Combinações Lineares de Vibrações Harmônicas Simples e Complexas

João Cândido Dovicchi
Wemerson D. Parreira
Laboratório de Música Eletroacústica
Núcleo Avançado de Computação Sônica e Multimídia
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia - MG - Brasil

Tech. Report

19 de Fevereiro de 2003

Resumo

Este relatório técnico aborda questões básicas das vibrações harmônicas simples e complexas. As bases teóricas contidas neste artigo são fundamentais para a compreensão dos fenômenos acústicos e do processamento digital de sinais de áudio (eletroacústica). Este documento apresenta uma introdução às combinações lineares de vibrações harmônicas simples e complexas e como podem ser analisadas por meio das funções de Fourier.

1 Som, vibração e ondas

1.1 Equação de Onda

Qualquer fenômeno sonoro pode ser descrito por funções ondulatórias e, dentre elas, a *equação de onda* é uma descrição matemática genérica para estes fenômenos.

A *equação de onda* é uma equação diferencial parcial que descreve todos os tipos de onda. Ela tem origem em qualquer fenômeno físico como vibração de cordas, ondas sonoras e ondas eletromagnéticas.

Uma onda que percorre uma distância em uma direção x em um tempo t pode ser representada em uma dimensão pela equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

para qualquer função onde a dependência em x e t apresenta solução na combinação $x \pm ct$, onde c é a velocidade de fase da onda. Assim, uma onda que se propaga na direção x para $x \in \Re^+$ a solução depende de $f(x - ct)$ e, no caso contrário ($x \in \Re^-$), de $f(x + ct)$. Logo, a solução genérica da equação de onda, tem a forma:

$$W(x,t) = \sum_n f_n(x + ct) + \sum_m f_m(x - ct) \tag{2}$$

No caso das ondas sonoras (senoidais), a solução da equação de onda pode ser obtida em relação à sua freqüência (ω_n) e pode ser escrita como:

$$W(x,t) = \sum_n A_n e^{\pm i(\omega_n/c)(x \pm ct)} \tag{3}$$

onde A_n é a amplitude da onda.

A equação 3 pode, também, ser expressa em função de senos e cossenos, ou seja:

$$W(x,t) = \sum_n \left\{ a_n \cos\left[\frac{\omega_n}{c}(x \pm ct)\right] + b_n \sin\left[\frac{\omega_n}{c}(x \pm ct)\right]\right\} \tag{4}$$

A solução particular para uma onda de índice $k_n = \omega_n/c$ pode ser expressa por:

$$W_n = a_n \cos(k_n x \pm \omega_n t) \qquad \text{ou} \qquad W_n = b_n \sin(k_n x \pm \omega_n t) \tag{5}$$

2 Combinações Lineares

O som, em geral, pode ser descrito como uma vibração complexa formada por diversas freqüências. A compreensão do fenômeno acústico depende de fundamentos teóricos matemáticos ligados aos espaços vetoriais. Assim, um dos principais conceitos necessários para o entendimento de vibrações harmônicas é o de combinações lineares.

Tomemos, por exemplo, um espaço V e um campo F qualquer. Se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ é um conjunto de vetores do espaço vetorial V, a combinação linear dos vetores

$\vec{v}_i \in V$ é um vetor $\vec{u}$ resultante da soma dos produtos de elementos do campo F com os vetores do espaço V, como dado pela equação 6.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i \tag{6}$$

onde a_i são elementos de F. Por exemplo, suponhamos um vetor $\vec{w}$ descrito como:

$$\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \tag{7}$$

onde $(a_1, a_2) \in \Re$. Dizemos que $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

2.1 Vibrações Harmônicas Simples

Em algumas situações, na acústica, o movimento de um corpo é uma combinação linear de vibrações induzidas separadamente de duas ou mais excitações harmônicas simples. É fácil demonstrar que o deslocamento de uma partícula se dá através da soma de seus deslocamentos resultantes de cada uma das excitações harmônicas parciais. A combinação de efeitos de vibrações individuais por adição linear é válida para a maioria dos casos em acústica. Em geral, a presença de uma vibração não provoca alteração em quantidade suficiente para interferir em outra vibração. Conseqüentemente, a vibração total pode ser obtida por simples superposição linear de vibrações individuais.

No caso da combinação de duas excitações que possuam a mesma freqüência angular[1] ω, se dois deslocamentos forem dados por:

$$x_1 = a_1 \cdot e^{j(\omega t + \phi_1)} \;\text{ e }\; x_2 = a_2 \cdot e^{j(\omega t + \phi_2)} \tag{8}$$

a combinação linear de $x_1 + x_2$ resulta em um deslocamento $a \cdot e^{j(\omega t+\phi)}$ onde:

$$a \cdot e^{j(\omega t + \phi)} = (a_1 \cdot e^{j\phi_1} + a_2 \cdot e^{j\phi_2})e^{j\omega t} \tag{9}$$

Podemos representar graficamente, como na fig. 1, o que torna fácil perceber a projeção de cada fasor[2] no eixo real e imaginário.

Como se pode perceber na figura,

$$a = \left[(a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2)^2 + (a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2)^2\right]^{1/2} \tag{10}$$

[1] A relação entre a freqüência em Hz e a freqüência angular em radianos por segundo é dada por: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

[2] Vetor de fase.

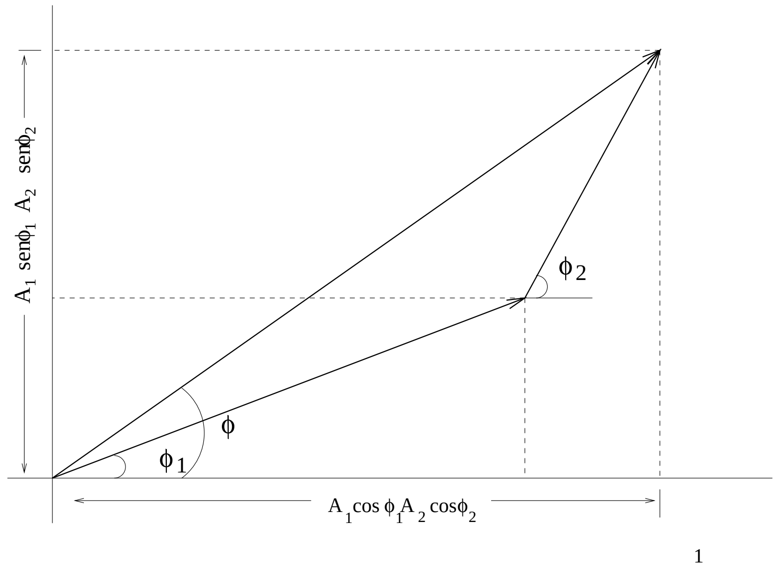

Figura 1: Combinação de fasores de dois Movimentos Harmônicos Simples com freqüência idênticas.

$$\tan\phi = \frac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2} \tag{11}$$

O deslocamento real ($x = a_1 x_1 + a_2 x_2$) é:

$$x = a\cos(\omega t + \phi) \tag{12}$$

onde a e ϕ são dados pelas equações 10 e 11. A combinação linear de duas vibrações harmônicas simples de freqüências idênticas produz uma vibração harmônica simples de mesma freqüência, com um ângulo de fase diferente e uma amplitude a tal que $|a_1 - a_2| \leq a \leq a_1 + a_2$.

Com a ajuda da figura 1, pode-se perceber que a adição de mais de dois fasores pode ser representada pelos segmentos encadeados, tomando-se seus componentes nos eixos real e imaginário. Assim, podemos escrever as equações 10 e 11 como:

$$a = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cos\phi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin\phi_k\right)^2\right]^{1/2} \tag{13}$$

$$\tan \phi = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \sin \phi_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k \cos \phi_k} \tag{14}$$

2.2 Vibrações Harmônicas de Freqüências Diferentes

A expressão matemática para o movimento de duas vibrações harmônicas simples com freqüências angulares diferentes é:

$$x = a_1 \cdot e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + a_2 \cdot e^{j(\omega_2 t + \phi_2)} \tag{15}$$

onde ω_1 é a freqüência angular de uma vibração e ω_2 da outra. Como o movimento resultante não é um harmônico simples, não podemos representá-lo em funções simples de seno e cosseno. Entretanto se a razão entre as duas freqüências angulares for um número racional mensurável, o movimento é periódico e a freqüência angular pode ser medida pelo máximo divisor comum (MDC) entre ω_1 e ω_2. Caso contrário o movimento é oscilatório não-periódico que nunca se repete[3], já que:

$$x = a_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_1} + \phi_1\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_2} + \phi_2\right) \tag{16}$$

A combinação linear de três ou mais vibrações harmônicas simples pode ser interpretada da mesma forma.

A combinação linear de duas vibrações harmônicas simples de freqüências angulares muito próximas pode ser facilmente interpretada. Consideremos $\omega_2 > \omega_1$ de um fator $\Delta\omega$ muito pequeno. Assim, a freqüência angular ω_2 pode ser escrita como:

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega \tag{17}$$

Então, o movimento combinado das duas vibrações pode ser descrito como:

$$x = a_1 \cdot e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + a_2 \cdot e^{j(\omega_1 t + \Delta\omega t + \phi_2)} \tag{18}$$

isolando-se $e^{j\omega_1 t}$ em ambos os membros, temos:

$$x = \left[a_1 e^{j\phi_1} + a_2 e^{j(\phi_2 + \Delta\omega t)}\right] \cdot e^{j\omega_1 t} \tag{19}$$

que pode ser expressa como:

[3]Sendo $\omega_1 = (2\pi t)/T_1$ e $\omega_2 = (2\pi t)/T_2$, se os valores de T_1 e T_2 forem incomensuráveis, o movimento harmônico não será periódico

$$x = a \cdot e^{j(\omega_1 t + \phi} \tag{20}$$

onde

$$a = \left[a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - \Delta\omega t\right]^{1/2} \tag{21}$$

e

$$\tan\phi = \frac{a_1 \sin\phi_1 + a_2 \sin(\phi_2 + \Delta\omega t)}{a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos(\phi_2 + \Delta\omega t)} \tag{22}$$

A vibração resultante pode ser tomada aproximadamente como um harmônico simples, com freqüência angular ω_1, mas com amplitude a e fase ϕ que variam levemente a uma freqüência de $\Delta\omega/(2\pi)$. No resultado auditivo, podemos perceber como um som *wawa* entre os limites $(a_1 + a_2)$ e $|a_1 - a_2|$. No caso de dois sons puros simultâneos de freqüência angular levemente diferentes, esta variação é percebida como uma pulsação da amplitude sonora.

Por exemplo, considerando um caso onde $a_1 = a_2$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$ a equação 21 se reduz a:

$$a = a_1(2 + 2\cos\Delta\omega t)^{1/2} \tag{23}$$

Entretanto, a faixa de variação da amplitude fica entre $2a_1$ e zero, o que acentua o fenômeno de pulsação. Neste caso o ângulo de fase é dado por:

$$\tan\phi = \frac{\sin\Delta\omega t}{1 + \cos\Delta\omega t} \tag{24}$$

2.3 Análise de Vibrações Complexas - Teorema de Fourier

A combinação linear de duas ou mais vibrações harmônicas simples de freqüência diferentes e mensuráveis produzem uma vibração complexa que tem como freqüência o máximo divisor comum das freqüências componentes. Assim, a função pode ser expressa através de uma série finita de harmônicos:

$$x = a_0 + a_1\cos(\omega t + \phi_1) + a_2\cos(2\omega t + \phi_2) + \cdots + a_n\cos(n\omega t + \phi_n) \tag{25}$$

o que pode ser escrito como:

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega t + \phi_n) \tag{26}$$

Qualquer função periódica $f(t)$, como é o caso das vibrações complexas, com um período T, pode ser expressa de forma exata (para um número finito de componentes) ou aproximada (para um número infinito de componentes) por uma série trigonométrica, como na equação:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{27}$$

onde a freqüência $\omega = 2\pi/T$.

De forma simples, o teorema de Fourier diz que qualquer função periódica pode ser expressa como a somatória de termos harmônicos simples, cujas freqüências são múltiplos integrais da periodicidade da função dada. Assim, podemos reescrever a série da equação 26 na forma da equação 27 como uma função de tempo $f(t)$:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t) \tag{28}$$

onde, multiplicando-se $f(t)$ por $\cos n\omega t$ ou $\sin n\omega t$ e tomando-se a integral de um período completo de $t = 0$ até $t = T$, os coeficientes A_0, A_n e B_n podem ser expressos como:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \ \ , \ \ A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega t dt \ \text{ e } \ B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega t dt \tag{29}$$

O grau de convergência na expansão de $f(t)$ depende, em geral, da continuidade da função e suas derivadas. As séries formadas por diferenciações sucessivas da equação 28 converge cada vez mais lentamente, mas continua convergente na representação aritmética dos coeficientes diferenciais de $f(t)$ enquanto finitas.

3 Transformadas de Fourier

A essência do cálculo da Transformada Rápida de Fourier (FFT) [1] é uma série de operações matemáticas conhecidas como Transformação Discreta de Fourier (DFT[4]) que é um conjunto m de variáveis no domininio da freqüência a partir de um conjunto n de amostras no domininio do tempo. A figura 2 ilustra um sinal $x(n)$ com N amostras em intervalos de T segundos. Para n variando de 0 a $N-1$, a duração do sinal é $t_\rho = N \cdot T$.

[4] *Discrete Fourier Transform*

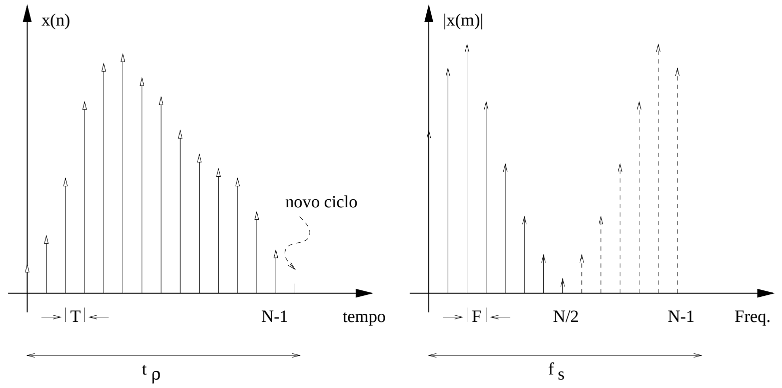

Figura 2: Amostragem em função do tempo e seu espectro (DFT). Modif. de Kuc [3].

A DFT de $x(n)$ é definida pela soma finita:

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n-1} x(n) \cdot W^{n \cdot m} \tag{30}$$

onde:

$$W = e^{\cdot \frac{-i2\pi}{N}} \tag{31}$$

A função $X(m)$ gera m variáveis no domininío da freqüência com incremento $F = 1/t_\rho$. Para $x(n)$ real com N amostras, um único espectro pode ser computado para $N/2$ pontos da freqüência. Na verdade, $X(m)$ é uma função periódica em m com N pontos em cada período, mas apenas $N/2$ são únicos.

Observando a definição da DFT, verifica-se que são necessárias cerca de N multiplicações e adições complexas para calcular o espectro de cada m em particular e, se forem calculados $N/2$ componentes espectrais, o número de computações para o cálculo de todo o espectro é da ordem de N^2. Como foi demonstrado por Cooley e Tukey [1] pode-se calcular esta transformada com um número de processos computacionais da ordem de $N \cdot log_2(N)$, o que poupa um grande esforço computacional. Este método é conhecido como Transformada Rápida de Fourier (FFT[5]).

Os algoritmos de DFT funcionam melhor quando o número de pontos da amostra é uma potência inteira de 2, ou seja: $N = 2^k$, onde k é um inteiro positivo. Um programa que utiliza DFT com a finalidade de análise espectral,

[5] Fast Fourier Transform

apresenta certas particularidades na relação entre a DFT e a transformada contínua de Fourier. Deve-se levar em conta que o tratamento matemático considera o sinal como se ele fosse periódico, embora, na realidade, o sinal pode não sê-lo no sentido matemático estrito.

Um algoritmo para o cálculo da DFT deve levar em consideração alguns fatores básicos. Se tomarmos $N = 2^k$, para k inteiro positivo, amostras em um período, e se T é o incremento entre cada amostra, então o período é $t_\rho = 2^k \cdot T$. O espectro obtido da DFT, também será periódico e conterá 2^k componentes espectrais. Entretanto, se a amostragem em função do tempo for real, pode ser demonstrado que metade dos componentes são coincidentes, logo apenas $N/2$ componentes espectrais complexos são significativos. Tais componentes são incrementados de $F = 1/t_\rho$; $m = 0$ corresponde à componente DC, $m = 1$ é a fundamental, $m = 2$ é o segundo harmônico etc.. Para se evitar a sobreposição espectral, a taxa de amostragem deve ser maior ou igual ao dobro da maior freqüência do espectro, ou seja, se a maior freqüência for f_m, o máximo intervalo entre as amostras deve satisfazer:

$$T < \frac{1}{2 \cdot f_m}, \tag{32}$$

de acordo com o **Teorema de Niquist** [3].

4 Aplicações

Basicamente, a transformada discreta de Fourier (DFT) é uma combinação linear em um vetor que contém $\log_2 n$ elementos e o transforma em um vetor $\{(1, 2^n) | n \in \Re\}$. Assim, a matriz da transformada inversa da DFT é a transposta da matriz original.

As transformadas são rotações, no espaço de uma função, de um dominínio para outro. Como a DFT usa funções senoidais como bases, estas bases são localizadas no dominínio da freqüência e podem ser analisadas por meio de espectros[6] que permitem isolá-las e calcular as suas respectivas distribuições de potência.

Assim, as transformadas de Fourier funcionam como um filtro de espectro, isolando cada componente do sinal periódico, sendo uma importante ferramenta para a análise de sinais sonoros, timbres de instrumentos acústicos ou eletroacústicos[7] e, pelo fato de serem funções ortogonais, podem ser usadas

[6] descrição da potência em determinado intervalo de freqüência.

[7] Timbres artificiais gerados eletrônicamente

para a construção de sinais complexos a partir do espectro conhecido.

Referências

[1] COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series." *Math of Computation*, vol. 19, pp. 297–301, 1965.

[2] KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B. e SANDERS, J. V. (1982). **Fundamentals of Acoustics**, 3^{rd} Ed., New York: John Wiley & Sons.

[3] KUC, R. **Introduction to Digital Signal Processing.**, McGraw Hill Book Co., New York, 474 pp., 1982.

[4] RAYLEIGH, J. W. S. (1945). **The Theory of Sound**, 2^{nd} Ed., New York: Dover Publications, Inc..