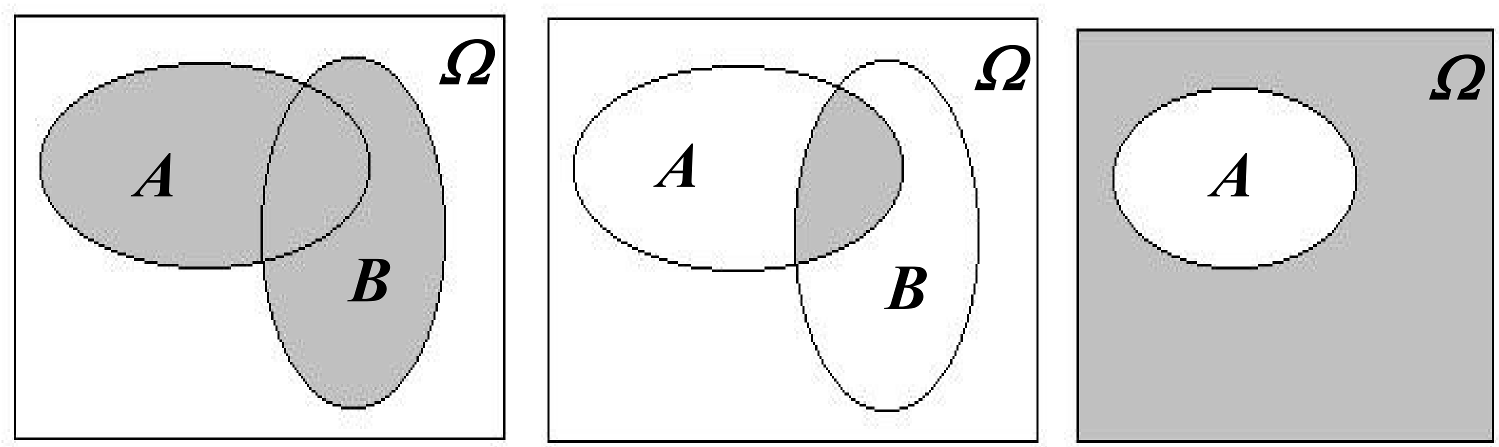
  A = {2, 4, 6}   B = {1, 2}

Operações entre eventos

(a) União: $A \cup B$

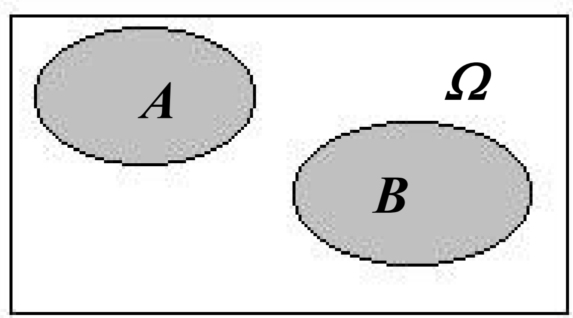
(b) interseção: $A \cap B$

(c) complementar: $\overline{A}$



Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente.
- A e B são *mutuamente exclusivos* $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$



Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos **equiprováveis**

Definição clássica:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- sendo:
  - n resultados *igualmente prováveis*,
  - n_A destes resultados pertencem a um certo evento A

Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos
- Se $A \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, então:

$$P(A) = \sum_{i:\varpi_i \in A} P(\omega_i)$$

Probabilidade de eventos

- Alocação de probabilidades em função de observações passadas (abordagem frequencista):

$$f(A) = \frac{n_A}{n} \quad \text{Frequência relativa}$$

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Axiomas da Probabilidade

- Seja um experimento aleatório com um espaço amostral Ω associado a ele, e seja E_i (i= 1, 2, ...n) um evento genérico.
- A probabilidade de ocorrência de E_i será um número real tal que:
  - $0 \leq P(E_i) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Se E_1, E_2, ..., E_n são eventos mutuamente exclusivos, então $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \Sigma\, P(E_i)$

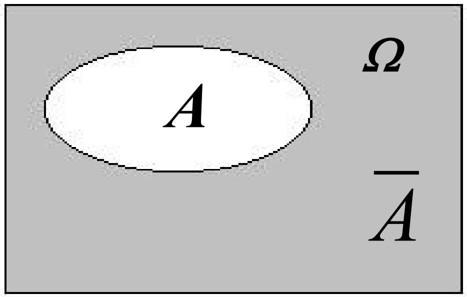
Propriedades

- $P(\varnothing) = 0$

- $P(\Omega) = 1$

- Probabilidade do evento complementar

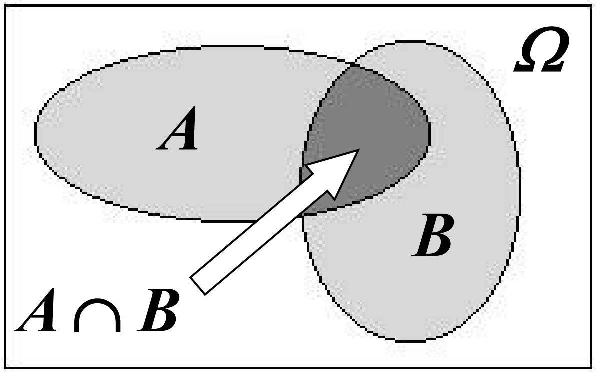
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



"Novo" espaço amostral

Condição do peso	Tipo do leite B (B)	C (C)	UHT (U)	Total
dentro das especificações (D)	500	4500	1500	6500
fora das especificações (F)	30	270	50	350
Total	530	4770	1550	6850

$$P(F) = \frac{350}{6850} = 0{,}051$$

Qual é a probabilidade que esteja fora das especificações, sabendo-se que é leite do tipo UHT?

$$P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = 0{,}032$$

$$P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = \frac{50/6850}{1550/6850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

Probabilidade condicional

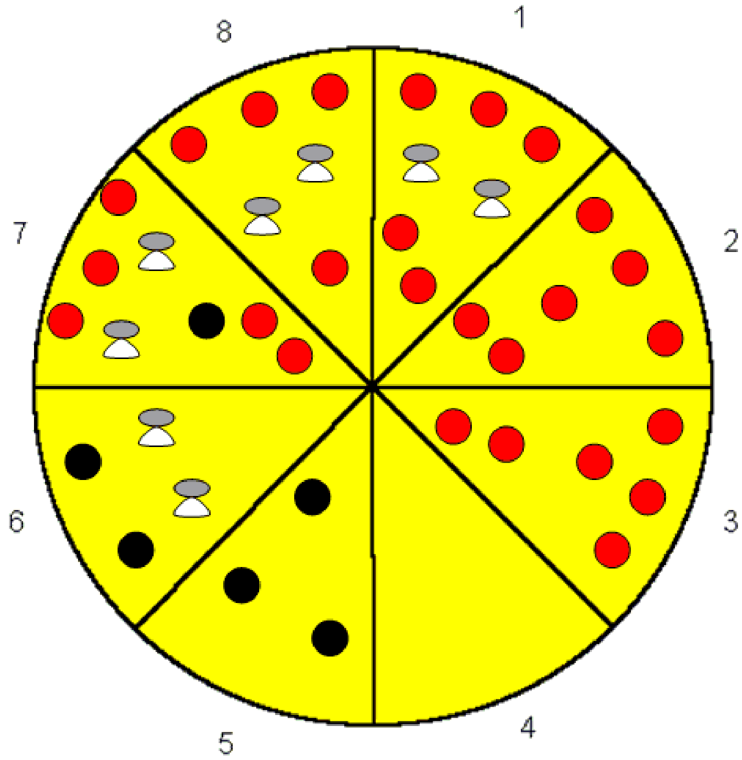
- Sejam A e B eventos quaisquer, sendo $P(B) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Sejam A e B eventos quaisquer, sendo $P(A) > 0$. Definimos a *probabilidade condicional de B dado A* por

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional



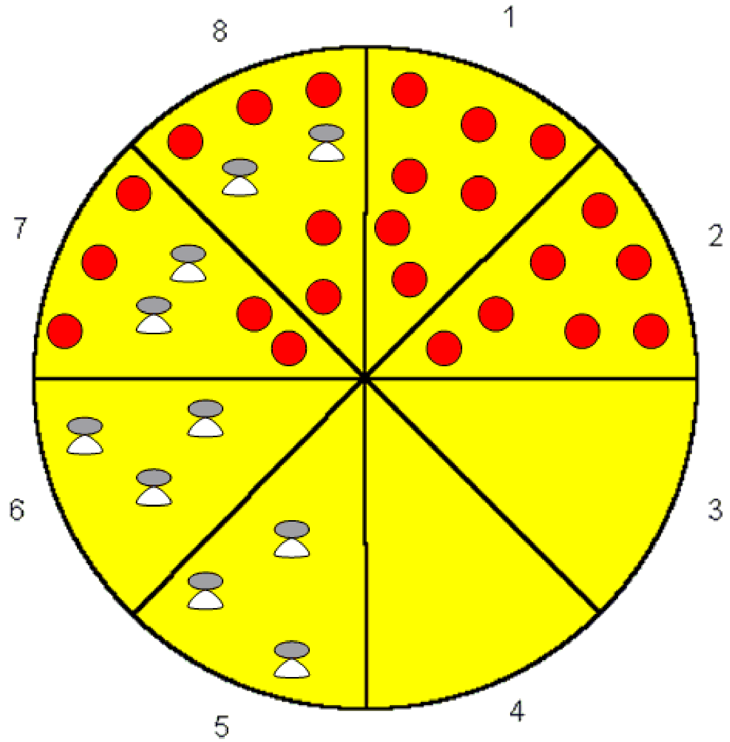
Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com champignon supondo que houvesse calabresa nele?

Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com calabresa supondo que houvesse champignon nele?

$$P(Champignon | Calabresa) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Calabresa)} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$

$$P(Calabresa | Champignon) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Champignon)} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}$$

Probabilidade Condicional



Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com champignon supondo que houvesse calabresa nele?

Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com calabresa supondo que houvesse champignon nele?

$$P(Champignon \mid Calabresa) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Calabresa)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

$$P(Calabresa \mid Champignon) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Champignon)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

Regra do produto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)}$$

ou

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

Eventos independentes

- Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros. Nesse caso:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

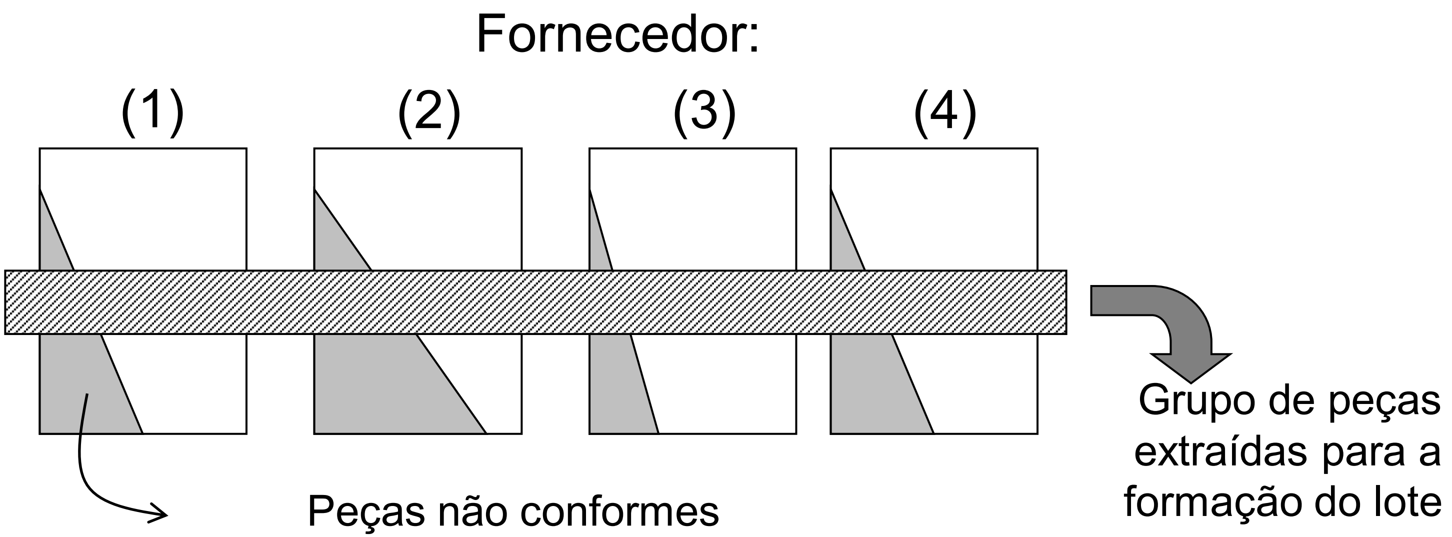
A e B são independentes

$$\Updownarrow$$

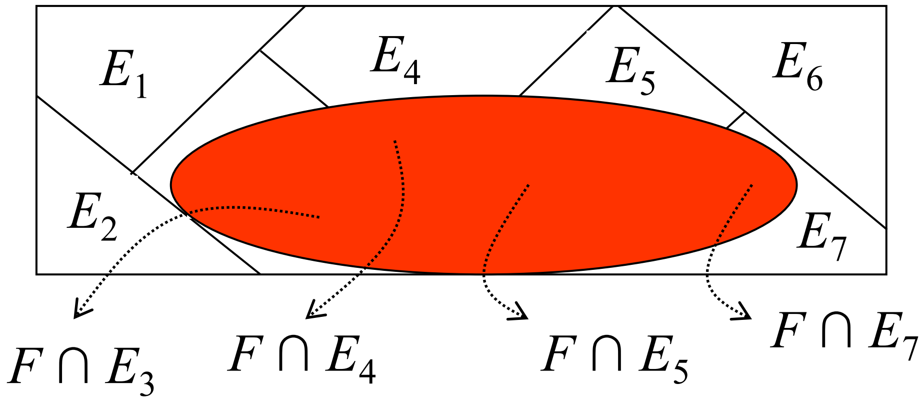
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Teorema da probabilidade total

- Ilustração da formação de um lote de peças provindas de 4 fornecedores



Teorema da probabilidade total



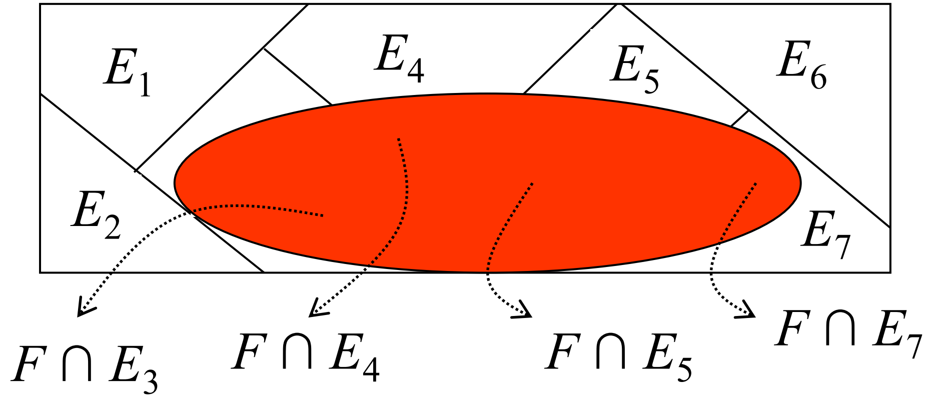
Eventos Ei
M.E.

$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)$$

$$P(F) = P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)] =$$
$$= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \ldots + P(F \cap E_k)$$

$$P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)$$

Teorema de Bayes



$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

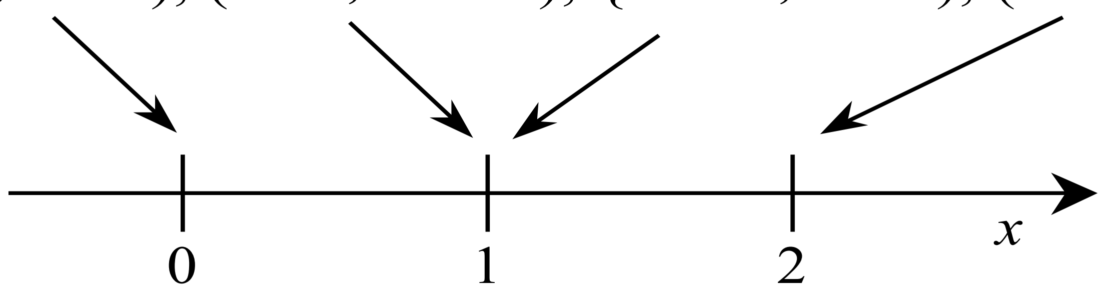
$$\Rightarrow \quad P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)}{P(F)}$$

Variável aleatória

- "Uma variável aleatória é uma função com valores **numéricos**, cujo valor é determinado por fatores de chance." Associa números aos eventos do espaço amostral.
- **X =** número de coroas em 2 lançamentos de uma moeda;

$\Omega = \{(cara,\ cara),\ (cara,\ coroa),\ \{coroa,\ cara),\ (coroa,\ coroa)\}$

X:



Exemplos de variáveis aleatórias

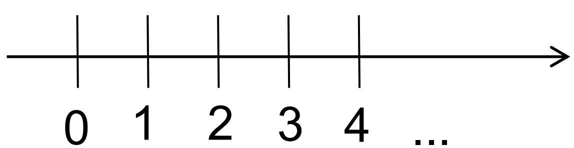
- Vida útil (em horas) de um televisor.
- Número de peças com defeito em um lote produzido.
- Número de acidentes registrados durante um mês na BR.101.
- Na *internet*, o tempo (em segundos) para que uma determinada mensagem chega ao seu destino.
- Se uma mensagem chega ($X = 1$), ou não ($X = 0$), ao seu destino

Variáveis aleatórias

variável aleatória

discreta

os possíveis resultados estão contidos em um conjunto finito ou enumerável



número de defeitos em ...

contínua

os possíveis resultados abrangem todo um intervalo de números reais

tempo de resposta de ...

Variável aleatória discreta

- Pares x_i e $P(X = x_i)$.
- Cada $P(X = x_i) \geq 0$, $\Sigma P(X = x_i) = 1{,}0$

$X = x_i$	$P(X = x_i)$	$F(X) = P(X \leq x_i)$
x_1	$P(X = x_1)$	$F(x_1) = P(X \leq x_1)$
x_2	$P(X = x_2)$	$F(x_2) = P(X \leq x_2)$
...	...	
x_n	$P(X = x_n)$	$F(x_n) = P(X \leq x_n) = 1$

Variável aleatória discreta

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

- Variância

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$onde \;\; E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \times P(X = x_i)$$

Variável aleatória contínua

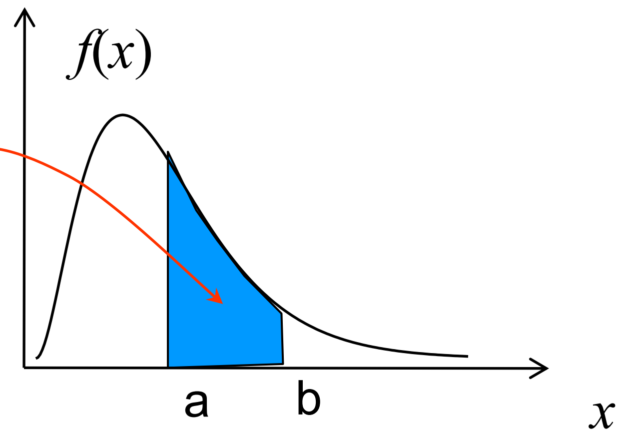
- **Função densidade de probabilidade** *f(x)*:

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Re \quad e$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$$

Se $A = [a, b]$, então

$$P(A) = \int_a^b f(x)d(x)$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds, \quad \forall x \in \Re$$

Variável aleatória contínua

- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)dx$$

- Variância

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$onde\ \ E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x)dx$$

Propriedades do valor esperado e variância

a) $E(c) = c$	a) $V(c) = 0$
b) $E(X + c) = E(X) + c$	b) $V(X + c) = V(X)$
c) $E(cX) = cE(X)$	c) $V(cX) = c^2 V(X)$
d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$	d) $DP(cX) = \|c\| DP(X)$
e) $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$	

Se X e Y INDEPENDENTES:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$
$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$