Sinais Digitais e Vetores

João Cândido Dovicchi
Laboratório de Música Eletroacústica
Núcleo Avançado de Computação Sônica e Multimídia
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia - MG - Brasil
Tech. Report

10 de Dezembro de 2002

Resumo

Este artigo apresenta uma introdução aos conceitos básicos de espaços vetoriais e suas relações com sinais digitais. Uma vez que os sinais digitais de áudio nada mais são do que uma seqüência ordenada de valores, as operações sobre este conjunto de valores — que, normalmente, denominamos transformadas — podem ser computadas levando-se em consideração as propriedades de vetores, os espaços onde podem ser definidos e as operações com suas bases.

Este trabalho é fundamental para a compreensão de outros relatórios técnicos de nosso laboratório que compreendem as bases matemáticas para o desenvolvimento da pesquisa na área de processamento digital de sinais de áudio (*Audio Digital Signal Processing - DSP*).

1 Introdução

O som é um fenômeno físico analógico, ou seja, uma vibração contínua no domínio do espaço e tempo. Entretanto, estas vibrações podem ser representadas, de forma digital, por uma seqüência de números reais homogeneamente espaçadas no tempo. A transformação do som de sua forma analógica em uma forma digital é denominada digitalização do sinal sonoro e pode ser feita por amostragem (veja figura 1), ou seja, tomando-se valores em intervalos de tempo igualmente determinados . Dependendo do número de amostras do sinal ou da taxa de amostragem, podemos obter o sinal digital com diversos níveis de precisão em relação ao sinal analógico original. O sinal resultante pode, então, ser considerado como um vetor de tamanho n, onde n é o número de elementos deste vetor.

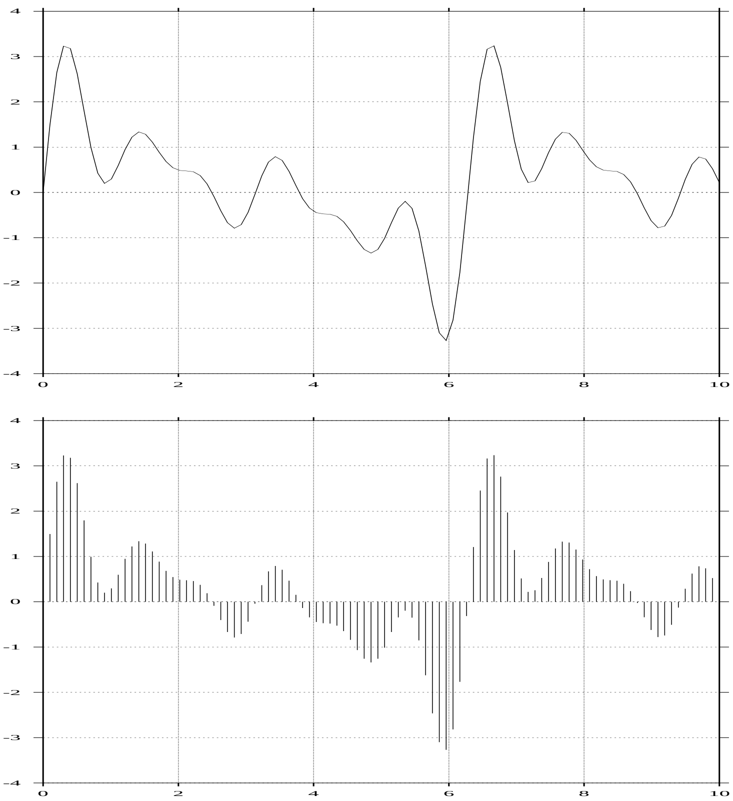

Figura 1: Exemplo de sinal analógico e seu correspondente sinal digital.

Como acontece com qualquer sinal digital, podemos somar estes sinais com outros de mesmo tamanho, multiplicá-lo por um escalar real qualquer ou, ainda, decompô-lo em parciais (componentes do sinal) obtendo, por meio destas operações, conjuntos de sinais de mesmo tamanho e que possuem uma base em comum. Este conjunto de sinais de tamanho n é denotado por $\mathbf{R}^n$. A figura 2 mostra um exemplo de soma de dois sinais de mesmo tamanho.

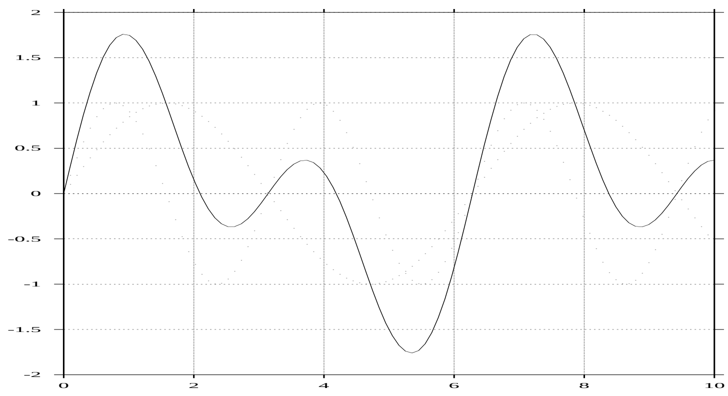

Figura 2: Exemplo de soma de dois sinais $(\sin(x) + \sin(2x))$.

2 Espaços vetoriais

Um conjunto de sinais de mesmo tamanho é dito *fechado* em relação à soma e à multiplicação por escalares. Isto significa que a soma de dois sinais em $\mathbf{R}^n$ ou a multiplicação de um sinal em $\mathbf{R}^n$ por um número real resulta em outro sinal em $\mathbf{R}^n$. Estas operações criam o que denominamos um "espaço vetorial", que é definido como:

Definição 2.1 *Um conjunto V sobre o qual a soma de elementos e a multiplicação por escalares reais pode ser aplicada é um espaço vetorial e os elementos de V são denominados vetores, se:*

1. $u + v \in V \qquad \forall u, v \in V$ *(V é fechado em relação à adição);*
2. $u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$ *(adição é comutativa em V);*
3. $(u + v) + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$ *(adição é associativa em V);*
4. $\exists 0 \in V | 0 + v = v \qquad \forall v \in V$ *(V é uma identidade na adição de um elemento 0);*
5. *Para cada $v \in V$ exite um elemento $-v \in V | v + (-v) = 0$ (cada elemento de V tem um inverso em V);*
6. $kv \in V \qquad \forall v \in V, k \in \Re$ *(V é fechado em relação à multiplicação por escalares reais);*
7. $(kl)v = k(lv) \qquad \forall v \in V, k, l \in \Re$*;*

8. $(k+l)v = kv + lv \qquad \forall v \in V, k, l \in \Re$;

9. $k(u+v) = ku + kv \qquad \forall u, v \in V, k \in \Re$;

10. $1v = v \qquad \forall v \in V$.

Nota 2.1 *A soma de vetores pode ser representada por* $\bigoplus$ *e a multiplicação de vetores por escalares por* $\bigodot$. *O vetor* 0 *é chamado de vetor nulo.*

Nota 2.2 *Quando os escalares são números complexos* $(ja|j = \sqrt{-1}, a \in \Re)$ *o espaço vetorial resultante é chamado de "espaço vetorial complexo".*

O conjunto $\mathbf{R}^n$ de todos os sinais de tamanho n é um espaço denominado n–dimensional. A identidade aditiva neste espaço é o sinal composto de n zeros e o inverso do sinal $[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$ pode ser representado pelo sinal $[-a_1, -a_2, -a_3, \cdots, -a_n]$. A adição de cada elemento ao seu inverso resulta na identidade aditiva, ou seja, $[a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \cdots, a_n + (-a_n)] = [0, 0, \cdots, 0]$.

Para o estudo do processamento de sinais e de transformações de um domínio para outro, é importante considerar os espaços vetoriais de todas as funções reais de variáveis reais. Por exemplo, vamos considerar:

$$F = \{f : \Re \to \Re\} \tag{1}$$

onde f é uma função. Na equação 1, podemos definir a adição ou multiplicação por escalares da seguinte maneira: se f e g são elementos de F e α um número real, então $(f+g)$ pode ser definido como:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \qquad \forall t \in \Re; \tag{2}$$

αf pode ser definido como:

$$(\alpha f)(t) = \alpha(f(t)) \qquad \forall t \in \Re; \tag{3}$$

a identidade aditiva pode ser definida por:

$$z(t) = 0 \qquad \forall t \in \Re \qquad \text{e} \qquad \forall z : \Re \to \Re; \tag{4}$$

e, finalmente, a inversa de um elemento $f \in F$ é a função $-f$, definida por:

$$(-f)(t) = -(f(t)) \qquad \forall t \in \Re. \tag{5}$$

As equações de 1 a 5 definem um espaço vetorial típico dos sinais de áudio. Em geral, as transformações podem ser consideradas maneiras de expressar um vetor em termos de outros vetores. Por exemplo, a transformadas de Fourier toma um vetor n-dimensional no domínio do tempo e o transforma em outro vetor n-dimensional no domínio da freqüência [1, 2, 3].

2.1 Bases e combinações lineares

Um ponto crítico na análise de vetores que respresentam sinais digitais é determinar se este vetor pode, ou não, ser representado em termos de outros vetores. Vamos analisar um exemplo bem simples da álgebra linear. Considere os vetores $[1, 0]$ e $[0, 1]$ em $\mathbf{R}^2$. Uma vez que o espaço vetorial é fechado em relação à multiplicação por escalares, os vetores $a[1, 0]$ e $b[0, 1]$ são vetores em $\mathbf{R}^2$ para a e b reais e, sendo o espaço vetorial fechado em relação à adição podemos afirmar que $a[1, 0] + b[0, 1]$ é um vetor do espaço $\mathbf{R}^2$. Este vetor é dito uma combinação linear de $[1, 0]$ e $[0, 1]$. Em termos gerais, podemos considerar que um espaço V em $\mathbf{R}^n$ formado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ apresenta um conjunto de vetores com a forma:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{6}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \Re$, que são denominados combinações lineares de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Observe, ainda, que o vetor $[a, b]$ pode ser escrito como $a[1, 0] + b[0, 1]$ para qualquer vetor $[a, b] \in \Re$. Assim, podemos afirmar que qualquer vetor no espaço $\mathbf{R}^2$ pode ser escrito pela combinação linear de $[1, 0]$ e $[0, 1]$. Estes dois vetores são chamados de base canônica de $\mathbf{R}^2$, pois definem todos os vetores deste espaço vetorial. Podemos, então, representar o espaço vetorial em $\mathbf{R}^2$ como

$$\{[1, 0], [0, 1]\} = \mathbf{R}^2 \tag{7}$$

ou seja podemos dizer que $[1, 0]$ e $[0, 1]$ geram $\mathbf{R}^2$.

Da mesma forma, podemos dizer que o vetor $[a, b, c]$ em $\mathbf{R}^3$ pode ser definido pelos vetores $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$ que formam uma base canônica em $\mathbf{R}^3$. Por outro lado, podemos ter outras bases de $\mathbf{R}^2$. Por exemplo, considere a combinação linear:

$$[a, b] = \frac{(a + b)}{2}[1, 1] + \frac{a - b}{2}[1, -1] \tag{8}$$

assim, podemos afirmar que

$$\{[1, 1], [1, -1]\} = \mathbf{R}^2 \tag{9}$$

Podemos ainda verificar que o vetor $[a, b]$ em $\mathbf{R}^2$ pode ser gerado pela combinação linear de $a[1, 0]+b[0, 1]+0[1, 1]$ e, neste caso o vetor $[1, 1]$ é, ele mesmo, uma combinação linear de $[1, 0] + [0, 1]$. Assim, o conjunto $[1, 0], [0, 1], [1, 1]$ gera $\mathbf{R}^2$ mas possui um vetor redundante que é uma combinação linear dos outros dois. Este conjunto é, portanto, "linearmente dependente". O conjunto mínimo de vetores que formam uma base para gerar um espaço vetorial é, por outro lado, chamado de "linearmente independente". Podemos então definir base como:

Definição 2.2 *Se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ forem elementos de um espaço vetorial V em $\mathbf{R}^n$ eles formarão uma base para V se:*

1. *$v_1, v_2, \cdots, v_n$ geram V; e*
2. *$v_1, v_2, \cdots, v_n$ são linearmente independentes.*

2.2 Subespaços vetoriais

Um dos principais problemas na análise de sinais digitais é o fato de que nem sempre os sinais pertencem ao mesmo espaço vetorial. Cada sinal pode conter amostras de qualquer tamanho. Assim, ao lidar com sinais de diferentes tamanhos — por conseguinte, sinais de espaços vetoriais diferentes — podemos adicionar zeros a um determinado sinal para igualá-lo ao tamanho de outro. Por exemplo, imagine um sinal em $\mathbf{R}^8$ representado por $[1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0]$ (veja figura 3); se for necessário representar este mesmo sinal em um espaço $\mathbf{R}^{10}$ podemos adicionar zeros para obtermos o sinal $[1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 0]$ (veja figura 4). Neste caso podemos identificar sinal em $\mathbf{R}^8$ como um subconjunto do de $\mathbf{R}^{10}$, ou seja:

$$U = [a, b, c, d, e, f, g, h, 0, 0] \qquad |a, b, c, d, e, f, g, h \in \Re \tag{10}$$

Uma vez que U, na equação 10 é um espaço vetorial de $\mathbf{R}^{10}$ ele satisfará, automaticamente, todas as propriedades deste espaço. U é denominado subespaço de $\mathbf{R}^{10}$.

Assim, se V for um espaço vetorial, um subconjunto U de V será subspaço de V se:

Definição 2.3 *Seja V um espaço vetorial e U um subconjunto não vazio de V; se U é um espaço vetorial em relação às operações de V, dizemos que U é um subspaço de V, se:*

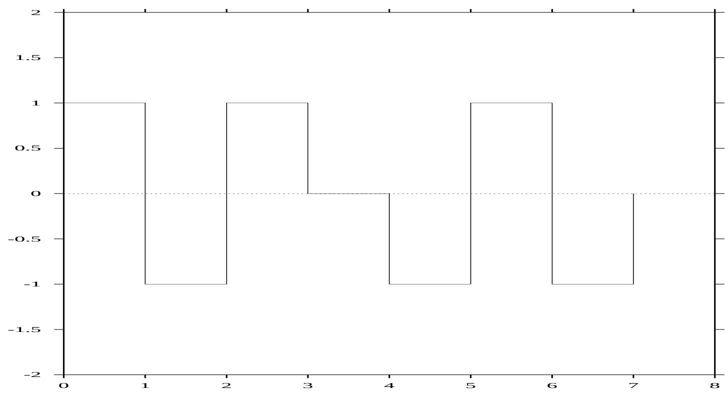

Figura 3: Representação gráfica do sinal $[1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0]$ em $\mathbf{R}^8$.

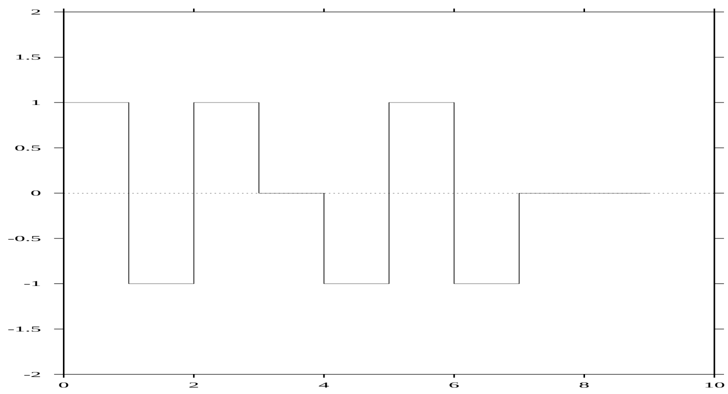

Figura 4: Representação gráfica do sinal $[1, -1, 1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 0]$ em $\mathbf{R}^{10}$.

1. $v + u \in U \qquad \forall v, u \in U$;
2. *Existe o elemento* 0 *em* U *tal que* $0 + u = u \qquad \forall u \in U$; *e*
3. $kw \in W \qquad \forall w \in W, \qquad k \in \Re$.

2.3 Produto interno ou produto escalar

Como já vimos, um sinal digital em $\mathbf{R}^n$ pode ser considerado com um conjunto de pontos ou vetores no espaço real n-dimensional. O tamanho de um sinal S em $\mathbf{R}^n$ pode ser medido pela distância do sinal até a origem, que é chamada de “distância euclidiana” e pode ser calculada pela norma $||S||$ do sinal. Por exemplo, seja $S = [s_1, s_2, \cdots, s_n]$, a norma do sinal é:

$$||S|| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2} \tag{11}$$

O produto escalar ou produto interno entre dois sinais $R = [r_1, r_2, \cdots, r_n]$ e $S = [s_1, s_2, \cdots, s_n]$ pode ser representado pela equação 12:

$$R \cdot S = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n \tag{12}$$

então, podemos escrever a equação 11 como:

$$||S|| = \sqrt{S \cdot S} \tag{13}$$

Sejam os sinais R, S e P em $\mathbf{R}^n$, o produto interno entre eles deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $R \cdot S = S \cdot R$ para quaisquer R,S;
2. $(R + S) \cdot P = P \cdot R + P \cdot S$ para quaisquer P,R e S;
3. $S \cdot S = 0$ se e somente se $S = 0$; e
4. $k(R \cdot S) = (kR) \cdot S = R \cdot (kS)$ para qualquer R e S e, ainda $k \in \Re$.

2.4 Espaços com produto interno

Considere, agora, o conjunto de todas as funções reais definidas no intervalo $[0, 1]$. Tal conjunto pode ser considerado um subspaço de $\mathbf{R}^2$ e para qualquer f, g podemos definir o produto entre elas como:

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt \tag{14}$$

A integral definida na equação 14 mostra que este produto também satisfaz as propriedades do produto escalar e é denominado “espaço com produto interno”.

O produto interno e a norma podem ser utilizados para o cálculo dos ângulos entre dois vetores, ou seja, o ângulo θ entre dois vetores não zero $\vec{r}$ e $\vec{s}$, representados pelos sinais R e S, pode ser medido por:

$$\cos\theta = \frac{R \cdot S}{||R|| \quad ||S||} \tag{15}$$

e pode ser demonstrado que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em um espaço com produto interno tem o ângulo θ entre eles calculado por:

$$\cos\theta = \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{||\vec{u}|| \quad ||\vec{v}||} \tag{16}$$

Se produto interno de dois vetores for zero ($\cos\theta = 0$) podemos dizer que o ângulo entre eles é de $\pi/2$ radianos e eles são chamados de “ortogonais”.

3 Harmônicos e ortogonalidade

O conceito de ortogonalidade é de suma importância no processamento de sinais digitais. Os sinais senoidais complexos, como é o caso dos sons de instrumentos, podem ser representados por uma soma de freqüências que são múltiplos inteiros da freqüência da senóide fundamental ou harmônicos. A senóides complexas com freqüências separadas por um múltiplo inteiro da fundamental são ortogonais, ou seja, seu produto interno interno é zero. Este fato pode ser usado para derivar a representação do sinal por séries de Fourier.

Referências

[1] BRIGHAM, E. O. **The Fast Fourier Transforms**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[2] KUC, R. **Introduction to Digital Signal Processing.**, McGraw Hill Book Co., New York, 474 pp., 1982.

[3] MOORER, J. A. “Signal Processing Aspects of Computer Music: A Survey.” *Proceedings of the IEEE*, vol. 65 n^o 8, August 1977, pp. 1108–1137, 1977.