

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Sinval de Oliveira

Design de Um Ambiente Computadorizado Para Introdução à Aprendizagem de Álgebra

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Edla Maria Faust Ramos
Orientadora

Florianópolis, Fevereiro de 2001

Design de Um Ambiente Computadorizado Para Introdução à Aprendizagem de Álgebra

Sinval de Oliveira

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, na área de concentração *Sistemas de Conhecimento* e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Edla Maria Fasut Ramos, Dr. Eng. – Orientadora

Fernando A. Ostuni Gauthier, Dr. Eng. – Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Edla Maria Fasut Ramos, Dr. Eng. – Presidente

Mérciles Thadeu Moretti, Dr. Mat. – Examinador

Raul Sidnei Wazlawick, Dr. Eng. – Examinador

Dedicatória

*Ao Fernando e ao Maciel, homens simples, de trabalho,
que a vossa luz me guie e sustente sempre.*

Agradecimentos

A Deus.

A Professora Edla Maria Fast Ramos, por um sem número de lições,..., muito obrigado.

A minha companheira Vanize e nossas filhas, Vanessa, Gabriela e Marina, pela infinita felicidade,...

À Gisela por me receber tal qual seu filho.

Ao Professor João Bosco Manguiera Sobral, pelos esclarecimentos e oportunidades.

*Aos amigos, Bernd, Eros, Gentil, Gerson, Ghandi, Hélio, Janine, Maria Lúcia, Sobral, Walter, que **Deus** vos ilumine e sustente sempre.*

Ao companheiro Sandro, por compartilhar comigo a arte de construir “alpendres”.

Aos Professores do Curso o meu reconhecimento profissional.

As Secretárias Verinha e Valdete, pelas orientações sempre precisas.

Ao Curso de Pós – Graduação em Ciência da Computação pela oportunidade oferecida.

Agradecimentos

Educadora
Dedicada,
Luz
Amiga.

Mestre tua
Alma
Reluz um
Infinito
Alento.

“Feiticeira
Astuciosa”,
União
Sábia e
Transformadora de homens.

Reflexionante
Abstração
Mediadora
Objetivando
Saberes

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
1.1. JUSTIFICATIVA	11
1.2. PROBLEMATIZAÇÃO.....	15
1.3. HIPÓTESES	16
1.4. OBJETIVOS	17
2. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE ÁLGEBRA.....	18
2.1. OBSTÁCULOS COGNITIVOS PARA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA	21
2.1.1. <i>O Foco da Natureza Algébrica e a Natureza das Respostas</i>	21
2.1.2. <i>Notações e Convenções em Álgebra</i>	23
2.1.2.1. A Interpretação dos Símbolos pelos Alunos.....	23
2.1.2.2. A Necessidade de uma Notação Precisa	24
2.1.3. <i>Letras e Variáveis</i>	25
2.1.3.1. Letras em Álgebra.....	25
2.1.3.2. A Noção de Variável	26
2.1.4. <i>Como os Alunos Entendem a Aritmética</i>	26
2.1.4.1. As Convenções Aritméticas Interpretadas de Forma Equivocada.....	27
2.1.4.2. Métodos Heurísticos Utilizados pelos Alunos.....	28
2.3. PERSPECTIVAS PARA ÁLGEBRA.....	29
3. O COMPUTADOR NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES DE PIAGET, PAPERT, VYGOTSKY ENTRE OUTROS	41
4. TIPOS DE SOFTWARE.....	51
4.1. INTRODUÇÃO.....	51
4.1.1. <i>Tutorial</i>	51
4.1.2. <i>Tutores Inteligentes</i>	53
4.1.3. <i>Exercício e Prática</i>	53
4.1.4. <i>Jogos Educativos Computadorizados</i>	55
4.1.5. <i>Simulação</i>	56
4.1.6. <i>Micromundos</i>	58
4.2. FATORES DESEJÁVEIS PARA SOFTWARE EDUCATIVO.....	58
4.3. O USO DE COMPUTADORES E SOFTWARE NO ENSINO DE ÁLGEBRA : ALGUMAS POSSIBILIDADES JÁ IDENTIFICADAS.....	60
4.3.1. <i>Relacionando Funções e Seus Gráficos</i>	60
4.3.2. <i>Planilhas Eletrônicas no Ensino de Álgebra</i>	62
5. DESIGN DE UM AMBIENTE COMPUTADORIZADO PARA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA.....	65
5.1. DETALHANDO O AMBIENTE	74
6. CONCLUSÕES	86
BIBLIOGRAFIA	92

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: O uso de planilhas no ensino de álgebra	15
Figura 2: Situação-problema apresentado aos alunos.....	22
Figura 3: Situação-problema apresentada aos alunos que caracteriza a necessidade dos parênteses	27
Figura 4: Diagrama todo-parte.....	30
Figura 5: Atividade dos tanques	32
Figura 6: Desproporcionalidade do volume de água	33
Figura 7: Sugestão de notação	34
Figura 8: Esquema de mediação	42
Figura 9: Síntese das teorias do conhecimento aplicadas em ambientes informatizados.....	49
Figura 10: Perspectiva de Bruner aplicada em ambientes informatizados	50
Figura 11: Variações da função $y = x^2$	61
Figura 12: Variações da função $y = x $	61
Figura 13: Interface do Software MODELLUS	Erro! Indicador não definido.
Figura 14: Planilhas eletrônicas no ensino de álgebra	63
Figura 15: Síntese do processo de produção de significados	66
Figura 16: Foco de Módulo Construtor	70
Figura 17: Perspectiva de atuação do ambiente.....	73
Figura 18: Proposta de interface do "Módulo Construtor"	74
Figura 19: Proposta de interface do "Módulo teste"	74
Figura 20: Editar uma situação motivadora	75
Figura 21: Produção de significados no ambiente	76
Figura 22: Exemplo de comunicação no chat e evidência de necessidades particulares	76
Figura 23: Produção de duas justificações e introdução de notação	77
Figura 24: Produção de um novo núcleo e significados para uma expressão	78
Figura 25: Publicação do professor	79
Figura 26: Publicação do grupo C	80
Figura 27: Escolha da trajetória	81
Figura 28: Características das casas do jogo	81
Figura 29: Inserindo transformações no jogo	82
Figura 30: Definição dos jogadores	82
Figura 31: Definindo regras para o jogo	83
Figura 32: Dinâmica do jogo	84
Figura 33: Produção de significados numa aula tradicional de álgebra	86
Figura 34: Produção de significados na perspectiva de Lins e Gimenez	87
Figura 35: Produção de significados na perspectiva de um ambiente computadorizado	87

Resumo

Design de um Ambiente Computadorizado para Introdução à Aprendizagem de Álgebra

O presente trabalho apresenta um *design* de ambiente computadorizado para aprendizagem de álgebra. Os principais aspectos do mesmo serão apresentados a seguir.

Inicialmente o trabalho apresenta uma síntese que procura caracterizar a forma como tradicionalmente se dá o ensino de álgebra no ensino fundamental, bem como, as principais dificuldades encontradas pelos alunos no seu aprendizado, e logo após aponta-se uma perspectiva norteadora do trabalho, que caracteriza a álgebra como um processo de produzir de significados no interior de uma atividade.

Em seguida discute-se por um lado, as contribuições da psicologia cognitiva articulada com os computadores e a aprendizagem da álgebra, e por outro, apresentamos algumas experiências que caracterizam as potencialidades dessa tríade confluência (aprendizagem de álgebra – psicologia cognitiva – computadores). Destacam-se a utilização de softwares gráficos, que permitem aos alunos produzirem questões e conjecturas sobre uma determinada função “ f ”, que dificilmente emergem numa sala de aula convencional. Da mesma forma, as planilhas eletrônicas, revelam-se como ferramentas poderosas para a exploração de conceitos algébricos.

Por fim, apresenta-se o *design* de um ambiente computadorizado para aprendizagem de álgebra voltado para o ensino fundamental, que procura levar em consideração o conjunto de orientações identificadas. Dentre elas uma concepção de álgebra que consubstancia o trabalho cooperativo com os artefatos das novas tecnologias.

Abstract

Design of a Computerized Environment for Learning Algebra

This study presents a design of a computerized environment for studying algebra. Among the factors considered we highlight the following:

- A synthesis is presented that seeks to characterize the traditional manner of teaching algebra in elementary education, as well as the principal difficulties found by students. We then point to a guiding perspective for the study which characterizes algebra as a process for producing meaning within the interior of an activity.
- The contribution of cognitive psychology, used in conjunction with computers and the study of algebra is discussed. We present some experiences which characterize the potential of the confluence of these three elements. We exhibit how the use of software graphics allows students to produce questions and deductions about a given function "f", which would not likely emerge in a conventional classroom. Similarly, we indicate that electronic spreadsheets prove to be powerful tools for exploring algebraic concepts.
- We propose the design of a computerized environment for studying algebra aimed at elementary education, that seeks to consider all of the orientations mentioned. These include a conception of algebra that substantiates the benefits of work in conjunction with the tools of the new technologies.

1. INTRODUÇÃO

O propósito desse estudo é caminhar na perspectiva de uma articulação entre uma tríade confluência que se dá entre a matemática, a psicologia cognitiva e o uso das novas tecnologias da informação representadas aqui pelo uso dos computadores no processo educativo.

Esse trabalho consistirá de um lado em, investigar como as crianças aprendem ou constróem determinados conceitos matemáticos, em particular os algébricos, bem como apontar porque elas falham nessa tarefa e, por outro, em propor um design de um ambiente computadorizado para aprendizagem de álgebra que seja potencialmente rico em desencadear conflitos cognitivos e abstrações reflexivas, possibilitando assim melhores níveis de competências com linguagens, e a construção de conceitos ou o desenvolvimento de estruturas cognitivas.

É particularmente interessante propor o uso dos computadores como fonte de geração de situações significativas para a aprendizagem de álgebra, porque existem muitos professores de matemática que trabalham a álgebra de forma muito abstrata sem qualquer correspondência com situações concretas. Quando é introduzida a simbolização algébrica nota-se no ensino de matemática, uma verdadeira ruptura do progresso de certos alunos que pareciam até então, muito capazes por sua habilidade de lidar com operações aritméticas. A propósito Piaget já havia verificado em diversos casos que:

“o insucesso escolar em tal ou tal ponto decorra de uma passagem demasiado rápido da estrutura qualitativa dos problemas (por simples raciocínio lógicos, mas sem a introdução imediata das relações numéricas e das leis métricas), para a esquematização quantitativa ou matemática (no sentido das equações já elaboradas), usada habitualmente pelo físico”. [PIA, 1984 p.14].

Embora os computadores ainda não tenham se tornado uma ferramenta de domínio público, e portanto ainda não se encontrem amplamente disponíveis para a maioria das pessoas e escolas, as experiências escolares com o uso dos computadores tem indicado a hipótese de que ele pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, não só porque possibilita adaptar-se aos distintos ritmos de

aprendizagem dos alunos permitindo que os mesmos aprendam com seus erros, mas também porque pode atuar como um mediador entre as idéias e as formas mais elaboradas do pensamento.

1.1. Justificativa

No Brasil nos últimos tempos o ensino da matemática está numa situação de crise permanente. Em todos os graus de ensino o insucesso na disciplina atinge índices preocupantes.

Um número crescente¹ de alunos não gosta de matemática, não entende para que serve estudar matemática, não compreende verdadeiramente a sua relevância e mesmo muitas boas notas conseguidas por eles são devidas a uma maior adaptação ao estilo das lições oferecidas.[PIA, 1979]. Cabe salientar que muitas destas lições apenas focam a manipulação da linguagem matemática em detrimento do desenvolvimento conceitual. Ou seja, mesmos bons resultados nem sempre significam qualidade de aprendizado de matemática.

Dentre os fatores que contribuem de forma negativa para esse quadro destacamos:

- A falta de políticas educacionais efetivas: que acabam atuando como uma bola de neve, tornando gritante o descontentamento dos professores quanto a melhores salários e condições de trabalho.
- A formação profissional qualificada: muitas vezes os professores não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação apoiam a sua prática efetiva de sala de aula quase que exclusivamente nos livros didáticos, os quais não necessariamente são de boa qualidade.
- Desconhecimento de concepções pedagógicas: abordagens pedagógicas tais como a modelagem matemática, etnomatemática e resolução de problemas, ainda são desconhecidas por grande maioria dos professores, de tal forma que quando incorporada a prática de sala de aula, aparecem como itens isolados desenvolvidos paralelamente como aplicação de aprendizagem.

¹ Dados estatísticos podem ser observados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) Caderno de matemática pp22-23.

Alguns desdobramentos dos dois últimos itens podem ser percebidos no ensino de matemática e em particular no ensino de álgebra da seguinte forma:

- legítimo ato de pensar algebricamente é escondido do aluno, o professor é o único a conhecer a dinâmica desse processo, com isso, guarda para si o caminho produtivo das descobertas, das conjecturas, das frustrações inerentes à construção da solução de um problema considerado, a forma como toma decisões que facilitam a solução de um problema proposto. O papel do aluno é semelhante ao de uma testemunha, a contemplar uma solução eficiente, sem dúvidas e obstáculos, "elegante", como dizem alguns matemáticos. Portanto passa despercebido para o aluno que os matemáticos não sabem resolver um problema antes de tentar, às vezes, com muito esforço. [TRI, 1996], [D'AM, 1988]
- Outra consequência negativa advém de uma interpretação limitada das abordagens pedagógicas, como se dá por exemplo em relação a história da matemática. A utilização de alguns livros paradidáticos por alguns professores, faz os alunos acreditarem que a geometria, a álgebra e toda a matemática enfim, foram criadas por grandes "gênios", que por via exclusivamente da lógica, obtinham teoremas e demonstrações impecáveis. Daí dois fatos podem decorrer, o primeiro deles consiste em que a matemática acaba tornando-se um padrão de avaliação dos alunos, pois os mesmos sentem-se diminuídos e até mesmos humilhados por não raciocinar dessa forma "tão brilhante", ou seja, a percepção que o aluno acaba incorporando é aquela que a matemática só pode ser acessível a algumas mentes privilegiadas. O segundo, caracteriza-se por uma forma de validar culturalmente o primeiro, pois os professores, os orientadores educacionais, a escola, a família acabam rotulando o aluno de incapaz. Uma expressão comum nos conselhos de classe que evidencia esse fato é a seguinte: "Ele é fraquinho mesmo, não é professor !!!".

O ressentimento, a frustração, e a incapacidade gerada pela matemática não se restringe a ela mesma, acaba pois, atingindo outros domínios, como podemos ver em Ramos:

"a relação que a matemática tem com a tecnologia, estende o seu estigma a todas as áreas tecnológicas. O sentimento de incapacidade para aprender gerado pela matemática está presente, portanto, na relação que as pessoas tem com todos os artefatos da tecnologia. Desmistificar o uso da tecnologia, passa, portanto, por desmistificar a própria matemática." [RAM, 1994 p.108].

Os obstáculos que delineamos aqui, explicam em grande parte o desempenho insatisfatório dos alunos revelado pelas altas taxas de retenção em matemática, sendo que, o que nos preocupa ainda mais, é o fato da matemática atuar como um filtro social, não só no ensino fundamental, mas por toda a vida.

A sociedade do futuro, cada vez mais voltada para a aprendizagem, para as tecnologias de informação e para a acelerada divulgação de conhecimentos científicos, não pode limitar-se a uma escola de "hábitos milenares baseada no falar ditar do professor" [LÉV, 1993], mas deverá nortear-se para o desenvolvimento do indivíduo em todas as suas manifestações, para o acesso a cultura geral e para o desenvolvimento de aptidões, e neste sentido o computador é uma ferramenta extremamente potente para atingir estes objetivos de forma integrada na medida em que, promove transformações na escrita, leitura, nas formas de comunicação e representação e por outro, funciona como uma fonte geradora de conflitos cognitivos que possibilita a articulação e ampliação dos esquemas operatórios do indivíduo.

Nesse sentido já é possível perceber alguns aspectos positivos com relação a utilização de ambientes informatizados na aprendizagem de matemática onde o computador é utilizado como uma ferramenta a ser ensinada.

O exemplo mais conhecido desse tipo de abordagem é o software LOGO. Um ambiente onde o computador assume o papel de aprendiz, oferecendo uma ótima oportunidade para as crianças entenderem não só como interagir com o micromundo, mas também, são obrigadas a considerar seus experimentos como meio de resolver conflitos entre a teoria e prática e idéias matemáticas, sendo compelidos a se manterem atualizados de tal forma que, "nutrem novas expectativas com respeito ao ensino em geral e ao de matemática em particular" [D'AM, 1988]. D'ambrosio relata ainda que, infelizmente parece haver disponíveis poucos software desse tipo, que tenha algum interesse matemático a exemplo do LOGO.

Seymour Papert, um dos inventores da linguagem LOGO, descreve que para dominar o micromundo da tartaruga, a qual a máquina dá acesso, as crianças eram

constantemente obrigadas a corrigir e retificar os procedimentos de maneira que “pensavam como haviam pensado, tornando-se epistemólogos, o que poucos homens no mundo fizeram, a exemplo de Jean Piaget”. [PAP, 1982].

Para Lévy o modo como as crianças manipulavam e se comunicavam no software LOGO é entendido da seguinte forma:

“assim é que sua própria maneira de proceder, o caminho de seu pensamento, torna-se o objeto da reflexão da criança, como os procedimentos são imediatamente testados ante seus olhos, desenvolveu-se em sua mente uma eficaz interação entre a intuição e formalização. Esta não é mais sentida como uma obrigação abstrata (daí o horror a matemática), adquire seu sentido como meio de controle sobre o computador.” [LÉV, 1998 p.29].

Outros programas, como as planilhas eletrônicas (como por exemplo o EXCEL), que não guardam na sua concepção a especificidade de ser um ambiente de aprendizagem, podem constituir-se numa fonte significativa para a apropriação de conceitos algébricos não só elementares como também alguns mais sofisticados. É o que pretendemos caracterizar a seguir.

A metáfora das planilhas eletrônicas surgiu das necessidades dos contabilistas e alguns desses software mais vendidos, levam em consideração que o usuário talvez não seja capaz de falar em regras algébricas em termos de “ x e y ” ou convenções de nomes de células como **A3**, **C8**, **F5**. Eles capacitam o usuário a indicar valores na planilha como parte de fórmulas da seguinte maneira: "some este número àquele e ponha a resposta aqui ". Este pensamento pode ser transmitido para o software apontando-se para as células com o mouse ou cursor . Terminados os cálculos o usuário pode repetir as operações para outras células como em um modelo matemático. Desta forma o programa lida com a conceitualização do problema em termos abstratos, e o usuário em termos de um caso específico deixando ao programa a tarefa de generalização.

A título de ilustração, vamos considerar o problema de encontrar aproximações das raízes de uma equação polinomial apresentado por Maxim e Verhey (In: idéias da álgebra.). Uma técnica usualmente empregada consiste em usar um processo iterativo que produz sucessivamente intervalos cada vez menores, de forma a encontrar que em cada um deles se verifique a mudança de sinal do polinômio. É possível prosseguir esse processo até se obter um valor com grau desejado de precisão.

A figura1 apresenta a resolução da seguinte equação polinomial $x^3-2x^2+x-1=0$ empregando a planilha eletrônica EXCEL. São utilizados valores inteiros para determinar os extremos dos intervalos de mudança de sinal. A seguir usa-se essa informação para determinar um novo ponto inicial e um novo incremento. Neste caso particular o próximo passo seria utilizar 1,0 como ponto inicial e 0,1 como incremento.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1					Extremo do intervalo		$X^3-2*(X^2)+X-1$			
2					0		-1			
3	Ponto inicial		0		1		-1			
4	Incremento		1		2		1			
5					3		11			
6					4		35			
7					5		79			
8					6		149			
9					7		251			
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										
23										
24										

Figura 1: O uso de planilhas no ensino de álgebra

O momento nos parece adequado para propor a utilização das novas tecnologias da informação para aprendizagem de álgebra a medida que se reconhece as potencialidades emergentes e os desafios que os computadores vem suscitando na nossa sociedade.

1.2. Problematização

O design de um ambiente computadorizado para a aprendizagem da álgebra está situado sob a articulação entre uma tríade confluência que se dá entre:

- Conteúdo específico de matemática, no caso, a álgebra, e as principais dificuldades encontradas pelos alunos durante o seu aprendizado.

- A contribuição da psicologia cognitiva que preconiza como se dá os processos de apropriação e desenvolvimento cognitivos.
- O papel das novas tecnologias da informação, representadas aqui, pelo uso dos computadores como tema central desta pesquisa.

Desta forma alguns questionamentos podem ser suscitados, dentre eles:

1. Quais as contribuições dos ambientes informatizados para o processo educativo?
2. De que forma os computadores podem atuar como um elemento significativo para aprendizagem da álgebra?
3. Quais os benefícios cognitivos que os computadores podem desencadear?

1.3. Hipóteses

Nossas hipóteses constituem-se uma tentativa de articular algumas questões importantes que estão sendo consideradas, e o seu enunciado emerge uma perspectiva norteadora para esta pesquisa e não necessariamente algo que deve ser ou não comprovado. Assim temos:

- A utilização dos artefatos da tecnologia, em particular o computador pode contribuir para o processo de aprendizagem da álgebra se tornar uma atividade mais rica e prazerosa proporcionando então aos alunos uma visão mais ampla da atividade algébrica desenvolvendo atitudes positivas diante de seu estudo.
- Se o trabalho em ambientes de aprendizagem computadorizados oportuniza novas formas de interação e uso de novas linguagens icônico-gráficas gerando novas formas de representações, então sua manipulação pode gerar habilidade e competência no uso de sistemas simbólicos. Essa competência poderia ser transferida para outras situações gerando assim a promoção de um aprendizado mais facilitado da álgebra.

1.4. Objetivos

- Descrever de forma sucinta como se dá o ensino de álgebra no ensino fundamental procurando entender quais são os indicadores do insucesso dos alunos no seu aprendizado.
- Apresentar um referencial teórico que justifique a utilização dos computadores como uma ferramenta de potencialidade para aprendizagem de álgebra.
- Propor um design de um ambiente computadorizado para aprendizagem da álgebra a partir do referencial teórico apontado de forma a justificá-lo pedagogicamente.

2. Algumas Considerações Sobre o Ensino de Álgebra

“Antes de começar quero lavar-me da suspeita de ingratidão para com meus mestres. O ensino que critico é tanto aquele que ministrei como o que recebi”. [REVUZ apud TRI 1996 p.14].

Subjacente a cada modo ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de matemática, de educação, de homem e de mundo. Educadores como Freire, Machado, D’ambrosio entre outros, evidenciaram uma forte vinculação entre a forma como vemos e entendemos a matemática e o modo como entendemos e praticamos o seu ensino. Portanto se desejamos inferir ou promover mudanças no processo educativo devemos entender tal qual Becker que preconiza *“refletir primeiramente, sobre a prática pedagógica da qual o docente é sujeito. Apenas, então apropriar-se de teoria capaz de demonstrar a prática conservadora e apontar para construções futuras”.* [BEC, 1993 p. 332].

Deste modo apresentaremos primeiramente de forma sucinta, dois pontos que estão, em geral, orientando o cotidiano escolar dos professores de matemática, para posteriormente inventariarmos a forma como norteiam particularmente o ensino de álgebra. São eles:

- Organização dos conteúdos: de modo geral observa-se uma forma excessivamente hierarquizada. É uma organização dominada pela idéia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da matemática. Nessa perspectiva, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo seria um pré-requisito para o que vai sucedê-lo.
- O uso precoce e exclusivo do formalismo: tem vinculado uma matemática destituída de significado para o aluno, de tal forma que queima etapas necessárias a estruturação do pensamento do mesmo. O recurso quase exclusivo no simbolismo faz com que os alunos aprendam, em geral, apenas representações das idéias, tornado-se manipuladores de símbolos em situações padronizadas, mas lhes falta compreensão dos significados matemáticos presentes nessas situações, o que os

torna incapazes de resolverem problemas que se afastem dessas situações-modelo. Desta forma, a preocupação excessiva com as apresentações formais, obscurece o que há de mais importante na atividade algébrica que é na nossa percepção a produção de significados.

Tradicionalmente o ensino de álgebra tem início na sexta série , quando as letras são apresentadas como substitutas de números, surge assim uma nova linguagem que tenta traduzir em símbolos matemáticos idéias da forma didática:

- O triplo de um número: $3x$ [GIO, 1992]
- A soma de dois números é 15: $x + y = 15$ [GIO, 1992]

E em seguida, rapidamente, apresenta o conceito de variável como incógnita para resolução de equações e de sistemas a serem aplicados em problemas tradicionais tais como:

$$\bullet \begin{cases} X + Y = 15 \\ X - Y = 1 \end{cases} \quad [\text{GIO, 1992}]$$

Nesta série, o trabalho é dirigido às equações, as letras são apresentadas pelos alunos como um valor numérico que é desconhecido apenas num momento para ser determinado após alguns cálculos.

Além disso, são apresentadas apenas equações ou sistemas que tem sempre solução e uma única solução. Então na verdade, neste caso, a variável "não varia", é um valor numérico momentaneamente desconhecido e único.

No estudo das inequações após um trabalho enfático com incógnitas, os alunos se preocupam apenas com os sinais $>$ (maior) $<$ (menor) sem perceber que se trata de outra questão, e assim, tratam as inequações como se fossem equações incorrendo em erros freqüentes como por exemplo: se $-x < 3$ então $x < -3$.

E como o ensino enfatiza a resolução isolada sem qualquer contextualização, passam despercebidas a interpretação e a utilidade das inequações.

Na sétima série, a abordagem sofre uma metamorfose, quando as letras passam a ser reduzidas a " marcas no papel," e o objetivo é de ensinar as regras da álgebra, isto é, as regras que permitem a manipulação dos símbolos algébricos, que são os sinais da aritmética: $+$ $-$ $\times$ $\div$ $()$ $[]$ $\{ \}$

Lins descreve que, "tradicionalmente, a álgebra escolar é vista como uma generalização da aritmética, mais ainda, esta é vista como concreta (e portanto mais fácil) e aquela como abstrata (e portanto mais difícil)".[LIN, 1997].

Quase na sua totalidade o trabalho nesta série é considerado abstrato e difícil, tanto para os alunos como os professores. Visto que o conteúdo é apresentado numa seqüência rígida de regras que precisam ser aprendidas numa certa ordem, pois acredita-se que cada uma delas depende das anteriores. Assim só trabalhamos fatoração depois das operações entre monômios e polinômios, e as equações fracionárias após as equações mais simples e todas as regras de fatoração e frações algébricas.

- *E quando iremos aplicar tudo isso professor?*
- *Bem, na oitava série existem as chamadas equações do segundo grau,...*
- *Meu irmão me falou, tem contas dessas aí que enche uma folha de caderno...*

O fato é que este distanciamento no tempo, entre as regras de manipulação e suas aplicações gera a idéia de que a álgebra da sétima série é apenas uma linguagem que não serve para nada, o que resulta na simples memorização por curto espaço de tempo e conseqüentemente, baixa aprendizagem. Assim quando as regras são retomadas nas séries seguintes elas são lembradas como fragmentos de informação que levam quase sempre ao erro.

Na oitava série o trabalho é retomado com incógnitas em equações literais, equações do 2º grau, biquadradas , para quase ao final desta série (terceiro bimestre) apresentarmos a idéia de função. Só então que, neste momento a variável é apresentada com toda a sua força, isto é, como substituta de vários possíveis valores de uma grandeza relacionada com outra. No entanto isto também passa despercebido pelos alunos que apresentam grande dificuldade em aceitar expressões da forma " $y=2x+1$ " ou " $y=x^2-4x+5$ ", pois, após o trabalho insistente com incógnitas, elas parecem a muitos deles como uma equação literal ou apenas uma equação em se apressam a calcular o discriminante.

Como podemos observar o trabalho com álgebra é apresentado de forma fragmentada e destituída de significado para o aluno, enfatizando ora um aspecto ora outro, sem se preocupar com a ligação entre eles e com sua contextualização, ignorando totalmente a formação da idéia básica da álgebra que é o conceito de variável em suas

múltiplas formas: incógnita, parâmetro e variável propriamente dita. Na seção seguinte procuramos aprofundar estas e outras questões subjacentes a aprendizagem de álgebra.

2.1 Obstáculos Cognitivos para Aprendizagem de Álgebra

Com a perspectiva de entender por que a apropriação da álgebra constitui-se numa tarefa cognitiva árdua, a pesquisadora australiana, Lesley Booth tentou identificar os tipos de erros que os alunos usualmente cometem nessa matéria, bem como a natureza das razões desses erros. O projeto de pesquisa que trabalhou, levado a efeito no Reino Unido de 1980 a 1983, envolveu estudantes de treze a dezesseis anos de idade que vinham estudando álgebra no contexto de um programa de matemática integrado desde a sétima série.

Os resultados apontaram erros semelhantes, a despeito das diferenças de idade e experiência em álgebra, e as entrevistas com os alunos que cometiam esses erros, evidenciaram que muitos destes podiam ter origem nas idéias dos alunos sobre aspectos como:

- “O foco da natureza algébrica e a natureza das respostas”;
- “O uso da notação e da convenção em álgebra”;
- “O significado das letras e das variáveis”;
- “Os tipos de relações e métodos usados em aritmética”. [BOO, 1995]

2.1.10 O Foco da Natureza Algébrica e a Natureza das Respostas

O objeto da atividade em aritmética é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Já na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma simplificada e geral, muitos alunos não percebem isso e acreditam que devem dar uma resposta numérica. Observe o exemplo da seguinte figura:

2.1.2 Notações e Convenções em Álgebra

2.1.2.1 A Interpretação dos Símbolos pelos Alunos.

Outro obstáculo que os alunos tem de superar para simplificar expressões como “ $2a+3b$ ”, relaciona-se com a interpretação do símbolo operatório. Em aritmética símbolos como “ $+$ ” e “ $=$ ” são usualmente interpretados em termos de ações que devem ser efetuadas, de tal forma que “ $+$ ” significa efetivamente realizar a operação, e “ $=$ ” significa escrever a resposta. Booth assinala que, uma interpretação como essa parece não se restringir às crianças das séries iniciais, é o que mostraram os estudos realizados por Kieran e Wagner, no contexto do estudo das equações, onde os estudantes consideraram o sinal de igual de forma *unidirecional* que precede uma resposta numérica.

A dicotomia do símbolo de *adição* para indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, e também a do sinal de *igual* como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para escreva a resposta, pode ser percebida facilmente pelo aluno, embora essas duas noções sejam necessárias para a compreensão da atividade algébrica. A forma restrita de se ler o símbolo operatório é também uma característica subjacente ao dilema *nome - processo* já apresentado.

Situações como “ $2a+3b$ ”, a ação efetiva associada ao símbolo de adição é, na maioria dos casos, juntar os termos, resultando daí “ $5ab$ ” como resposta, pode parecer normal se comparado com as primeiras idéias de adição, as quais estavam diretamente associadas a união física de dois conjuntos. Por outro lado, a justaposição de termos presente em algumas formas típicas da matemática, de forma explícita ou implícita como nas frações mistas e no valor posicional respectivamente, pode motivar os alunos a conjecturar que em álgebra, aconteceria de forma equivalente.

As sugestões apresentadas por Booth foram três. A primeira, articula às idéias associadas ao significado dos símbolos de operações de igualdade que as crianças adquirem durante suas primeiras experiências aritméticas. Assim, é preciso evidenciar para as crianças que “ $2+3$ ” não representa apenas uma *instrução*, “somar 2 com 3”, mas também o *resultado da adição desses números*. Uma possibilidade é fazer por exemplo, a leitura da expressão não apenas como 2 mais 3 ou some 2 com 3, mas também “*o número que é 3 mais que 2*”. Analogamente para caracterizar o valor

bidirecional do símbolo de igualdade, tanto se exigindo a leitura adequada do símbolo (por exemplo “*igual a*” em vez de “*dá*” como em *2 mais 3 dá 5*), outra forma é proporcionar aos alunos experiências com material de Cusinare apresentando expressões da forma $5 = 2+3$ ou $1+4 = 2+3$.

A Segunda sugestão apresentada por Booth, apesar de bem intencionada, é geradora pelos menos em parte de conflitos com as propostas apresentadas por Lins para álgebra e aritmética. Quando Booth refere-se à maneira de representar a multiplicação em álgebra por justaposição evidenciando tendência aparentemente forte das crianças verem isso como uma soma em vez do produto (ou como valor posicional) sugere que sua introdução deveria ser retardada e que o produto deveria ser escrito na forma completa por um período considerável da fase de iniciação dos alunos em álgebra. Mesmo depois de introduzir a forma abreviada, poderá ser conveniente continuar escrevendo o produto também na forma extensa, pelo menos no começo.

Terceiro, é que a forma didática apresentada por alguns professores “duas maçãs mais 3 bananas” para o problema “ $2a+3b$ ” pode não ser conveniente. Ela não só favorece uma visão errada do significado das letras, como também pode ser usada pelos alunos para justificar a simplificação “ $5ab$ ”. Assim, na pesquisa realizada, o número de alunos que apoiaram-se nessa metáfora para explicar por que “ $2a+3b$ ” é igual a “ $5ab$ ” foi o mesmo que usaram para explicar por que “ $2a+5b$ ” não podia ser mais simplificado.

2.1.2.2 A Necessidade de uma Notação Precisa

Apontamos anteriormente que o uso precoce e exclusivo do formalismo tem vinculado uma matemática destituída de significado para o aluno, de tal forma que queima etapas necessárias a estruturação do pensamento do mesmo.

Desta forma Booth, não só vem exemplificar, como também esclarecer o que pensamos que seja precoce neste caso, e por outro lado, apresentar uma necessidade da atividade algébrica quanto ao registro de afirmações. Booth argumenta que em aritmética faz pouca diferença um aluno registrar $12/3$ ou $3/12$, desde que efetue corretamente os cálculos de acordo com o contexto, já em álgebra, essa diferença entre p/q e q/p não pode ser vista da mesma forma.

Encontramos os seguintes argumentos que justificam esses equívocos:

- *“Essa visível falta de rigor pode refletir uma desatenção nas aulas de matemática às afirmações verbais corretas e precisas das idéias matemáticas”.* [BOO, 1995]

Observe o exemplo da figura abaixo:

Acreditamos que esse argumento não seja totalmente válido como dificuldade cognitiva, pois a atenção do aluno pode estar voltada para outros aspectos que se explorados de forma conveniente, poderiam desencadear objetos de estudos mais interessantes tanto do ponto de vista aluno como do professor.

- *“Inversões livre de expressões como “ $12/3$ e $3/12$ ” pode muitas vezes ter raízes em experiências anteriores do aluno em aritmética. Alguns alunos acham que a divisão, como a adição, é comutativa”.* [BOO, 1995]

Aqui é que reside o que tentávamos dizer, pois se aluno conjectura e levanta hipóteses de comutatividade por exemplo, no nosso ponto de vista já está envolvido numa atividade algébrica, o que precisamos entender é que nem sempre a sala de aula, constitui-se num ambiente propício para testar hipóteses e reconhecer a necessidade quanto a forma de registro entre outras coisas.

- *“Alguns alunos não vêem necessidade de distinguir as duas formas, acreditando que o maior número sempre deverá ser dividido pelo menor”.*[BOO, 1995]

Está interpretação parece decorrer da abordagem metodológica do professor de matemática, no início do aprendizado da divisão, priorizando experiência com problemas que exigem que o número maior seja dividido pelo menor, em detrimento de algumas situações até bem conhecidas das crianças, como a divisão de um bolo em partes iguais.

2.1.3 Letras e Variáveis

2.1.3.1 Letras em Álgebra

A experiência que os alunos adquirem em aritmética com letras é que, estas usualmente de alguma forma guardam alguma relação com o contexto do problema, como por exemplo a letra “*m*” pode ser utilizada para representar “metros”, mas não para representar “número” de metros, como em álgebra. Booth assinala que a confusão decorrente dessa mudança de uso pode resultar numa “falta de referencial numérico”, por parte do aluno, ao interpretar o significado das letras em álgebra, como em alguns

casos onde os alunos, atribuíam significado para “ y ” na expressão “ $3 + 5y$ ” como algum objeto que necessariamente começasse com a letra “ y ”.

Outra característica apresentada pelos sujeitos da pesquisa é a leitura das letras variáveis como “rótulos”, que muitas vezes pode parecer correta. Por exemplo, talvez seja difícil distinguir uma leitura da afirmação “ $A = b \times a$ ”, como versão resumida da afirmação verbal “*Área = base x altura*”, da leitura da mesma afirmação como relação entre as medidas ou variáveis adequadas. O acerto aparente da leitura literal da afirmação algébrica desse exemplo pode encorajar o aluno a proceder do mesmo modo com termos do tipo “ $5y$ ”.

2.1.3.2 A Noção de Variável

Reconhecer que uma variável é uma letra que representa um ou mais números é necessário que os alunos tenham em sua formação uma base cognitiva que lhes dê alicerce, pois mesmo quando aqueles que interpretam as letras como representações de números, apresentam uma forte tendência em considerar que as letras representam valores específicos únicos como em “ $x+3=8$ ”, e não números genéricos como em “ $x+y = y+x$ ou $A = b \times a$ ”. Essa também é uma característica que tem sua origem na experiência aritmética, onde os símbolos representam quantidades que sempre significam valores únicos. Portanto, talvez não seja de estranhar que as crianças tratem esses novos símbolos da mesma forma.

Um dos problemas decorrentes dessa visão das letras é que os estudantes muitas vezes assumem que as letras diferentes devem necessariamente representar valores numéricos diferentes. Assim Booth fez vários registros de alunos que entendem que a expressão “ $x+y+z$ ” nunca poderá ser igual a “ $x+t+z$ ”, mesmo com alunos que de alguma forma já haviam entrado em contato com a função linear “ $y = x$ ” argumentavam que: “*isso é gráfico, não é álgebra!*”

2.1.4 Como os Alunos Entendem a Aritmética

Muitas das questões descritas por Booth até aqui foram analisadas sob a ótica das diferenças entre aritmética e álgebra. Porém, a álgebra não é isolada da aritmética, [BOO, 1995], [LIN, 1997], na verdade é, em muitos aspectos, a “aritmética

generalizada²”. Booth entende que nisso está a fonte das dificuldades pois, “para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro de um contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado”.

2.1.4.1 As Convenções Aritméticas Interpretadas de Forma Equivocada

Uma possível forma pela qual as idéias aritméticas dos alunos podem influenciar no seu desempenho é quanto ao uso dos parênteses. Os alunos geralmente não usam parênteses, porque acham que a seqüência escrita das operações determina a ordem em que os cálculos serão efetuados. Além disso, muitos alunos acham que o valor de uma expressão permanece inalterado mesmo quando muda a ordem dos cálculos. Como no exemplo a seguir: **$18 \times 27 + 19$** ou **$27 + 19 \times 18$**

Uma outra visão é de que o contexto a que está ligada a expressão escrita determina a ordem dos cálculos, conforme aponta Booth com exemplos semelhantes a:

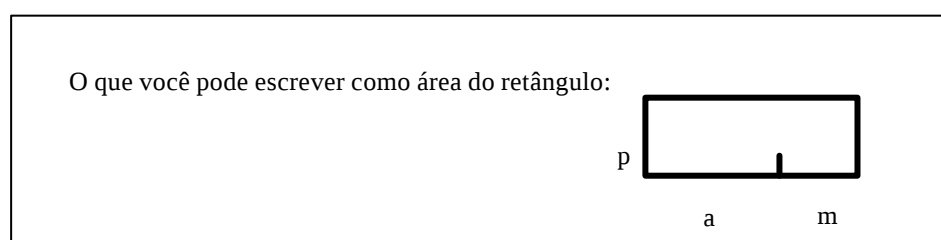


Figura 3: Situação-problema apresentada aos alunos que caracteriza a necessidade dos parênteses

Nesses exemplos, os resultados demonstraram que se ignora a necessidade de parênteses. Consequentemente, escrevem-se incorretamente expressões algébricas que necessitam de parênteses, por exemplo, [**$p \times a + m$** em vez de **$p \times (a + m)$**], o que pode acarretar outros erros quando a expressão é simplificada como, (**$p \times a + m$** poderá ser reescrita, erradamente nesse contexto, como **$pa + m$**). Nesse caso o erro é fruto menos de concepções algébricas erradas do que de uma visão incorreta da representação aritmética.

² Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. USISKIN, Zalman. In as idéias da álgebra.

2.1.4.2 Métodos Heurísticos Utilizados pelos Alunos

O uso de métodos heurísticos em aritmética pode também ter implicações na performance do aluno para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em álgebra. Por exemplo, se um aluno geralmente não determina o número total de elementos de dois conjuntos de, digamos 35 e 19 alunos utilizando a noção de adição $35+19$, mas resolve o problema utilizando o processo de contagem, então é pouco provável que o número total de elementos de dois conjuntos de x e y elementos seja representado por $x+y$. Neste caso, a dificuldade não está tanto em generalizar a partir do exemplo aritmético, mas ter um procedimento adequado, e uma representação desse procedimento em aritmética, para a partir dele fazer uma generalização inicial. Assim se os alunos tem de aprender (e usar) os procedimentos mais formais, primeiro devem perceber a necessidade deles. Isso segundo Booth requer:

- *“Que o professor reconheça que os alunos podem dispor de um método heurístico para um dado tipo de problema”;*
- *“Que o valor desse método heurístico para a resolução de problemas simples seja reconhecido e discutido”;*
- *“Que as possíveis limitações dos métodos sejam consideradas, simplesmente tentando-se usá-lo em problemas de mesma espécie, porém mais difíceis.*
- *“Sugere-se que desse modo do aluno poderá reconhecer a necessidade de um procedimento mais geral (isto é , formal)”.*
- *“Deve-se procurar meios de ajudar os alunos a desenvolver uma compreensão do próprio procedimento formal”.[BOO, 1995]*

As considerações e exemplos advindas da pesquisa realizada por Booth podem servir para nos lembrar que, algumas idéias aparentemente simples nem sempre são tal qual podem parecer aos olhos dos adultos. Um mapeamento contínuo na direção do aprendizado de novos tópicos de matemática sob novos domínios, acompanhado por uma análise criteriosa dos erros cometidos pelos alunos e de suas causas, podem proporcionar instrumentos extremamente úteis para decidir sobre os meios de ajudar as crianças a melhorarem sua compreensão da matemática. Cabe aos professores darem passos que puderem para implementar esses esforços. Espera-se que as sugestões feitas aqui possam ir, de alguma maneira, ao encontro dessas necessidades.

2.3 Perspectivas para Álgebra

Nesta seção, apresenta-se uma síntese do trabalho realizado pelos pesquisadores Rômulo Campos Lins e Joaquim Gimenez, publicado pela editora Papirus, com o seguinte título: “*Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*”.

Para realizar esta discussão optou-se por iniciar, em meio às múltiplas questões presentes, por dois pontos que se sobressaem, para poder de alguma forma, vislumbrar o caminho fecundo desta proposta. São eles:

- Os autores examinam algumas características do processo de produção de significados para a álgebra e aritmética, na perspectiva de identificar o modo como estes processos se relacionam, o que lhes permite preconizar que “*é necessário começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra*”. [LIN, 97p.10]. Justamente o contrário da leitura de Booth, apresentada na seção anterior.
- Os autores tematizam a proposta explicitando a sua concepção de atividade algébrica e álgebra, que ampliam as interpretações, as possibilidades e os propósitos para uma educação matemática, propondo uma nova forma para o “conhecimento”. Esta assume a característica de um par ordenado, constituído por uma “*crença-afirmação*” e uma “*justificação*”, em oposição a uma visão tradicional de que o conhecimento seria estritamente proposicional.

Na busca do estabelecimento de uma ponte comum, coexistente com a álgebra e a aritmética, de tal forma que permita repensá-las de forma única, os autores apresentam que o educador russo Davydov formulou um importante aspecto, com relação a atividade algébrica: esta tem seu ponto de partida na atividade de lidar com relações “*quantitativas*”.

A contribuição que esta afirmação estabelece é que para uma criança resolver o mais simples dos problemas “*aritméticos*” precisa lidar de forma tematizada ou não, com relações “*quantitativas*”. Um exemplo será conveniente para esclarecer e nortear novas questões:

Exemplo 1: “diz-se a uma criança de 7–8 anos, que, em um estacionamento, há carros e caminhões, num total de 13 veículos, e que os carros são 5. Quantos são os caminhões?”[LIN, 97 p.114].

A criança resolve por algum método, contagem, algoritmo escrito, ou de forma heurística apoiada por um diagrama, como na figura³ abaixo, e nos diz que são 8 caminhões;

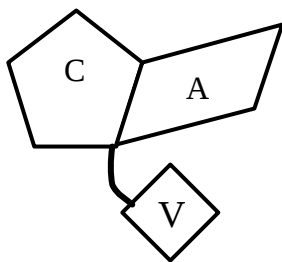


Figura 4: Diagrama todo-parte

o que indica duas conclusões:

- A criança de alguma forma articulou a relação geral “*todo-parte*”, pertinente ao problema;
- A “*lógica da operação*” realizada, é uma lógica de “*todo e partes*”.

Esta segunda não é vista como redundante, pois para os autores é enfatizado que “*toda operação é realizada segundo uma lógica, e que é essencial investigar essas lógicas se queremos entender as formas de pensar de nossos alunos*”. [LIN, 97p.114].

Neste exemplo reside o princípio de uma atividade desenvolvida por Davydov, onde o ponto chave é **falar**, e o que passa a interessar é aquilo que possa ser dito de forma genérica, assim podemos juntar carros e caminhões e escrever:

$$C + A = V$$

Uma justificação para isto pode ser o diagrama anterior, continuando podemos escrever ainda:

$V - C = A$, se do todo retiramos os carros, sobram os caminhões e analogamente:

$$V - A = C .$$

Os pontos considerados relevantes desta atividades são apresentados da seguinte forma:

- Se a notação não for sugerida pelos alunos, é conveniente que o professor o faça, bem como o diagrama, ou outra forma heurística apresentada, deixando clara as suas intenções, no sentido que os alunos trabalhem com elas, e que de alguma forma as utilizem para expressar coisas.
- As expressões “ $C + A = V$, $V - C = A$ e $V - A = C$ ”, são entendidas por Davydov como relações “*quantitativas*”, e a aceção atribuída é que “C”, é compreendida pelas crianças como simplesmente “carros” e não “número de carros”, o que particulariza a situação. O fato que permite as crianças produzirem significados para aquelas expressões é que carros e caminhões podem ser juntados e separados. Essa é a “*lógica das operações*”.
- Existe um “*núcleo*” em relação ao qual os significados são produzidos, no exemplo, o “*núcleo*” é constituído pelo diagrama “*todo-parte*”, estabelecendo uma relação entre as “*afirmações*” - $C + A = V$, $V - C = A$ e $V - A = C$ -, pois foram produzidas com relação ao mesmo “*núcleo*”, imprimindo um caráter de “*legitimidade*” das mesmas quando reportadas ao núcleo.
- Os livros didáticos, em geral apresentam problemas como o do estacionamento da seguinte forma:

Exemplo 2: “*Num estacionamento há 5 carros e 8 caminhões. Quantos veículos estão estacionados?*”

Esta abordagem fundamenta-se no pressuposto que há uma hierarquia de dificuldade nos problemas aditivos, desta forma o exemplo 1, só seria abordado depois que fosse dominada a solução do exemplo 2. Lins e Gimenez argumentam que segundo Davydov esta dificuldade hierárquica dos problemas aditivos, caso exista, é bem mais fraca do que parece sugerir as abordagens tradicionais, pois uma vez explicitada a afirmação “ $C + A = V$ ”, para a qual se produziu significado em relação ao núcleo de *todo-partes*, as outras põem-se em jogo.

De acordo com o ponto chave elaborado por Davydov, a atenção dos alunos dirige-se de forma natural conforme “*falamos*” sobre o problema. Assim se o foco é

³ Estamos denotando **V** para veículos, **C** para carros e **A** para caminhões.

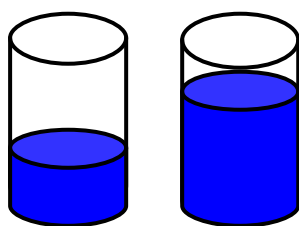
quantidades específicas é razoável que os alunos se voltem para ela e da mesma forma, se falamos de uma situação genérica.

Bruner de forma análoga, destaca que a fala de um indivíduo que resolve um determinado problema caminha no sentido de explicitar “o novo”. Assim, enquanto resolvemos um problema, “falamos” as coisas que estamos tentando compreender ou descobrir, mas silenciemos as coisas que tomamos como certas, como dadas. O *insight* que esta comparação permite e leva a afirmar que, “*enquanto a atividade de resolver problemas tem seu foco no novo, a tematização da lógica das operações tem seu foco exatamente no dado. Essa perspectiva que estabelece definitivamente, nossa afirmação de que a atividade algébrica e aritmética acontecem juntas embora em planos diferentes*”. [LIN, 97p.122].

Na percepção dos autores o que parece ter escapado a Davydov é que relações quantitativas podem ser tratadas em relação a muitos tipos diferentes de núcleos. Assim vamos apresentar um exemplo de atividade desenvolvida por eles que, apoia-se na idéia de falar, mas leva em consideração os significados sendo produzidos. A atividade é denominada “tanques” e o seguinte texto é apresentado aos alunos:

Estes dois tanques são iguais.

O que você pode falar sobre essa situação?



Para encher o tanque da esquerda são precisos mais 9 baldes. Para encher o tanque da direita, são precisos mais 5 baldes. [LIN, 97p.124].

Figura 5: Atividade dos tanques

Os alunos são desafiados a falar sobre o assunto, enunciando uma “*crença-afirmação*”⁴, isto é, algo que acreditam que é correto e uma “*justificação*” que torna legítima a primeira por exemplo:

C-A₁ - “*No da direita há mais água do que no da esquerda*”

Podemos imaginar, de imediato, pelo menos duas justificações:

J_1A – “Podemos ver no desenho”

J_1B – “Porque falta mais para encher o tanque da esquerda (9 baldes do que para encher o da direita (apenas 5 baldes)”.

Considerando apenas a afirmação, podemos concluir que nos dois casos as pessoas tem o mesmo “conhecimento”, por outro lado se considerarmos também as justificações, percebemos elementos distintos: em J_1A podemos dizer que são objetos visuais, o que o domina é a percepção do desenho, ao passo que no segundo caso os objetos são a água em cada tanque e baldes (de água).

Outro ponto que é importante perceber é que a lógica das operações é distinta em cada caso, basta pensar na seguinte crença afirmação:

$C-A_2$ – “Se acrescentarmos dois baldes de água no tanque da esquerda, ainda assim vai haver menos água do que da direita”.

É possível produzir uma justificação similar a J_1B :

J_2B – “Se acrescentarmos dois baldes de água no tanque da esquerda, vão ficar faltando 7 baldes para enchê-lo, e no da direita apenas 5 baldes”.

Mas uma justificação completamente similar a J_1A seria no mínimo embaraçosa, pois não queremos introduzir novos objetos de maneira disfarçada para fazer possível uma estimativa. O desenho pode ser muito impreciso, mais um diagrama do que uma representação realista da situação, que nesse caso poderíamos chegar algumas conclusões bastante estranhas. Observe na figura abaixo:

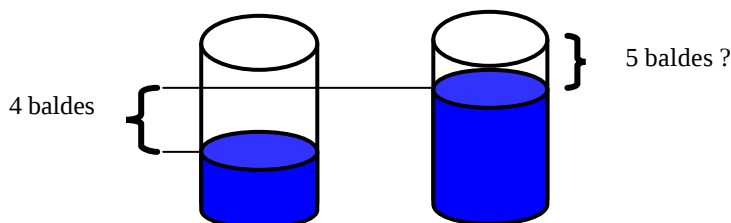


Figura 6: Desproporcionalidade do volume de água

⁴ Estamos usando o “C” para indicar uma “crença-afirmação” e o “J” para “justificação”.

A atenção aqui é voltada para os seguintes pontos:

- É possível produzir significados distintos para uma mesma crença afirmação, o que mostra a necessidade de conhecer esses significados.
- A produção de significados envolve núcleos e lógicas das operações realizadas; no caso, temos um núcleo constituído por um desenho como representação realista de uma situação e outro constituído por certas relações dados no texto apresentado – com ou sem o papel relevante do desenho como diagrama.

Quanto a notação, os autores descrevem que não houve maiores dificuldades, sendo que alunos da 6ª série designaram “x e y” para representar as quantidades de água e “b” para baldes.

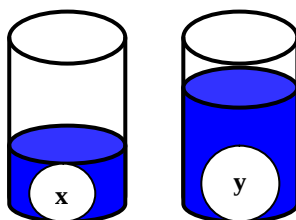


Figura 7: Sugestão de notação

Depois de introduzida essa notação, as crenças-afirmações C-A₁ e C-A₂ podem ser escrita como:

C-A₁ – “ $x < y$ ”

C-A₂ – “ $x + 2b < y$ ”

Alunos de 6ª série não apresentam dificuldades nesse passo, o que se realiza na verdade, é apenas a legitimação desse tipo de notação nessa atividade, pois na perspectiva de Davydov, a introdução dessa notação pelo professor é correta, uma vez que um dos objetivos importantes é que os alunos tornem-se capazes de produzir significado para esse tipo de texto.

O passo a seguir, e que diferencia a proposta dos autores com relação a de Davydov, é introduzir e explorar **outro** modo de produzir afirmações corretas sobre os tanques, e mostrar que esse outro modo é distinto do anterior, no qual significados eram produzidos em relação ao núcleo da situação dos tanques. Este passo era introduzido da seguinte forma pelos autores:

“Como podemos descrever um processo pelo qual passamos diretamente⁵ da expressão “ $x + 4b = y$ para a expressão $y - 4b = x$?”

Alguns alunos disseram que *“foram retirados 4 baldes de cada lado”*. Porém este tipo de justificação nos leva de volta aos significados produzidos em relação ao núcleo dos tanques, e não é esse o foco da atividade. Para por em destaque dois modos distintos de produzir significado, volta-se a tarefa de produzir crença afirmações, mas agora os alunos são desafiados a produzir duas justificações: uma em relação ao núcleo dos tanques e outra em relação à transformação direta de alguma crença afirmação já estabelecida. Por exemplo:

C-A₃ – *“ $y - 4b = x$ ”*

Teríamos:

J₃A – *“se retirarmos 4 baldes de cada lado de y, ficarão faltando 9 baldes do lado direito, que é o mesmo que falta do lado esquerdo”*.

J₃B – *“basta retirar 4b de cada lado de $x + 4b = y$ ”*.

Há muitas outras crenças afirmações que surgem sem dificuldade:

C-A₄ – *“ $y - 2b = x + 2b$ ”*

Com a seguinte justificação,

J₄A – *“Se retiramos 2 baldes de Y ficarão faltando 7 baldes do lado direito e, se adicionarmos dois baldes a X ficarão faltando 7 baldes também”*.

Ou

J₄B - *“Basta retirar 2 baldes de cada lado de $x + 4b = y$ ”*.

⁵ Este diretamente reflete o fato de que, os alunos já tinham produzido significado para cada uma das expressões “ $x + 4b = y$ ” e “ $y - 4b = x$ ”, em relação ao núcleo dos tanques, e aqui foi omitido pois trata-se de uma síntese .

Podemos perceber que são sempre justificações diferentes para mesma crença afirmação, e portanto, são diferentes *‘conhecimentos’*. Mas podemos questionar por exemplo, em relação a que núcleo foi produzido o significado gerado por, por exemplo, J₄B? O núcleo é exatamente o que se constitui no momento em que a propriedade *“tirar o mesmo dos dois lados gera uma nova expressão correta”* é aceita como válida. Daí decorre dois pontos importantes:

- *“ é a intervenção legítima do professor que abre a possibilidade de constituir um novo núcleo, um processo que deve ser negociado com os alunos, isto é, eles devem ver como legítimo operar em relação a esse novo núcleo, e nisso o papel do professor – como autoridade e como interlocutor- é fundamental”.*
- *“segundo aspecto , e que torna possível o processo indicado no ponto anterior, é que as expressões que serão objeto das transformações já são objetos, isto é, já se produziu algum significado para elas. Esses significados foram produzidos em relação ao núcleo- familiar – dos tanques, “ familiar” deve ser entendido no sentido que os alunos já tinham recursos para operar naquele domínio, e o que se introduziu foi a legitimidade daquele modo de pensar naquela atividade”.*[LIN, 97p.131].

A proposta tem continuidade, a medida que os alunos são capazes de produzir significados para aquele tipo de expressões de dois modos distintos, e admitem que as transformações diretas de expressões constituem uma – entre outras – forma de se produzir novas expressões corretas. Antes de tematizar a proposta os autores buscam explorar algumas possibilidades “técnicas” das transformações diretas principalmente por acreditarem que elas parecem mais razoáveis no contexto de nossas salas de aula hoje.

O procedimento adotado consiste em ocupar os alunos com processos de antecipação e transformação, isso quer dizer, dar aos alunos *“pontos de partidas”* e *“alvos”*, e pedir que encontrem uma transformação adequada para:

“Que transformação leva “ $x+2b = y-2b$ em $x= y-4b$ ” [LIN, 97p.135]

Ou a mais complexa,

“Transforme “ $y - x = 4b$ em uma expressão do tipo $b=...$?”[LIN, 97p.135]

Vamos apresentar a tematização da proposta dos autores, começando pela concepção de atividade algébrica e também de álgebra:

“A atividade algébrica consiste no processo de produção de significado para a álgebra”.

“A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”. [LIN, 97p.137]

A primeira consideração apresentada pelos autores diz respeito a forma como atividade algébrica é caracterizada, por um lado dependente de conteúdos na medida que um “recorte de mundo”, é explicitado ou seja, a pessoa que examina a atividade a classifica ou não como algébrica de acordo com os significados produzidos, o que não é necessariamente o recorte da matemática acadêmica. Por outro lado, dizer se isto ou aquilo é ou não álgebra, do ponto de vista epistemológico, não parece que seja relevante.

O que particularmente nos chama atenção para essa forma de caracterização, é que é necessário investigar os significados que estão sendo produzidos no interior da atividade algébrica, o que significa dizer que, o recorte do que seja álgebra não serve apenas para identificar atividades que podem, potencialmente envolver pensamento algébrico, mas identificar os significados divergentes dos oficiais, não sendo tratados como erros nem vistos apenas do ponto de vista da falta, o que torna uma perspectiva comum tanto para onde aluno está quanto para onde queremos que o aluno esteja.

Da perspectiva dos autores, faz-se necessário uma reformulação do que é entendido por conhecimento. Não só abrindo mão das abordagens contemporâneas de que a natureza do conhecimento seja “proposicional”, bem como as que defendem que a noção central do conhecimento é a “compreensão”, mas apresentado solução para dois grandes problemas dessas abordagens, que são: i) se uma certa proposição é verdadeira; e ii) se a pessoa que a enuncia tem “direito” de “ter esse conhecimento”, isto é, a necessidade de evitar que uma pessoa “tenha conhecimento por acaso”. Vamos apresentar a nova noção de conhecimento, e depois mostrar de que forma os ela resolve esses problemas segundo os autores:

“Conhecimento = (Crença–afirmação, Justificação)[LIN, 97p.141].

Um exemplo:

“ $K_1 = (2+3=5, \text{ se junto dois dedos com três dedos, tenho cinco dedos})$, é um conhecimento”.

“ $2+3=5$ ” é a crença–afirmação; “ Se junto dois dedos com três dedos, tenho cinco dedos” é a justificação. A justificação é, nessa formulação, parte integrante de conhecimento, e não apenas uma “explicação” para ele, e “conhecimento é o par, (CRENÇA-AFIRMAÇÃO, JUSTIFICAÇÃO) e não apenas a proposição na qual o sujeito acredita, e cuja crença afirma.”[LIN, 97p.142]

Dois aspectos garantem que a formulação de conhecimento apresentada não cria um “vale-tudo”, e ao mesmo tempo resolve os problemas apontados acima, são eles; “a natureza social do conhecimento e os mecanismos de inserção em práticas sociais” e a “existência de limites epistemológicos”.

O primeiro aspecto nos diz que, todo conhecimento é produzido na direção do outro, o que quer dizer que o sujeito que o produz deve acreditar que alguém compartilha com ele aquela justificação. Portanto, o problema de se estabelecer se uma pessoa tem ou não tem o direito de ter um conhecimento é um problema interno do processo de produção do conhecimento, e não externo: é a própria enunciação da crença afirmação que estabelece sua legitimidade, e não uma deliberação posterior.

O segundo é próprio processo de produção de significados que estabelece limites “internos”; não é possível por exemplo produzir significado para equação $3x+100 = 10$ em relação a um núcleo de balança de dois pratos. Essa impossibilidade chamada de “limite epistemológico”, e sua existência está na base de um grande número de impasses na sala de aula.

Nesse modelo de “conhecimento”, a “crença–afirmação” correspondente ao que é novo, enquanto que a “justificação” corresponde ao que é dado. Justificações determinam um vínculo entre “crenças–afirmações” e “núcleos”, que são um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais significado está sendo produzido. Um diagrama, um desenho, uma balança, um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), uma situação realista ou ficcional, podem constituir um núcleo. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido o significado.

Núcleos não se referem especificamente a “conteúdos”, ou a “áreas do conhecimento”. Em relação a um mesmo núcleo de balança de dois pratos, por exemplo, é possível produzir significado para uma equação, para a noção de justiça ou para fenômenos físicos diversos.

O termo “*significado*” que ocupa uma posição central nas perspectivas dos autores assume a característica de ser o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o “que efetivamente se diz” no interior de uma atividade. Produzir significados é então, falar a respeito de um objeto. Na atividade dos tanques, primeiro, fala-se dos tanques e de baldes de água, e então são esses os objetos, mas depois passa-se a falar das expressões, e então, os objetos são as expressões.

Os pontos que emergem mostrando que há delicados fatores a considerar com relação a produção de significado segundo os autores são:

- a) *“A atividade em questão, e também a tarefa que a origina”;*
- b) *“Os significados sendo produzidos – e, portanto, o núcleo ou núcleos em jogo”;*
- c) *“O possível processo de transformação dos núcleos, e as possíveis rupturas na direção de novos modos de produção de significado”;*
- d) *“Os textos sendo produzidos – notações, diagramas, escrita, fala, gestos e sua eventual constituição em objetos”;*
- e) *“O papel do professor como interlocutor”;*
- f) *“Os alunos como interlocutores uns dos outros”;*
- g) *“Interlocutores não presentes”;*
- h) *“A existência de certos modos de produção de significados que queremos que os alunos dominem”;*
- i) *“A existência de certas afirmações que eles venham a assumir como corretas”.* [LIN, 97p.146]

Na percepção dos autores as abordagens tradicionais em educação matemática (muitas nem tão tradicionais) tomam o ponto (i) como sua preocupação exclusiva, ou tão central que é como os outros aspectos não existissem.

Neste momento a proposta de Lins e Gimenez permite concluir que a educação algébrica tradicional tem uma visão pequena e pouco abrangente do processo de aprendizagem da álgebra, e por outro, fornece alguma luz sobre as questões apontadas por Booth. Em poucas palavras pode-se dizer que na educação da álgebra é preciso considerar também o fato de qualquer aspecto técnico só poder ser desenvolvido

se, “*ao modo de produção de significado que o sustenta, o aluno confere legitimidade*”[LIN, 1997p.160]. Portanto a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de uma atividade, e não apenas, em termos de técnicas e conteúdos como em outras abordagens.

A reformulação da noção de conhecimento proposta pelos autores tem consequências profundas para a educação matemática, tanto ao sugerir dimensões até aqui não percebidas dos processos de produção de significados na sala de aula como também, no papel de desenvolvimento de instrumentos para a resolução de problemas e para processos investigativos dentro e fora da matemática.

3. O Computador na Educação Matemática: Contribuições de Piaget, Papert, Vygotsky Entre Outros

O objetivo desse capítulo é de responder alguns questionamentos levantados na nossa problematização, onde procuramos promover uma articulação entre a matemática, a psicologia cognitiva e o uso dos computadores no processo educativo, bem como apresentar argumentações que possam incorporar nossas hipóteses onde, os computadores podem atuar como catalizadores na relação concreto X abstrato.

A literatura atual com relação a utilização das novas tecnologias da informação no processo educativo tem preconizado os seguintes indicadores entre outros:

- Como auxiliar do processo de construção do conhecimento, o computador dever ser usado como uma máquina a ser ensinada. [PAP, 1994], [VAL, 1998].
- O Computador pelo seu potencial, de interatividade, de geração de micromundos, de visualização, de cálculo, onde podem coexistir aspectos lúdicos e de interesse prático, é um dos instrumentos poderosos que atualmente os educadores matemáticos possuem para consubstanciar a aprendizagem. [D'AM, 1988], [PAP, 1994].

Vamos refletir sobre estes indicadores valendo-se de alguns conceitos enunciados por Piaget, Vygotsky, Papert, Bruner, entre outros messias, procurando apresentar elementos que contribuam para os propósitos acima explicitados.

Um conceito central para compreensão da teoria de Vygotsky sobre o funcionamento psicológico é o conceito de mediação, o qual acreditamos ser um primeiro elo de ligação com a nossa problematização. Podemos dizer que, mediação em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação. Assim a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento.

Vygotsky (1991 p.45) argumenta que " o processo simples de estímulo - resposta é substituído por um ato complexo, mediado que representamos da seguinte forma:

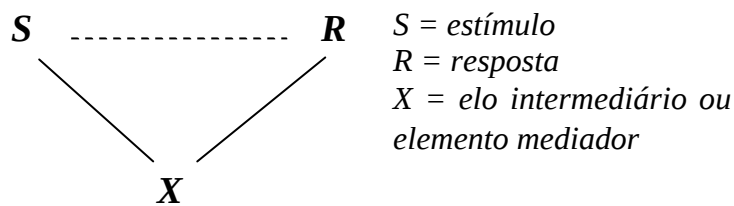


Figura 8: Esquema de mediação

Assim para Vygotsky a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas fundamentalmente mediada, de tal forma que as funções psicológicas superiores apresentam uma estrutura de ligação entre o homem e o mundo real, as quais ele tratava como mediadores, sendo compreendidos como ferramentas auxiliares da atividade humana.

De acordo com Vygotsky existem dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos e os signos. Embora exista uma certa analogia entre os dois tipos de mediadores, eles tem características distintas e portanto merecem ser abordados separadamente.

Instrumentos: Em qualquer atividade o homem constrói instrumentos para estabelecer mediações. O instrumento é um elemento interposto entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza.

Foi Papert que na década de 60 apontou a possibilidade dos computadores constituírem-se num elemento mediador da aprendizagem quando disse que ensinaria programação para as crianças pequenas, apesar da indiferença e ceticismo de alguns colegas de trabalho, que talvez enxergassem os computadores de uma forma estreita e limitada e portanto menor do que aquela que um lenhador tem sobre o machado.

Signos: De forma análogo ao papel de um instrumento no trabalho, o signo age como um instrumento da atividade psicológica, sendo chamado por Vygotsky de "instrumento psicológico". Os signos são orientados para o próprio indivíduo, para dentro do sujeito dirigindo-se ao controle de ações psicológicas, ou seja no próprio sujeito. Essa característica Vygotsky chamou de "ação reversa".

Apesar de que na sua forma mais elementar o signo poder ser considerado uma marca externa, que auxilia o homem em tarefas como a memória e a atenção é justamente com a utilização dessas marcas externas que mudanças qualitativas vão

ocorrer, transformando essas em processos internos de mediação, onde organizam os signos em estruturas cada vez mais complexas e articuladas.

No decorrer do processo de desenvolvimento, o indivíduo deixa de necessitar de marcas externas e passa a utilizar signos internos, isto é, representações mentais que substituem os objetos do mundo real.

A possibilidade dos computadores desencadearem relações mediadas pelos signos internalizados, ou mesmos novas formas de representações é evidenciado por Lévy da seguinte forma:

"A mediação digital remodela certas atividades cognitivas fundamentais que envolvem a linguagem, a sensibilidade, o conhecimento e a imaginação inventiva. A escrita, a leitura, o jogo, e a composição musical, a visão e a elaboração de imagens, a elaboração de imagens, a concepção, a perícia, o ensino e aprendizado, reestruturados por dispositivos técnicos inéditos, estão ingressando em novas configurações sociais". [LÉV, 1998 p.17].

Portanto a influência ativa do mediador, seja ele, pai, mãe, amigo, professor ou o uso das novas tecnologias da informação é determinante para a expansão das funções cognitivas, tanto das crianças, como dos jovens em geral.

Outro conceito enunciado por Vygotsky intrinsecamente ligado ao de mediação é o conceito de desenvolvimento, o qual também possui implicadores com a nossa problematização. De acordo com Vygotsky o desenvolvimento é:

"um processo dialético complexo caracterizado pela periodicidade, desigualdade no desenvolvimento de diferentes funções, metamorfose ou transformação qualitativa de uma forma em outra, embricamento de fatores internos e externos e processos adaptativos que superam os impedimentos que a criança encontra". [VYG, 1991, p.83].

Quando consideramos o desenvolvimento, a apropriação e a interiorização de instrumentos proporcionados pelos artefatos da tecnologia, em particular os computadores como mediadores, a aprendizagem fica dependente justamente da qualidade e da estratégia proposta pelo mediador.

Portanto saber suscitar processos cognitivos é uma característica da aprendizagem humana, processos esses, que só são ativos nas situações de interação, pois segundo Vygotsky é da dinâmica interativa que emergem as funções psicológicas superiores.

Dessa forma, o elo entre a nossa problematização e a ótica do desenvolvimento preconizado pode ser enunciado como:

“a criação de uma situação imaginária pode ser considerada como meio de desenvolver o pensamento abstrato”. [VYG, 1991, p.118].

Paralelamente Papert assinalava que:

*“outras áreas do conhecimento em transição epistêmica, é até mesmo mais brutal para as crianças, e nas quais **uma máquina que fornecerá um contexto para suavizá-la** está muito mais a mão. Uma destas áreas é a matemática.”* [PAP, 1994, p.?]. (grifo nosso).

Outra forma de perceber uma articulação entre a matemática, a psicologia cognitiva, e os computadores é sob o olhar de Papert e Vygotsky da seguinte forma:

Vygotsky ao formular a lei genética do desenvolvimento diz que:

“Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica.” [VYG apud MOY, 1997. p28].

Acreditamos que Papert materializou este conceito, isto é, deu-lhe forma digital quando apresentou a linguagem LOGO. Em outras palavras Papert diz que:

“O problema central para a educação matemática é encontrar meios para valer-se da vasta experiência da criança em matemática oral. Pois os computadores podem fazer isso. O uso mais poderoso feito para mudar a estrutura epistemológica da aprendizagem das crianças até o momento foi a construção de micromundos, nos quais as crianças exercem atividades matemáticas porque o mundo para o qual elas sentem-se atraídas requer que elas desenvolvam habilidades matemáticas particulares. Simultaneamente, estes mundos combinam em forma com o estilo oral bem sucedido da aprendizagem da criança pequena” [PAP, 1994. p22].

Outro ponto de confluência, se dá entre o computador no papel de mediador e o conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP), enunciado por Vygotsky.

Sob a ótica do conceito de zona de desenvolvimento proximal ZDP, a aprendizagem depende do desenvolvimento prévio e anterior, ao mesmo tempo que também do desenvolvimento proximal da criança. Enunciado por Vygotsky como:

“a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de

um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.” [VYG, 1991, p97].

A evidência que os computadores podem ser vistos consubstanciando a zona de desenvolvimento proximal, ou seja, aquelas funções que estão em período de latência ou embrionário, que portanto, ainda não amadurecem é dado por Rocha da seguinte forma:

“As pessoas quando interagem, com outras pessoas com artefatos da tecnologia formam um modelo mental de si próprias, das pessoas e das coisas com as quais estão interagindo. Estes modelos provêm poder de entendimento, capacitando as pessoas a predizer e explicar aspectos da interação. Ao mesmo tempo estes modelos são modificados pela própria interação”. [ROC, 1998, p.398].

Por outro lado , contrapondo-se aos pressupostos Vigotskianos de que, a gênese dos processos cognitivos seja eminentemente social, Piaget cunhou as bases da sua teoria para explicar o desenvolvimento intelectual, influenciado pela sua formação de biólogo. Piaget após o estudar o comportamento de determinado molusco adaptando-se as mudanças ambientais, inferiu hipóteses de que, o desenvolvimento intelectual submete-se as mesmas leis que o desenvolvimento biológico. Entendendo assim, os atos cognitivos como forma de organização e de adaptação ao meio.

Desta forma, a atividade intelectual, partilha do princípio que, não pode ser fragmentada dos processos biológicos, mas ambas são partes de processo contínuo.

“com efeito, a vida é uma criação contínua de formas cada vez mais complexas e um equilíbrio progressivo entre essas formas e o meio. Dizer que a inteligência é um caso particular de adaptação biológica é, pois supor que ela é essencialmente uma organização e que sua função é estruturar o universo como o organismo estrutura o meio imediato”. [PIA, apud RAM 1996, p.31].

Para entender o processo de organização e adaptação Piaget instituiu quatro conceitos cognitivos básicos. A saber: a) esquema, b) assimilação, c) acomodação e d) equilíbrio. A luz destes conceitos Piaget explica como e por que o desenvolvimento cognitivo ocorre. Assim passamos a estudá-los:

a) Esquema: Da mesma forma que o corpo dos animais possuem uma estrutura que lhes permitem digerir, Piaget cunhou o termo esquema como sendo as estruturas mentais ou cognitivas pelas quais os indivíduos objetivam e compreendem o seu ambiente e intelectualmente se adaptam e organizam o meio. No decorrer do desenvolvimento essas estruturas tornam-se continuamente mais organizados e hierarquizados.

b) Assimilação: Refere-se ao processo cognitivo pelo qual o indivíduo integra um novo dado aos esquemas já existentes. Não implicando em transformação dos esquemas, mas afetando o crescimento destes e, desta forma, é uma parte do desenvolvimento.

c) Acomodação: Quando exposta a uma situação nova, a criança tenta assimilá-la aos esquemas já existentes. Quando isto não é possível, surge a necessidade de criar um novo esquema ou modificar um esquema já existente de modo que a nova situação possa ser incluída nele.

d) Equilibração: A equilibração assume o papel de um mecanismo auto-regulador, atuando como um “balanço” entre assimilação e a acomodação. É a passagem do desequilíbrio (necessidade de acomodação) para o equilíbrio (assimilação), não no sentido estático, mas de uma equilibração progressiva.

Desta forma, um indivíduo, ao se deparar com um novo estímulo, tenta assimilá-lo a um esquema existente. Se for bem sucedido, o equilíbrio é estabelecido em relação aquela situação estimuladora. Caso não consiga assimilar o estímulo, o organismo se desequilibra e ele tenta fazer uma acomodação, modificando um esquema ou criando um novo. Assim ocorrendo a assimilação do estímulo e neste momento o equilíbrio é restabelecido.

Portanto é desta maneira, que o desenvolvimento cognitivo é construído pelo indivíduo desde o nascimento até a fase adulta. Cabe-nos ainda analisar, quais são os fatores do desenvolvimento cognitivo.

Dolle descreve que, Piaget argumenta sobre quatro fatores que estão relacionados com o desenvolvimento cognitivo. A Saber:

- Maturação: que descreve um papel importante, mas que por si só, não possa responder pelo desenvolvimento intelectual.
- Experiência Ativa: evidenciada pela interação com os objetos ou pessoas provocando assimilação e acomodação. Este é um fator necessário, mas não suficiente para explicar o desenvolvimento.
- Interação social: pode ser com os pais, colegas professores, entre os estudantes, ou seja, Piaget quer dizer intercâmbio de idéias entre as pessoas. Desta forma um fator importante mas não a sua origem como preconizado por Vygotsky.

- Equilibração: Piaget usou o conceito de equilibração para explicar a coordenação dos outros fatores e a regulação do desenvolvimento em geral, onde descreve:

“... vê –se que a equilibração que, em suas diversas formas, nos parece constituir o fator fundamental do desenvolvimento cognitivo, não é simplesmente um dos aspectos, de certo modo enriquecido ou no mínimo secundário, das construções características de cada estágio, e nem um aspecto cujo grau de importância onde a necessidade permaneceria mais ou menos constante em todos os níveis: constatamos ao contrário, que durante os períodos iniciais existe uma reação sistemática de desequilíbrio, que é a assimetria das afirmações e das negações, o que compromete não só o equilíbrio entre o sujeito e os objetos entre os subsistemas, como também entre o sistema total e as partes. Disso resulta que a equilibração progressiva é o processo indispensável do desenvolvimento...”. [PIA, 1976, p.23]

A nossa perspectiva ao explicitar aqui, alguns aspectos que julgamos importantes da teoria de Piaget é pois, o fato de que, o desenvolvimento cognitivo é construído pelo sujeito através de ações sobre o meio. Da mesma forma o conhecimento lógico-matemático é construído a partir de “ações” sobre os objetos, sendo que, o componente mais importante é a “ação,” que não limita-se ao aparato motor, mas também, assume a dimensão de movimento cognitivo, o qual é entendido por Piaget como: “ todo conhecimento é ligado à ação e conhecer um objeto ou evento é assimilá-lo a um esquema de ação ... Isto é verdade do mais elementar nível sensório motor ao mais elevado nível de operações lógico-matemáticas.” [PIA, apud GAV 1998]., e não só o objeto em si.

De forma análoga, Jerome Bruner defende que o ser humano é eminentemente “criador,” uma vez que, o homem atua sobre os estímulos para classificar generalizar e abstrair, construindo modelos do mundo que lhe permite representar não só aquilo que se defronta mas também, efetuar previsões a partir da comparação dos índices que recolhe do ambiente.

O papel atribuído aos modelos armazenados é de grande importância pois, permitem reduzir a complexidade através de uma seleção da informação pertinente num determinado momento e contexto. Bruner concebe deste modo que, cada sujeito deverá ser considerado um participante ativo na aquisição do conhecimento, selecionando e transformando a informação, construindo hipóteses e alterando-as quando se revelam inadequadas.

Em síntese o modelo de desenvolvimento preconizado por Bruner, dá-se como resultado integrado de translações de três modos de representação: ativo, icônico e simbólico.

- Representação ativa: consiste na representação dos acontecimentos pela ação, onde conhecer é saber como executar um conjunto de ações motoras apropriadas para obter determinado resultado.
- Representação icônica: o conhecimento é representado por imagens, oriundas como ampliação das capacidades sensoriais.
- Representação simbólica: consiste em representar a realidade através de símbolos emergente da transposição da experiência para a linguagem e utilização desta como instrumento do pensamento.

Portanto para Bruner, a inteligência não só traduz a aquisição e apropriação de processos representação, mas transcende em termos imediatos para além da informação dada, colocando em xeque-mate, a interação do passado, do presente, e do futuro, desenhada na emergência sucessiva da ação, da imagem e da palavra. Tais mecanismos de representação não só consubstanciam a natureza do desenvolvimento cognitivo do homem, como ilustram a gênese da inteligência na criança.

Para construir as suas próprias representações transcendendo àquelas já existentes na sua cultura o sujeito precisa estar livre para agir, precisa se comprometer e refletir a respeito das suas ações.

Desta forma podemos concluir nossa percepção sobre os pressupostos de Bruner, entendendo que ele compartilha com Paulo Freire e Seymour Papert o entendimento que conscientização, formação e libertação do homem inerentes do ato educativo sob pena da educação desempenhar um papel perverso, acentuando as desigualdades sociais.

Possivelmente foi esse o fato que levou Papert, a atuar como um Hobin Hood, no sentido de tonar disponível para as pessoas comuns, e em especial para as crianças o uso das novas tecnologias o que pode ser observado em vários momentos em sua obra:

“Está idéia não é apenas metafísica, ela inspirou-me a usar o computador como um meio para permitir que as crianças coloquem seus corpos de volta em sua matemática”. [PAP, 1994, p. 34].

“Os computadores deveriam servir para as crianças como instrumento com os quais trabalhar e pensar, como meio para realizar projetos, como fonte de conceitos para pensar novas idéias”. [PAP, 1994, p. 148].

O suporte teórico para a atividade que acontece em ambientes informatizados como o LOGO não advém somente de uma única teoria do conhecimento. Essa argumentação é colocada por Valente numa obra chamada Computadores e Conhecimento, onde apresenta uma figura síntese dessas contribuições, a qual apresentamos a seguir:

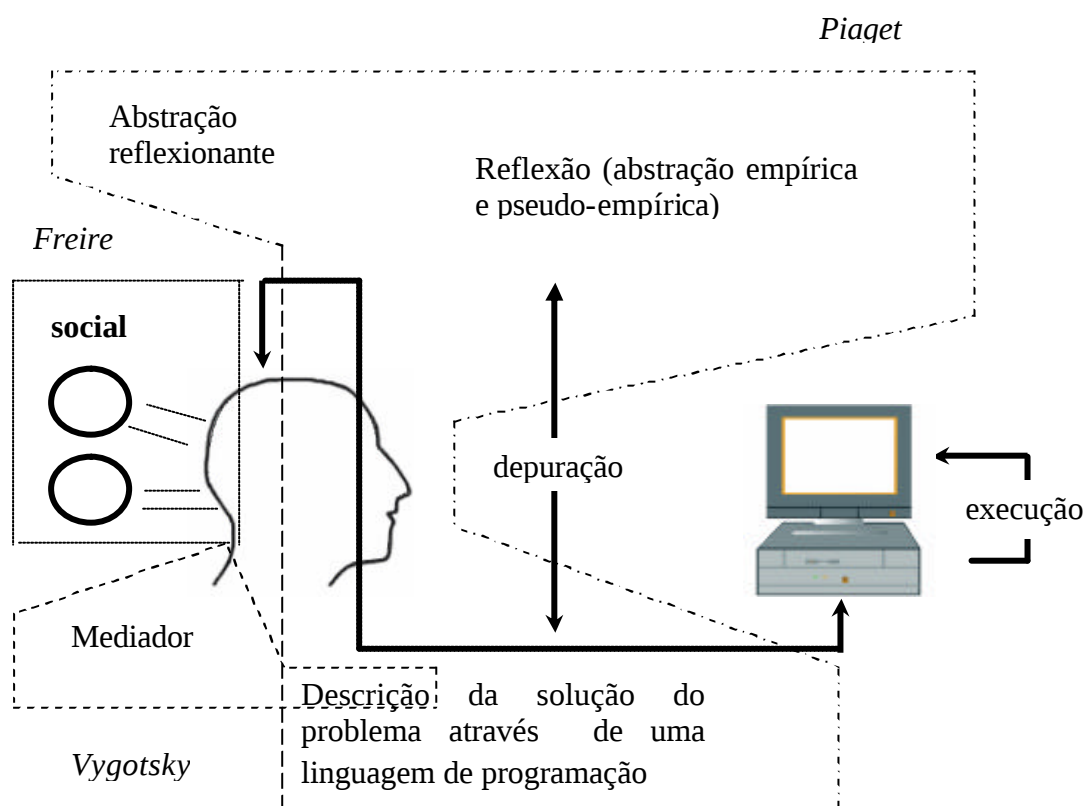


Figura 9: Síntese das teorias do conhecimento aplicadas em ambientes informatizados

Nessa síntese gostaríamos de inserir a perspectiva de Bruner, que apontamos anteriormente, na tentativa de melhor caracterizar a construção do conhecimento que acontece em ambientes de aprendizagem informatizados. Destacamos em vermelho os três níveis de representação propostos por Bruner. Desta forma, o recurso aos artefatos da tecnologia para representação do conhecimento, pode passar pela representação ativa, onde podemos dizer que a sua forma mais simples acontece pela manipulação do mouse. As imagens e sons produzidos na tela desempenham novos significados para

representação icônica que revestidas de formalizações atuaria de forma metáforica no nível das representações simbólicas produzindo novos instrumentos cognitivos decorrentes da articulação dos três níveis de representação.

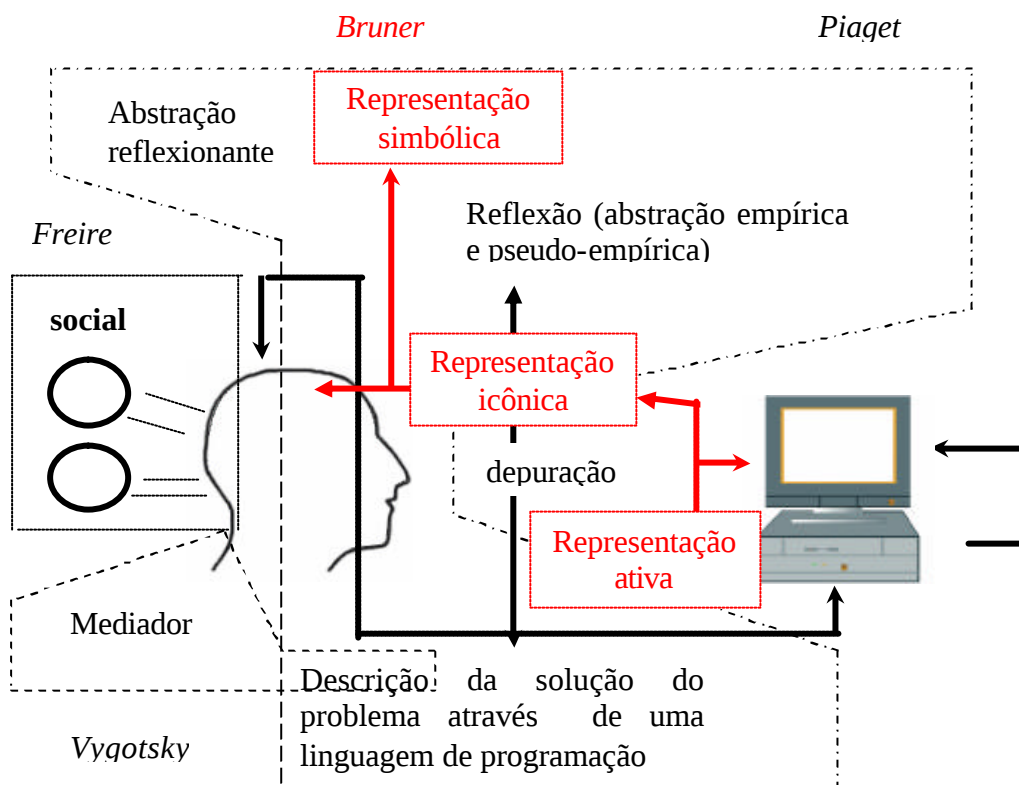


Figura 10: Perspectiva de Bruner aplicada em ambientes informatizados

Finalizando o que foi exposto, encerra-se o fato de poder trilhar um caminho na perspectiva de consubstanciar a hipótese de Fialho que “ a aprendizagem humana e a aprendizagem de uma máquina compartilham uma base teórica comum relativa ao conhecimento. Avanços em qualquer uma das áreas representam benefícios mútuos”. [FIA, *apud* RAM, 1996, p69].

4. Tipos de Software

4.1. Introdução

Encontramos na literatura várias Taxionomias propostas para o software educacional, de acordo com a sua utilização, concepção pedagógica e algumas características de sua programação. Dentre elas destacamos:

- A proposta de Taylor (1980), que classifica o software educacional quanto a sua utilização como tutor, ferramenta ou tutelado. Como tutor o computador desempenha o papel do professor na sua forma tradicional de ensino. Como tutelado o enfoque é dado na possibilidade do computador ser considerado o aprendiz e portanto o aluno é que lhe ensina. Como ferramenta o computador é utilizado para adquirir e manipular informações.
- Outra proposta é de Thomas Dwyer, que estabelece dois grupos de software dependendo da atividade do aprendiz: o algorítmico e o heurístico. No algorítmico a ênfase é dada na transmissão do conhecimento. O computador sabe e ensina para o sujeito. Na modalidade heurístico, a abordagem é a aprendizagem por experimentação ou descoberta, onde os software desenvolvidos sob esta ótica devem ser ricos em situações que permitam o aluno explora-lo conjecturalmente.

Nosso Objetivo agora é apresentar uma breve descrição de cada um dos software e algumas de suas características que julgamos relevantes, e que portanto podem contribuir com o propósito deste trabalho, os quais serão apresentados na próxima seção.

4.1.1. Tutorial

O software do tipo tutorial é uma versão computacional da instrução programada preconizada por Skinner. Sua utilização dá-se como apoio ou reforço para as aulas, como algumas vantagens como animação, som, feedbacks , controle da performace do aprendiz.

Valente apresenta que muitos profissionais da educação sentem-se atraídos com esses programas por que não precisa ser um expert em informática, e também a sua utilização não implica em mudança de paradigma educacional adotado, pois é apenas uma versão computacional do cotidiano escolar.

Por outro lado, Stahl destaca as características desejáveis para programas do tipo tutorial serem mais que viradores de páginas eletrônicos, podendo assumir a função de professor na transmissão de informação. As principais são as seguintes:

- Utilizar estratégias para que o programa seja reconhecido pelo aluno como significativo, agradável ou apropriado para as suas necessidades.
- Ganhar atenção pelo uso de gráficos, som, cor, animação e humor, usados com cuidado para não distrair a atenção do aluno.
- Apresentar uma breve descrição da finalidade da lição e o valor do conhecimento ou habilidades a serem aprendidas.
- Apresentar objetivos a serem alcançados ao final do programa, e exemplos do desempenho que será solicitado ao aluno.
- Relembrar os pré-requisitos através do uso de questões de revisão, exemplos, definições.
- Apresentar estímulos que podem consistir em definições, exemplos, e contra-exemplos.
- Fornecer orientação incluindo pistas e diretrizes para facilitar a aprendizagem, e apresentando de questões para ajudar o aluno a descobrir regras ou conceitos.
- Promover aplicação de habilidades aprendidas, como classificar novos exemplos e contra-exemplos de um conceito, ou aplicar uma regra a novos problemas.
- Fornecer feedback, analisando as respostas incorretas e encaminhando para permitir a resposta certa.
- Permitir que cada lição seja usada independentemente de outras, escolhida pelo professor ou pelo aluno.
- Analisar as respostas do aluno para determinar os estímulos adequados a serem apresentados em seguida, podendo encaminhá-lo para material corretivo, ou passar para um nível de maior dificuldade.
- Avaliar desempenho do aluno, para determinar se ele alcançou os objetivos da lição, registrando e apresentando relatório dos resultados.

- Facilitar retenção e transferência, pelo oferecimento de revisão ou prática adequada em certos momentos, e pelo oferecimento de grande variedade de exemplos e prática.
- Incluir elementos como a prática com as estratégias usadas em exercício e prática, atividades de simulação se for necessária uma experiência realística, estratégias de jogo para ajudar a ganhar e manter a atenção do aluno.

4.1.2. Tutores Inteligentes

Caracteriza-se por uma tendência dos programas tutores em utilizar técnicas e métodos de inteligência artificial (IA), para trazer mais flexibilidade e interatividade no domínio da tutoria.

As ferramentas de inteligência artificial são utilizadas para analisar padrões de erro, avaliando o estilo e a capacidade de aprendizagem de cada aluno oferecendo instrução especial sobre o conceito que o aluno está apresentando dificuldade.

Já existe a perspectiva dos Sistema Tutores Inteligentes (STI), evoluírem para os Ambientes Interativos Inteligentes de Aprendizagem (Interactive Intelligent Learning Environment (ILE) ou ainda sistemas tutores cooperativos. Estes sistemas podem ser entendidos como uma combinação de aspectos de tutores inteligentes e micromundos.

4.1.3. Exercício e Prática

É uma das formas mais tradicionais na qual o computador tem sido utilizado na educação. Os software desse tipo permite a aquisição de uma habilidade ou aplicação de conteúdo já conhecido pelo aluno, mas não inteiramente dominado.

Considera-se uma vantagem desse tipo de programa o fato de que, o professor, pode dispor de uma infinidade de exercícios que o aprendiz pode resolver de acordo com as suas capacidades e interesse.

O problema desse software é que ele assume um aspecto dicotômico quanto a avaliação do aprendiz. Se por um lado pode apresentar exercícios, coletar respostas verificando a performance do aprendiz e apresentando dados importantes sobre o conteúdo visto em classe, por outro lado, não consegue fazer uma análise qualitativa do

por que o aluno acertou ou errou. Portanto, tal questão carece de significados mais amplos do que dados estatísticos.

Para superar as críticas visando contribuir efetivamente para aprendizagem os programas tipo exercício e prática devem segundo Stahl, apresentar as seguintes características:

- Ser fácil de usar.
- Fornecer variadas modalidades de prática de habilidades.
- Ser pedagogicamente válido, coerente e integrado ao currículo
- Explorar as capacidades do computador como som, cor, animação, e outras, para tornar a atividade mais interessante.
- Incluir elementos de jogo.
- Considerar variáveis como idade e preferências do aluno para estabelecer como as capacidades do computador serão utilizadas
- Ter pequena duração, para não se tornar cansativo.
- Fornecer instruções claras, orientando para a tarefa, e informando as expectativas de desempenho.
- Motivar o aluno para o melhor desempenho possível.
- Focalizar uma ou duas habilidades bem definidas, em vez de várias habilidades simultaneamente.
- Permitir que o aluno selecione o grau de dificuldade.
- Apresentar um pequeno número de itens, dependendo da sua dificuldade e da clientela.
- Organizar aleatoriamente os itens, evitando que o aluno trabalhe com o mesmo conjunto de itens, e substituindo por novos itens os já aprendidos.
- Conter um mecanismo de pré-teste para diagnosticar o nível o nível do aluno.
- Exigir respostas breves que possam ser rapidamente produzidas
- Reforçar respostas corretas, e ajudar o aluno a identificar e corrigir as respostas incorretas.
- Oferecer um feedback para cada resposta, e outros tipos de feedback que possam melhorar o desempenho

- Interromper se o desempenho estiver abaixo de determinado limite, não permitindo que o aluno vá até o final, e encaminhando-o para atividades mais adequadas ao seu nível.
- Apresentar um resumo do desempenho do aluno ao final da sessão, com a percentagem de erros e outras informações.
- Oferecer ao professor opção para retirar o som, imprimir ou gravar em disquete os relatórios de desempenho de cada aluno e da turma, selecionar o número e complexidade dos itens e o ritmo de apresentação.

4.1.4. Jogos Educativos Computadorizados

Cunhado sobre os pressupostos que o lúdico tem uma relação estreita com a construção da inteligência, possui uma efetiva influência como instrumento incentivador e motivador no processo de aprendizagem, os jogos constituem a maneira mais divertida de aprender.

Apesar de já existir no mercado uma grande variedade de jogos educacionais computadorizados, a crítica sobre os mesmos recai sobre o fato de que, é dada muita ênfase ao aspecto de competição recheado de sons e imagens o que leva o aprendiz querer vencer o jogo em detrimento a formação de conceitos.

Stahl destaca como importantes as seguintes características dos jogos educativos computadorizados. A saber:

- Fornecer instruções claras para os participantes, os objetivos do jogo devem ser perfeitamente compreendidos pelo aluno, os procedimentos bem definidos.
- Enfatizar respostas freqüentes e facilmente geradas.
- Atrair e manter o interesse e o entusiasmo.
- Promover interações para facilitar o atingimento do objetivo.
- Dar o controle ao jogador, tanto da interação, quando da continuação do jogo, do nível de dificuldade, da taxa de avanço, e da possibilidade de repetir segmentos.
- Incorporar o desafio, que pode ser desenvolvido por interações que levem a um objetivo evidente, níveis variáveis de solução de problema, feedback do processo, resultado incerto, registro de pontos, velocidade das respostas, e randomização da seqüência.

- Explorar a fantasia, que pode ser criada pelo uso de habilidades específicas que afetem o processo do jogo ou a situação a ser solucionada.
- Despertar a curiosidade pelo uso de feedback construtivo randômico para facilitar o aumento do conhecimento do jogador e promover precisão.
- Explorar efeitos auditivos e visuais para aumentar a curiosidade e a fantasia, e facilitar o alcance do objetivo educacional .
- Explorar a competição.
- Oferecer informações que esclareçam o sentido das atividades, os papéis que podem ser desempenhados, as relações entre as ações do aluno e as conseqüências no jogo.
- Fornecer instruções inequívocas, exceto quando a descoberta de regras for uma parte integrante do jogo.
- Fornecer as diretrizes no início e mantê-las disponíveis durante o jogo, especialmente nos jogos longos e complexos.
- Identificar a relação causa-efeito entre as respostas do aluno e as conseqüências do jogo, com as respostas corretas ou incorretas causando modificações no cenário.
- Utilizar mecanismo para corrigir os erros e melhorar o desempenho.
- Oferecer reforço positivo nos momentos adequados.
- Manter os alunos informados do nível de seu desempenho durante o jogo, e fornecer resumos de desempenho global final.

4.1.5. Simulação

É a representação ou modelagem de um objeto real de um sistema ou evento. Os software dessa categoria abrem possibilidades do aprendiz conjecturar hipóteses, testá-las e analisar os resultados, permitindo um maior grau de intervenção do aprendiz no processo.

Certamente essa é uma maneira de aplicar as possibilidades do uso do computador na educação não mais como uma máquina de ensinar, mas sim, como uma ferramenta.

Um dos problemas atribuídos as simulações é que elas primam por recursos tecnológicos para aproximar a situação problema do objeto real, o que não é uma realidade nas nossas escolas.

De acordo com Stahl, as simulações devem apresentar as seguintes características:

- Fornecer instruções claras para a participação do aluno, e regras e diretrizes antes que a simulação comece, ou distribuídas ao longo da lição e introduzidas quando necessárias.
- Especificar os objetivos da simulação e quando ela será considerada concluída.
- Fornecer os dados da simulação a ser simulada, introduzindo os aspectos críticos e a faixa de possíveis respostas.
- Permitir ao aluno escolher a ação entre as opções fornecidas ou indicar livremente a ação desejada, digitando o comando.
- Fornecer ao aluno uma clara noção das conseqüências de suas respostas, ou solicitando que as indique antes de continuar a simulação, incorporando os conceitos de método científico e testes de hipóteses.
- Identificar mudanças nos elementos críticos em resultado das respostas do aluno, podendo fornecer avaliação quantitativa ou qualitativa.
- Oferecer feedback imediato do efeito das entradas de dados nos elementos da simulação, permitindo ao aluno comparar de imediato as conseqüências observadas com aquelas imaginadas.
- Fornecer uma versão modificada do cenário em cada ponto de decisão, de acordo com as respostas cumulativas do aluno.
- Fornecer ao aluno, quando possível e adequado, um resumo qualitativo de seu desempenho, que indique o número e tipo de decisões tomadas, as perdas e ganhos, ou qualquer outra informação relativa aos objetivos e elementos da simulação.
- Encaminhar o aluno à instrução necessária para suprir as deficiências, quando erros específicos indicarem a falta de domínio de certos elementos.

4.1.6. Micromundos

Papert foi o mentor dessa idéia na década de 60. Ele desenvolveu o LOGO, um exemplo consagrado dessa categoria na qual a criança interage com uma tartaruga de forma a ajudá-la na construção e resolução de problemas.

A principal característica desses sistemas é em relação a proposta pedagógica, que diz respeito a aprendizagem pela ação, numa perspectiva de construção do conhecimento. Portanto, torna explícito o processo de aprender de modo que é possível refletir sobre o mesmo a fim de compreendê-lo e depurá-lo.

Outro exemplo significativo dessa modalidade de software é o AALO, desenvolvido no Laboratório de Informática Aplicado a Educação EDUGRAF da Universidade Federal de Santa Catarina. O AALO é um ambiente computacional para auxílio do processo de exploração – aprendizagem da lógica. Sua metáfora é um ecossistema habitado por animais e plantas. O usuário pode utilizar diferentes formas de representações para interagir com o mesmo, administrando-o.

4.2. Fatores Desejáveis para Software Educativo.

O desenvolvimento de ferramentas de caracter educativo deve levar em conta alguns fatores desde a sua concepção. Neste tópico apresentaremos alguns pontos que devem ser levados em consideração na elaboração do software. De acordo com Valente⁶ são eles:

a) Engajamento do usuário com o sistema

- Interatividade: O diálogo ou a interação com o computador é fundamental para o usuário engajar-se num verdadeiro processo de aprendizagem.
- Qualidade do diálogo: são características desejáveis no diálogo do computador com o usuário como por exemplo ser amigável, encorajador, apropriado, útil e fluído.

⁶ Artigo que pode ser adquirido pela internet no seguinte endereço eletrônico: <URL: <http://www.unicanp.br/nied> > 30/01/2001.

- O programa não deve julgar o usuário: responder a um erro com “dicas” pode levar o usuário interessa-se mais pelas ferramentas do sistema do que pelo o aprendizado em si.
- Reações altamente positivas ou negativas: “fabuloso” “esplêndido” tornam-se enfadonhas e contraprodutivas
- Ajuda: o programa deve oferecer ao usuário a oportunidade de solicitar ajuda em qualquer parte deste.

b) Controle do aprendizado

- Controle do aprendizado: o controle do aprendizado deve estar na mão do aprendiz. O usuário não deve se sentir limitado pelas ações do programa, mas sim, este deve antecipar uma ampla variedade de respostas, desde o chute até as obtidas estrategicamente.
- Flexibilidade na resolução: o sistema deve permitir mais de uma maneira de resolver o problema. O estudante deve ser capaz de resolver o problema de acordo com o seu estilo e capacidade cognitiva.

c) O Valor do erro

- Feedback neutro: o feedback deve ser neutro quanto a direção a ser seguida. Qualquer informação ou direção fornecida além da apropriada é vista como intervenção.
- O programa deve reconhecer suas limitações: Ao invés de tentar solucionar todas as situações, o programa deve, em alguns casos, recomendar que o estudante solicite a ajuda do professor.

d) Programação sólida e efetiva

- Importância do uso de diferentes tipos de representação: uma declaração verbal ou matemática pode ser visivelmente melhorada através do uso de gráficos.
- Intenção clara: o programa deve ser claro quanto aos seus objetivos, como eles são atingidos e como o usuário deve fornecer suas respostas.

- Reusabilidade: o programa deve ser capaz de rever o que foi feito, ou mencionar como o usuário se comportou em situações anteriores.
- Ser desafiante: o programa deve propor questões desafiadoras cujo grau de dificuldade deve ser tal que o estudante possa resolvê-las.
- Cooperação: a maioria dos programas são desenvolvidos para serem utilizados por um único usuário. Entretanto, uma situação de aprendizado bastante estimulante pode ser criada se duas ou mais pessoas interagem com o computador.

e) Documentação

- Especificações: os manuais devem ser bem escritos contendo especificações do produto, mensagens de erro etc., de tal forma que o professor e o aluno sejam capazes de entendê-las .

Os itens propostos tem caracter de identificar certos aspectos necessários para a elaboração de um bom software educativo. Um software com todas essas características parece ser impossível de desenvolver, por outro lado, a existência destas, não é condição suficiente para a produção de um bom software. A combinação de diferentes aspectos levantados é que fazem um software ser mais interessante e efetivo que outro.

4.3.O Uso de Computadores e Software no Ensino de Álgebra: Algumas Possibilidades já Identificadas

4.3.1. *Relacionando Funções e Seus Gráficos*

Traçar gráficos de funções é uma atividade fundamental no ensino e na aprendizagem de conceitos algébricos esse tópico pode ser observado em todos os níveis de ensino.

Usualmente quando pede-se numa aula o esboço de um gráfico os alunos fazem uma tabela escolhendo alguns valores para “ x ” e determinam os valores de “ y ”. De acordo com SANDERS e BeBLASSO a ênfase é dada em “*todo a função tem uma tabela*” em detrimento à *toda função tem um gráfico*”. As tabelas não são más, elas ilustram certos aspectos de uma função. Porém, alunos e professores deveriam enfatizar

o gráfico. Ao tentarem visualizar a função $y=x^2$, os alunos deveriam ver um gráfico e não uma tabela de pares ordenados.

Como podemos mudar essa perspectiva? Os indicadores podem ser encontrados nos trabalhos de [SIL et al, 2000], [SIM, 2000], [SOU, 2000] e [BOR, 1999]⁷, onde vários software são colocados para calcular os valores de tabela e locar os pontos. Então o aluno poderá se concentrar mais no que acontece com a função quando se fazem mudanças com a função “ f ”. Algumas dessas possibilidades podem ser vistas nas figuras⁸ abaixo.

- $g(x) = f(x) + k$ (somar uma constante à função)

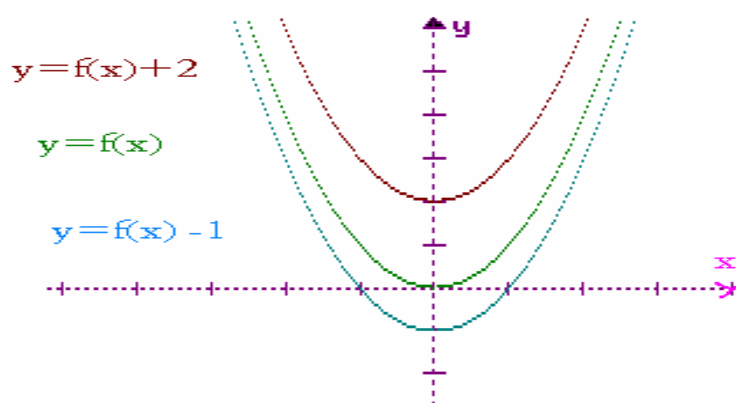


Figura 11: Variações da função $y = x^2$

- $g(x) = f(x + k)$ (somar uma constante à variável)

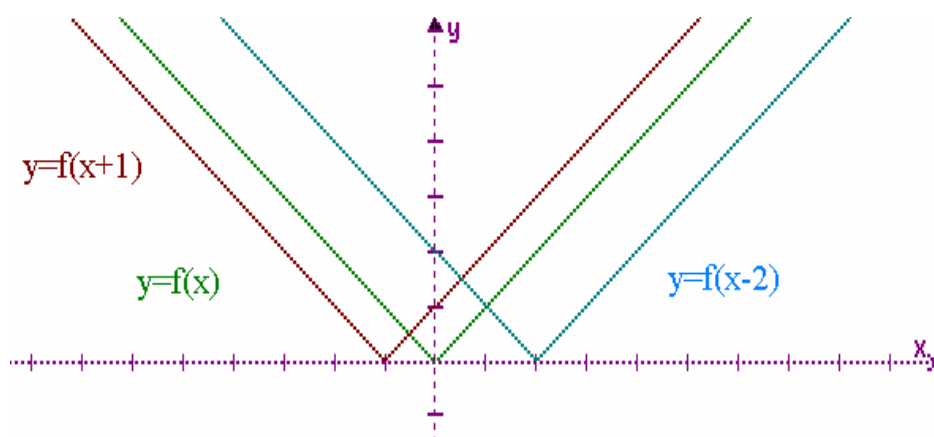


Figura 12: Variações da função $y = |x|$

⁷ In : BICUDO, Maria A. Viggiani. (Org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

⁸ Algumas das possibilidades realizadas por [SIL et al, 2000], no estudo de funções com alunos ingressantes do curso de ciências da computação – PUC – SP.

Um aspecto importante abordado nos trabalhos que referenciamos anteriormente, e em particular em [BOR, 99], é a forma como os alunos fazem inferências e conjecturas que acabam desencadeando discussões que dificilmente seriam enunciadas numa aula expositiva. Ou seja, quando o aluno começa fazer inferências, alterando ali, clicando aqui, e se fosse assim ou assim, testando-as quase que simultaneamente acaba envolvendo uma função “ f ” e suas “ associadas ” $f(x)+k$, $f(x+k)$, $f(kx)$, $kf(x)$, $|f(x)|$ e $f(|x|)$, de tal maneira que é possível verificar translações horizontais e verticais dos gráficos das funções, as modificações ocorridas no domínio, na imagem, na simetria, na paridade e no manuseio da expressão algébrica de uma função, com flexibilidade, criatividade e beleza inerente ao produto acabado realizado com ajuda do computador.

Vamos considerar também que nestes trabalhos outros fatores como a postura do professor, o trabalho em grupo, ou o ambiente de pesquisa influenciaram tais experiências, não se trata portanto de uma relação centralizada entre o uso das novas tecnologias e os resultados obtidos, porém, parece evidente que o uso destas tecnologias proporciona a realização destas e novas experimentações.

4.3.2. Planilhas Eletrônicas no Ensino de Álgebra

O uso de planilhas eletrônicas no ensino de álgebra é particularmente interessante porque permite que o aluno se envolva num processo interativo de *resolução* ou *modelação* de um determinado problema. A sua utilização pode ser associada com essas abordagens metodológicas, a **resolução de problemas**⁹ ou **modelagem matemática**¹⁰ conforme apontado nos trabalhos de [MAX e VER, 96] e [BOR, 98].

A atividade de ensino aprendizagem proposta a seguir a título de exemplo, segue de perto estas perspectivas de utilização educativa das planilhas eletrônicas para o ensino de álgebra.

⁹ A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. DOMINGUES, Higino H. CARBO Olga. São Paulo Atual 1997.

¹⁰ A Modelagem Matemática & Implicações no Ensino – Aprendizagem de Matemática. BIEMBEGUT, Maria Salett. Blumenau SC: Editora da FURB, 1999.

Escolhemos a planilha de cálculo EXCEL para ambiente WINDOWS porque, por um lado é de utilização cômoda e de fácil e interativa aprendizagem, e por outro existe em quase todos os núcleos de informática que vem sendo implementados nas escolas públicas.

Vamos ao exemplo apresentado por [MAX e VER, 96 p206]:

“Quantos litros de água devem ser adicionados para mudar a concentração de sal em 10 litros de solução de 20% para 15%”.

É conveniente começar o processo de resolução com uma discussão em classe para determinar as partes essenciais do problema. A discussão permite ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de decompor o problema, sendo a confecção de rótulos de colunas para o modelo de planilha um dos resultados típicos dessas discussões

O próximo passo consiste em introduzir nas células as informações dadas no enunciado do problema, sob os cabeçalhos de colunas adequados. Isso é feito na linha 2 da figura. É preciso considerar também no desenvolvimento do modelo, o cálculo da célula E2. O valor de E2, expresso em porcentagem é $(D2/C2)*100$. (veja figura abaixo).

	A	B	C	D	E
1	LITROS DE ÁGUA SALGADA NO INÍCIO	LITROS DE ÁGUA ADICIONADOS	LITROS DE ÁGUA DA NOVA MISTURA	LITROS DE SAL NA MISTURA	% DE SAL NA NOVA MISTURA
2	10	0	10	2	20
3	10	1	11	2	18,18181818
4		2			
5					
6					
7					
8					
9					
10	10	X	10 + X	2	$2/(10 + X) * 100$
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					
31					
32					

Figura 13: Planilhas eletrônicas no ensino de álgebra

Outro aspecto importante da discussão é a identificação dos componentes que variam conforme se adiciona água à solução original. Isso poderia ser feito colocando-se um valor em B3 e perguntando-se quais os valores é necessário introduzir nas células restantes da linha 3. Desta forma, a célula C3 deve ser ocupada por uma expressão que calcule a soma de B3 com A3.

É possível que alguns alunos poderão precisar de ajuda para entender porque os valores introduzidos nas células A2 e D2 devem ser constantes 10 e 2, respectivamente. Uma discussão sobre a linha 3, deverá convencer os alunos de que as células nas colunas C e E devem ser expressões. Neste momento vários valores devem ser introduzidos nas células das colunas B, para que os alunos compreendam bem o problema e obtenham algumas boas soluções aproximadas do problema original.

Depois dessa experiência, a classe deveria ser tentada a conceber o modelo algébrico para o problema. O modelo algébrico deverá ser utilizado então para determinar a resposta exata. Essa resposta pode ser usada para avaliar a qualidade das aproximações obtidas por meio do modelo da planilha.

Outro ponto significativo é que uma vez construído o modelo, pode-se facilmente modificá-lo, explorando variações de tal forma que o interesse dos alunos pela atividade de investigação possa fazer com que, eles compreendam tanto um determinado problema quanto a natureza de sua resolução.

5. Design de um Ambiente Computadorizado para Aprendizagem de Álgebra.

Para compor um cenário onde possam situar-se com alguma nitidez as questões apontadas por Lins e Gimenez, de forma articulada com os artefatos da tecnologia, optei por apresentar primeiramente uma releitura dos próprios autores da atividade dos tanques, juntamente com seus objetivos, para em seguida inserir a nossa proposta. Porém com uma preocupação a mais, a de evitar que essa estruturação que está sendo proposta não tenha relação alguma com o que se faz efetivamente em sala de aula, em outras palavras não é conveniente “abusar” dos recursos tecnológicos, por dois aspectos nem de todo simples, pois se negligenciados podem comprometer a viabilidade proposta. A saber:

- Primeiro, as escolas públicas – foco das intenções – não dispõem recursos sofisticados, como também as políticas educacionais não lhes permite acompanhar os processos de metamorfose que a tecnologia imprime, como é possível verificar em [ROC, 2000]¹¹
- Segundo, corre-se o risco de perder um dos principais aliados – o professor de matemática – que frente as adversidades¹² que apontamos no primeiro capítulo não esta tendo oportunidade e condições de aprimorar a sua formação.[VAL, 96], [BIC, 99].

Por outro lado, é importante entender que esses fatores não são de todo determinísticos, pois a medida que esses “nós górdios” vão sendo desatados, a perspectiva que novas ferramentas poderão ser empregadas permanece.

Na concepção dos autores a releitura sumária da atividade dos tanques compreende três etapas:

¹¹ ROCHA, Maria L . O Computador e o Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado apresentada em 15/12/2000 ao Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação – CPGCC- Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC – Florianópolis – SC

¹² O espectro dessas adversidades variam desde problemas pessoais como conciliar, trabalho, família, esforço e dedicação com problemas institucionais como o número reduzido de bolsas de estudos e prazos cada vez mais diminutos, que acabam por inviabilizar uma contribuição mais efetiva de muitas pessoas que não conseguem romper com esses grilhões.

1. “A produção um conjunto de expressões corretas sobre a situação dos tanques, que por sua vez , subdivide-se em:
 - a) introdução de uma notação literal / aritmética; e.
 - b) produção de justificações para cada expressão produzida”.
2. “O estabelecimento da possibilidade de transformações diretas de expressões como forma de gerar novas expressões corretas. Para cada expressão produzida, produz-se uma justificação com relação ao núcleo dos tanques e outra como transformação direta de uma expressão para a qual já se produziu significado”.
3. “Exploração das diferenças entre os modos de produzir significados praticados em 1 e 2”. [LIN, 97p.147].

A figura a seguir procura expressar essa perspectiva. Observe que a relação entre o núcleo e as transformações diretas é mais fraca.

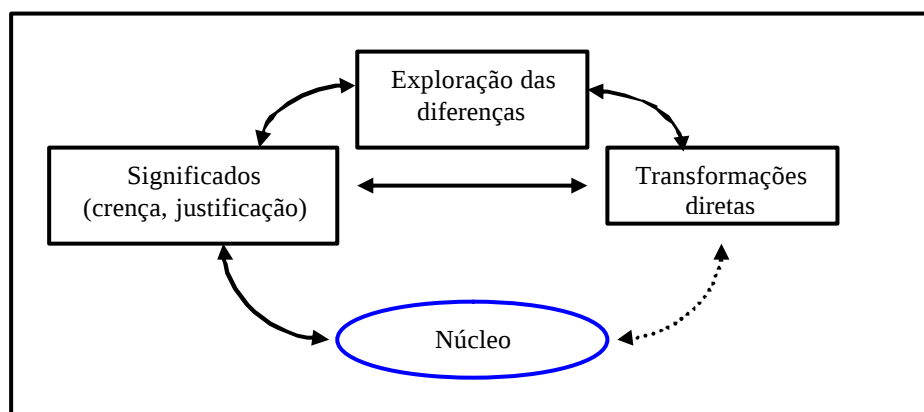


Figura 14: Síntese do processo de produção de significados

Precisa-se considerar também os objetivos propostos pelos autores que são:

Na primeira etapa

- “produzir expressões com significados”;
- “produzir expressões de uma forma “padrão”, que irá aparecer (ou já apareceu) em outras atividades”.

O objetivo principal da etapa (2) é:

- “introduzir um modo de produzir significado que não depende (ou depende pouco da situação particular tomada como ponto de partida). Em todas as atividades que seguem esse formato, em relação á álgebra, esse segundo modo de produzir significado caracteriza-se por um núcleo constituído pelas propriedades das expressões em relação a transformações: o que pode ser feito com elas. É essa etapa que caracteriza todo o processo de desenvolvimento de um modo algébrico de pensar (de produzir significado)”.

O objetivo da etapa (3) é triplo:

- *“permitir que os alunos compreendam que os dois modos de produzir significado são “de fato” distintos”;*
- *“permitir que os alunos compreendam que as transformações diretas de expressões são apenas “mais um, entre outros” modos de produzir significados para expressões daquele tipo, e estabelecer o fato de que pensar daquele modo é uma opção, não uma obrigação”;*
- *“permitir que os alunos tomem consciência das peculiaridades, das vantagens e das desvantagens de cada modo de produzir significado usado”.*[LIN, 97p.148]

Considerando simultaneamente o que compreende e os objetivos de cada etapa é fundamental considerar no design do ambiente a ser proposto a possibilidade de cooperação em rede de forma síncrona. Este ambiente será constituído por dois módulos, estes serão inicialmente descritos em termos gerais. Posteriormente cada um deles será melhor detalhado. Desta forma tem-se:

- O primeiro módulo que designado de *“módulo construtor”* além de contemplar o que compreende a primeira e a segunda etapa bem como seus respectivos objetivos, deve ampliar as possibilidades desses pontos permitindo tanto ao professor quanto ao aluno envolver-se na construção de projetos de trabalhos de forma cooperativa ou individualizada.
- O segundo módulo será o *“módulo teste”*, que tem por objeto explorar o que compreende e os objetivos da etapa (3), que tem por objeto consubstanciar a proposta de Lins e Gimenez como também ampliá-la.

As primeiras justificações que vamos apresentar referem-se ao fato de propor um ambiente que permite a cooperação em rede, isto deve-se a:

- Um ambiente que não incorpore esta característica possivelmente não atenderá todas as questões apresentadas por Lins e Gimenez, ou seja, propor atividades para que as pessoas possam envolver-se num processo de criação de significados implica o fato de este trabalho se realizar de forma cooperativa. Cooperar na acepção de Piaget significa *“operar-junto”* e constituir-se a pedra angular da autonomia.
- Os trabalhos onde buscou-se identificar as potencialidades pedagógicas do usos das novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem de álgebra, dentre eles o de [BOR, 99], revelam que, a troca de experiências e a partilha de saberes consolidam espaços de aprendizagem mútua, nos quais cada aluno é chamado a desempenhar um duplo papel – de aprendiz e de feiticeiro – o que coloca em evidência a

perspectiva de Vygotsky, onde o diálogo entre os pares é fundamental para consolidar os saberes emergentes a partir de outras experiências ou do ponto de vista dos colegas.

Módulo Construtor

O “*Módulo Construtor*” apresenta como principais características:

- O professor poderá construir e editar atividades que julgar potencialmente pedagógicas;
- O aluno também poderá envolver-se num processo cooperativo ou individualizado de construção de atividades de seu interesse particular ou coletivo, onde a percepção, a imaginação e a manipulação coexistem de forma simultânea;
- Haverá disponível um espaço para discussão, registro e organização de forma estruturada¹³ das múltiplas questões que todas as etapas necessitam, garantindo que o que é produzido de forma individual ou cooperativa seja respeitado.
- Uma dinâmica semelhante à de um editor de texto onde será possível, inserir texto, figuras, desenhos, tabelas, planilhas e gráficos, realizar transferência entre aplicações.
- A forma de organizar e registrar as discussões será através de um chat, sendo que o caminho produtivo percorrido deve ser publicado em paginas web.

Alguns comentários podem ser nesse momento inseridos, como forma de continuar o trabalho de apresentar as justificações pedagógicas do ambiente.

- Entendemos ser fundamental que o professor possa construir nesse ambiente situações que julgue potencialmente pedagógica, pois isto será propício para que incorpore de forma mais efetiva uma reflexão sobre a sua prática, tomando decisões fundamentais relativa às questões que quer considerar, aos projetos que quer empreender, e ao modo como os quer efetivar no ecossistema da “sala de aula”. Essa perspectiva rompe com a camisa de força apresentada pelos livros didáticos e permite-nos repensar problemas ricos em termos de significados algébricos, como

¹³ ARRIADA, Mônica, RAMOS, Edla. Como Promover Condições Favoráveis à Aprendizagem Cooperativa Suportada Por Computador?". Anais do V Congresso Ibero-Americano de informática Educativa. Vina Del mar, Chile.

também capazes de contribuir para que crianças e adolescentes oriundos, na grande maioria, de escolas públicas, adquiram uma cidadania de valor.

- Outro ponto crucial é a possibilidade do aluno envolver-se com a criação de projetos de seu interesse, pois Piaget preconizava que o aluno levará tanto mais a sério o seu trabalho quanto mais dono dele se sentir. Pierre Lévy tem um importante argumento que temos que considerar:

*“Na verdade é porque possuímos grandes aptidões, para a manipulação e bricolagem que podemos trafegar, reordenar e dispor parcelas do mundo que nos cerca de tal forma que elas acabem por **representar** alguma coisa. Agenciamos sistemas semióticos da mesma forma como trabalhamos o sílex, como construimos cabanas de madeira ou barcos. As cabanas servem para nos abrigar-nos, os barcos para navegar, os sistemas semióticos para representar”* (grifo nosso).[LEV, 93p.158].

Ainda Lévy,

“A faculdade de imaginar, ou fazer simulações mentais do mundo exterior, é um tipo particular de percepção, desencadeados por estímulos internos. Ela nos permite antecipar as conseqüências dos nossos atos. A imaginação é a condição deliberada: o que aconteceria se fizéssemos isto ou aquilo? Graças a esta faculdade, nos tiramos partido das nossas experiências anteriores. A capacidade de simular o ambiente em suas reações tem, certamente, um papel fundamental para todos os organismos capazes de aprendizagem.”[LEV, 93p.157].

- Outro ponto que é digno de ser aqui apresentado, é que ensaios pedagógicos realizados em ambientes de aprendizado cooperativo suportado por computador, revelam que o computador tem mostrado ser uma ferramenta que permite a liberdade de expressão, garantido espaço para que as pessoas registrem e exercitem de forma mais efetiva, o seu direito de se expressar e, por outro lado, contribuindo para que alguns efeitos indesejáveis presentes na sala de aula, como a falta de interesse e motivação sejam diminuídos. Como pode-se ver em [ALB, 2001]¹⁴:

“Todos do grupo expressaram suas idéias... todos trocaram suas idéias com sucesso”. Adr

“O trabalho fica mais complexo com várias cabeças pensando”. Dgl

“Todos colocaram suas idéias resultando num trabalho final muito bom”. Dgl

¹⁴ALBINO, Sirlei. Design e Análise de um Cenário Pedagógico de Uso das Ferramentas de Trabalho Cooperativo. Dissertação de mestrado apresentada em 16/02/2001, ao Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação – CPGCC- Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC – Florianópolis - SC

- Uma nova organização da sala de aula afeta como os alunos e o professor se comportam bem como a forma como se comunicam entre si. Alunos e professores se encontram com situações novas em relação ao que usualmente estão acostumados a enfrentar. Esta organização não é exclusividade do uso de computadores, mas a sua utilização parece implicar em mudanças na sala de aula como indica o trabalho de Nóvoa & Maia:

“A organização diferente do espaço-físico da sala de aula é uma evidência, tornada mais transparente pelo aparecimento das novas tecnologias num contexto de sala de aula ... o “desenho” deste espaço, afeta decididamente não só o comportamento dos seus alunos, como a sua própria conduta, a forma como se comunicam entre si, e o desenrolar de determinadas atividades” [Nóvoa & Maia apud PEN, 99p.303]¹⁵.

É importante salientar que estas mudanças podem alterar o espaço das interações interpessoais que afeta os “espaço psicológico e operativo” dos sujeitos.

Podemos dizer, finalizando que a importância do módulo construtor é, enquanto foco da atividade algébrica, a de garantir e dar melhor estrutura comunicativa e interativa para que o grupo realize as etapas (1) e (2), isto é dar suporte a construção de significados, diretamente ou não em relação a um núcleo para o qual as expressões estão sendo produzidas. A figura a seguir expressa esta relação:

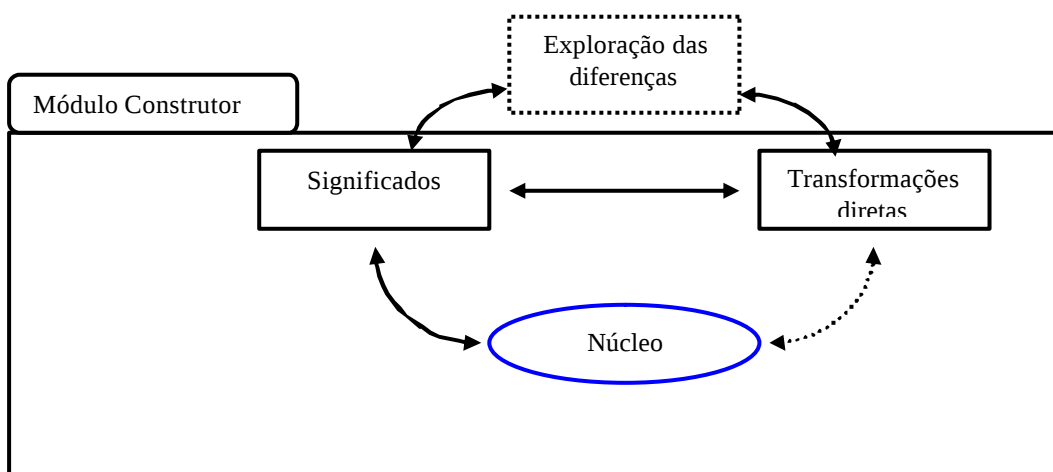


Figura 15: Foco de Módulo Construtor

¹⁵ PENTEADO, Miriam G. Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. In Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. org. BICUDO, Maria A. V. Editora UNESP, 1999.

Módulo Teste

A importância, como já foi enfatizado, nas etapas (1) e (2), é tornar possível a caracterização clara, dos dois modos de produção de significado, primeiro em relação a um núcleo e o segundo em relação às transformações diretas. Sem explicitar isto, fica-se apenas no mundo das expressões, o que torna difícil e, para muitos alunos mesmo impossível, compreender o processo das transformações diretas desvinculado do núcleo de origem.

Na acepção de Lins e Gimenez, a etapa (3) consiste num “*exercício de metacognição*” durante o qual os alunos podem ir desenvolvendo a consciência de seus próprios processos cognitivos, ainda que em relação a um aspecto particular desses processos. Desta forma o propósito do módulo teste é justamente consubstanciar a proposta dos autores e por outro lado ampliá-la, pois um convite para testar algo pode dar origem na novas inferências e conjecturas, que em outros momentos não eram percebidas.

Faz-se necessário neste momento, introduzir um princípio que por um lado vem objetivar e nortear a atividades desenvolvidas no módulo teste e por outro potencializar a proposta. Este princípio é o “lúdico” nas suas múltiplas formas, seja no jogo ou no brinquedo. Esse princípio é aqui uma “crença-afirmação” do autor desse texto e naturalmente precisa de suas “justificações”, dentre elas destacamos:

- Para Papert o computador é a “*máquina das crianças*” e para Piaget “*o jogo tem uma estreita relação com a construção da inteligência*”, combinar esses ingredientes, nos parece uma fórmula poderosa para o processo educativo;
- Para Vygotsky, “*o brinquedo cria uma zona de desenvolvimento proximal na criança. No brinquedo a criança sempre se comporta além do seu comportamento habitual de sua idade, além do seu comportamento diário, no brinquedo é como se ela fosse maior que a realidade, como no foco de uma lente de aumento, o brinquedo contém todas as tendências do desenvolvimento sob forma condensada, sendo ele mesmo uma grande fonte de desenvolvimento*”. [VYG, 1991].
- Por entender tal qual Ramos que preconiza: “*A construção de ambientes computacionais que possam proporcionar a seus usuários uma forma lúdica de construir conceitos é um esforço que merece ser empreendido nas mais diversas áreas do conhecimento humano*”. [RAM, 1996].

Algumas características podem ser definidas para o “módulo teste”, entre elas destacamos:

- Tanto o professor quanto o aluno podem editar seus jogos, podem publicá-los para que os demais colegas possam encontrar soluções de forma cooperativa ou individualizada. O foco desses jogos é a manipulação das transformações diretas no sentido que elas apareçam nos jogos como “regras” de forma implícita ou explícita, de acordo com a metáfora do jogo.
- A dinâmica do “modulo teste” será semelhante a de uma ferramenta de autoria, servindo de apoio à elaboração dos jogos. De início estamos prevendo a inclusão de jogos cuja metáfora é conhecida tanto pelo professor como pelo aluno, dentre eles destacamos:
 - “O que é o que é”: (adivinhações, charadas). Porém não basta “adivinhar” (crença-afirmação) é preciso dizer por quê, (justificação);
 - “Máquina de funções”: Metáfora usada para entender o conceito de função. Qual a regra da máquina?(crença-afirmação). A justificação pode ser uma transformação que máquina faz.
 - “Corrida”: inspirado na metáfora do ludo: As regras podem ser adaptadas para produzir várias crenças-afirmações e respectivas justificações durante o percurso do jogo.
- O “modulo teste” prevê ainda a inclusão de um “assistente” para facilitar a elaboração dos jogos, assim durante a elaboração do jogo da “corrida” por exemplo, o aluno ou professor poderá definir, o ponto de início e final, a trajetória, incluindo as transformações diretas que compõem o cenário, bem como ações que poderão ser disparadas como sons imagens e efeitos de animação quando se atinge determinada casa.

A figura a seguir expressa uma síntese da atuação dos módulos sobre a proposta de Lins e Gimenez:

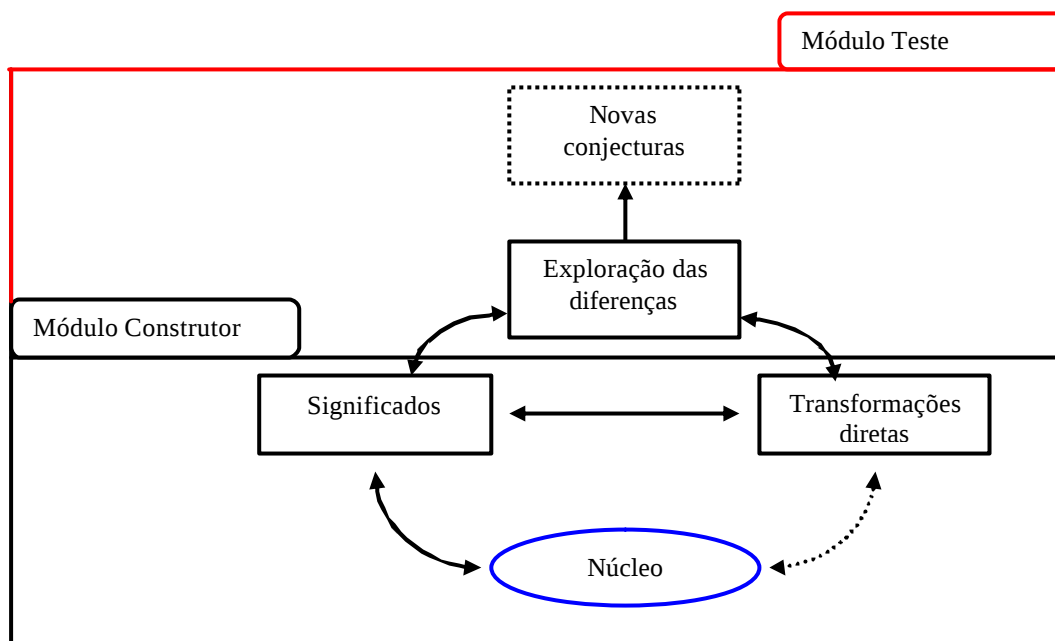


Figura 16: Perspectiva de atuação do ambiente

A seqüência de figuras a seguir, apresenta uma proposta de interface para o ambiente. Na primeira delas destacamos o “modulo construtor”, e a outra o “módulo teste”.

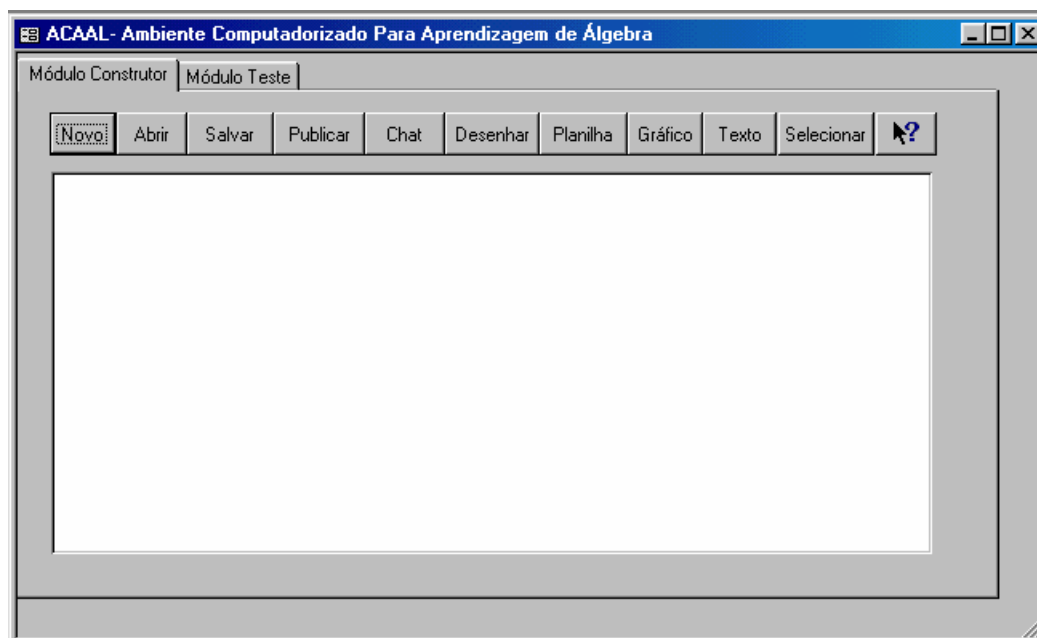


Figura 17: Proposta de Interface do Módulo Construtor

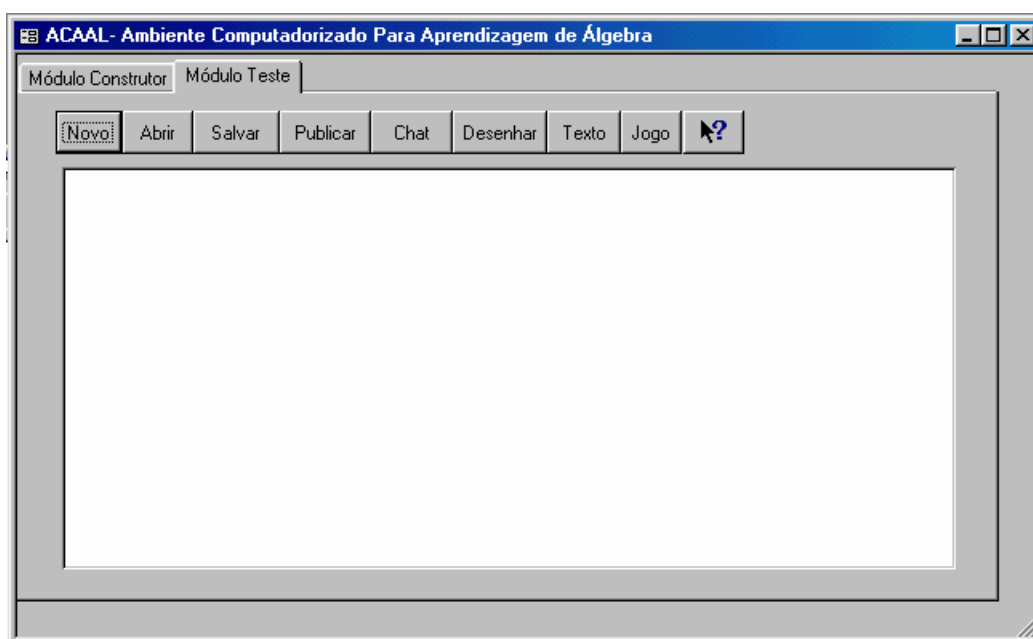


Figura 18: Proposta de interface do "Módulo teste"

5.1 Detalhando o Ambiente

Na verdade o ambiente proposto que tem a intenção de tornar-se uma contribuição simples, mas útil do ponto de vista da atual “organização” do trabalho docente. Hoje reconhece-se a necessidade da abertura para novas atitudes epistemológicas, das transformações promovidas pelos artefatos das novas tecnologias mas por outro lado, tem-se dificuldades para acompanhar o passo das transformações tecnológicas. As distâncias que separam a proposta presente nos discursos da prática da sala de aula é significativa.

Conforme apontado anteriormente, tanto o professor quanto o aluno podem envolver-se com a construção de projetos particulares ou cooperativos. Dessa forma vamos apresentar uma descrição de como o professor poderá editar uma situação: por exemplo a atividades dos tanques.

A metáfora do módulo construtor é a de um editor de texto, assim clicando sobre o botão “**novo**” começa-se um documento. Em seguida clica-se sobre o botão “**desenhar**” e uma barra de desenhos flutuantes está a sua disposição, para compor este trabalho. Convém destacar que a opção “**publicar**”, permite que o documento fique a disposição de todos os alunos na rede.

É importante destacar que os direitos de autoria serão resguardados, no caso de alterações e contribuições, novas formas de representar, tabelas, gráficos, desenhos, esquemas, devem ser reeditados e colocados novamente a disposição. Esta característica tem por objeto proporcionar que o caminho produtivo das transformações seja preservado e constitua-se num instrumento de “avaliação” produzindo um registro com maior fidelidade.

A figura a seguir registra uma possibilidade para a edição da atividade dos “tanques”:

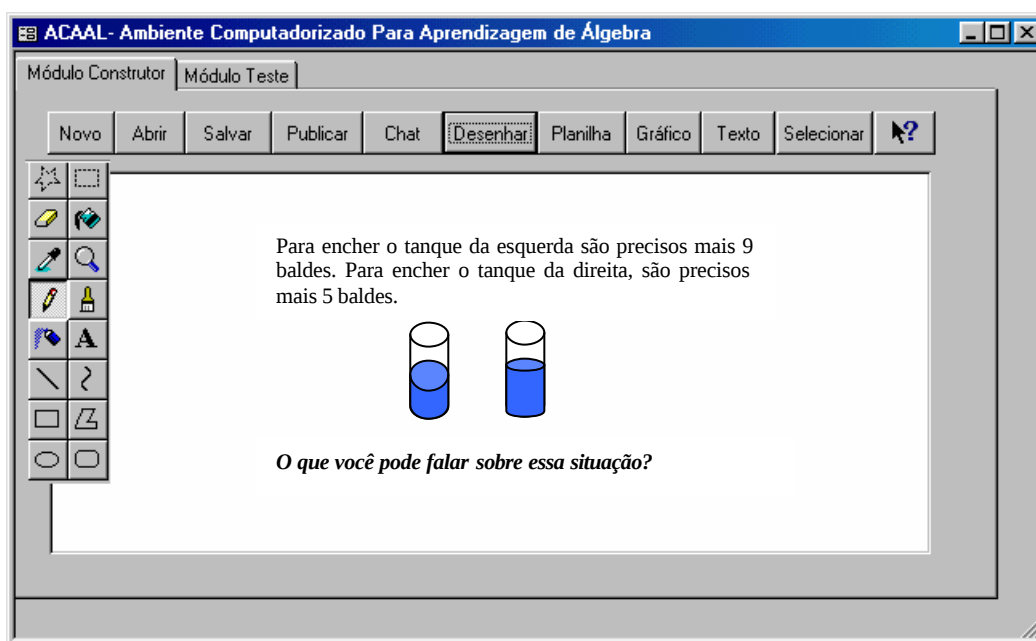


Figura 19: Editar uma situação motivadora

Os próximos passos, devem ser dados no sentido da produção de significados, sendo considerado legítimo a intervenção do professor tanto na ótica de Vygotsky, como de Piaget. Devendo o professor incentivar a produção de crenças-afirmações com as respectivas justificações em relação ao núcleo apresentado. Esse processo pode ser realizado pelos alunos de forma cooperativa ou individualizada. Duas formas possíveis de tratar esse processo são: primeiro produz-se as crenças-afirmações e justificações num novo documento utilizando-se dos recursos de edição; ou produz-se através do “chat” presente no ambiente. Convém ressaltar que esta ferramenta, atende uma particularidade dessa atividade, ou seja, as opções “publicar” e “reeditar” crenças-afirmações e justificações num formato mais elaborado. As próximas figuras procuram exemplificar estas considerações.

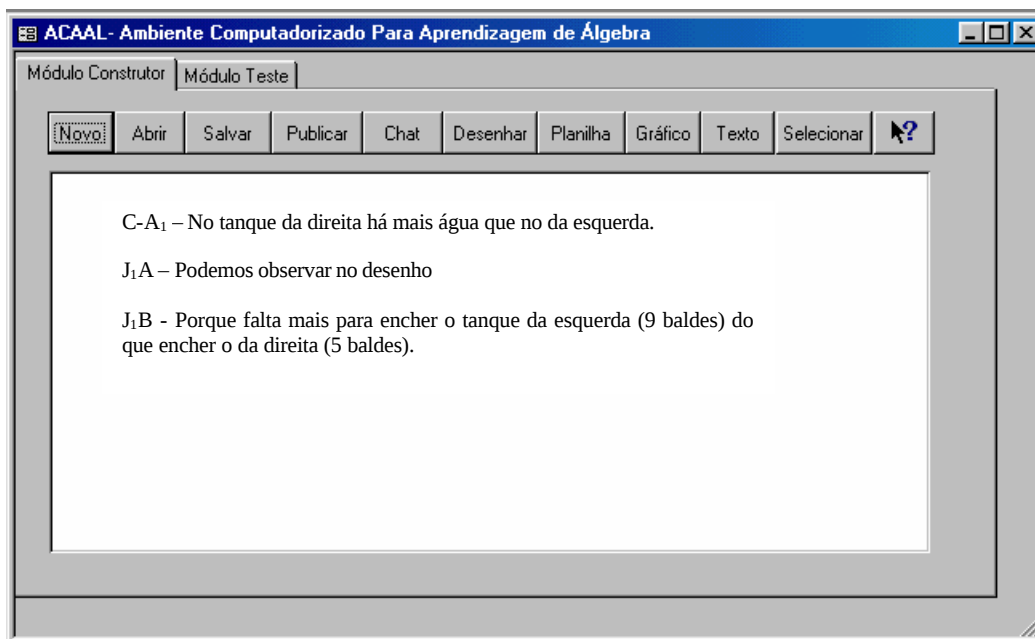


Figura 20: Produção de significados no ambiente

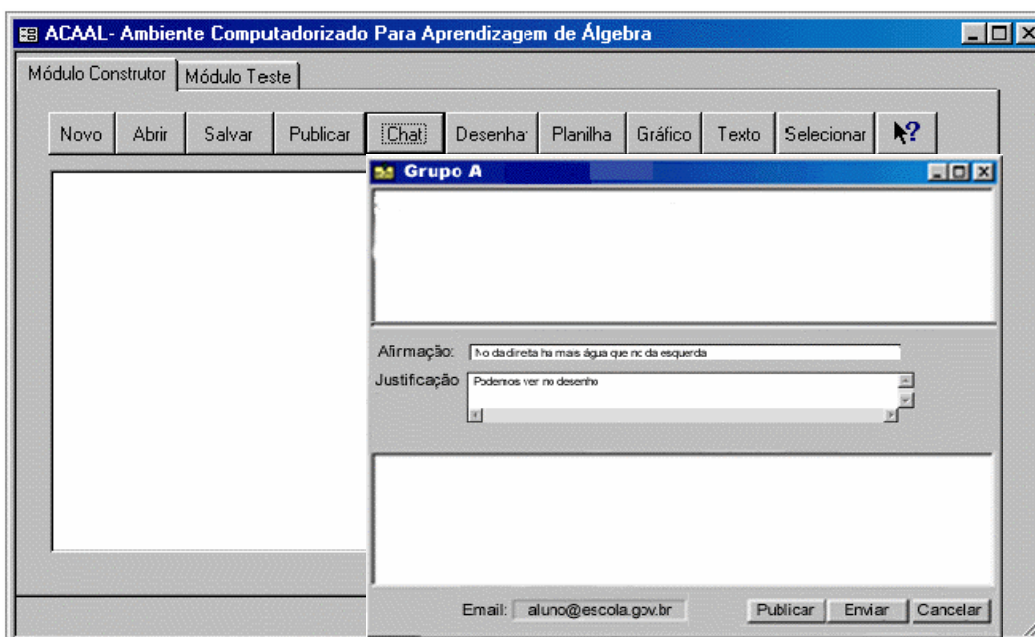


Figura 21: Exemplo de comunicação num chat que estrutura a comunicação por grupos dentro da proposta dos autores e evidência de necessidades particulares

Nessa fase, é importante a produção textual, seja pela produção de significados seja para evidenciar a necessidade de novas formas de representações que aparecerão. Cabe ao professor incentivar esse processo bem como dele tirar proveito.

Voltando ao exemplo, a próxima fase requer introduzir uma notação, a qual pode perfeitamente ser discutida dentro do ambiente. Deve-se ter em foco a produção de duas justificações para cada crença-afirmação, como forma de trabalhar as transformações diretas. Observe na figura:

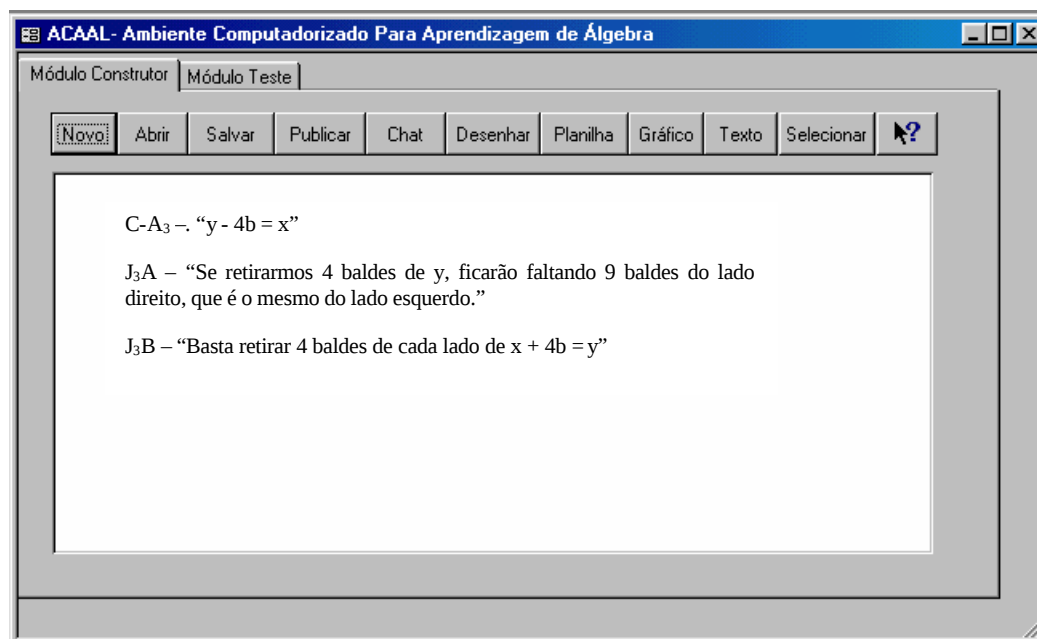


Figura 22: Produção de duas justificações e introdução de notação

A dinâmica do trabalho segue no sentido dos alunos envolverem-se de forma mais efetiva com a manipulação de transformações diretas, exatamente a próxima etapa antevista pelos autores. Aqui esta etapa é introduzida com um componente lúdico na forma de “charadas”. O objeto final desta fase é que, preparar os alunos para identificar e enunciar as “regras” ou as propriedades e princípios formais da álgebra. Como no caso da atividade dos tanques, os princípios aditivo e multiplicativo, permeiam o trabalho com as transformações. A figura a seguir permite visualizar essas múltiplas possibilidades.

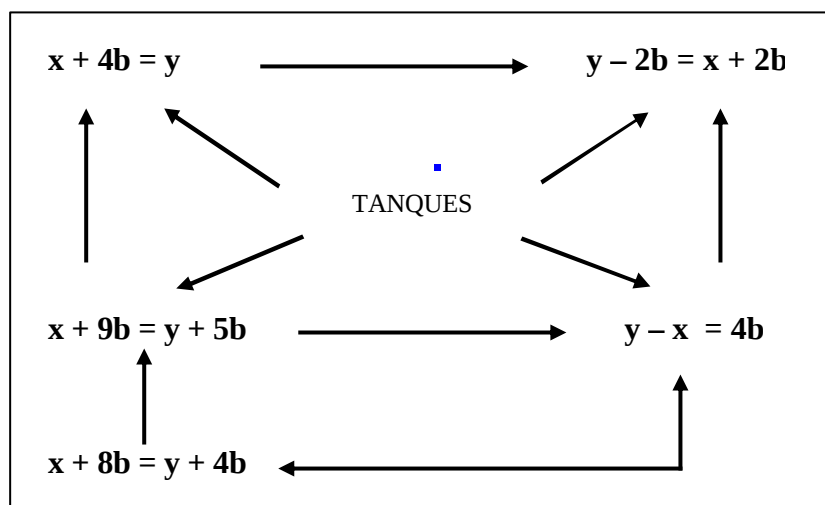


Figura 23: Reconhecimento de regras para as transformações

Outra forma possível para abordar das transformações diretas constitui-se de direcionar o trabalho de tal forma que, os alunos de posse de uma transformação, uma vez que ela já se constituem em novos objetos, encontre um novo núcleo, ou seja, o caminho inverso, pois um núcleo se constitui no momento que uma nova propriedade se define e é aceita como válida. Nesse processo é extremamente válido que a forma textual e de bricolagem sejam incentivadas pois Vygotsky argumenta que:

“o momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, então duas linhas completamente independentes de desenvolvimento, convergem”.[VYG, 1991].

Assim, a expressão “ $b = (y - x)/4$ ”, de certa forma “bem distante” do núcleo dos tanques, pode ser representada sob a ótica da produção de significados em relação a um novo núcleo de todo e partes como sendo um diagrama. Por exemplo:

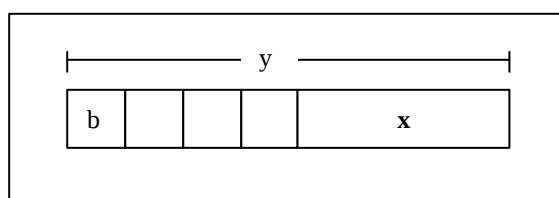


Figura 24: Produção de um novo núcleo e significados para uma expressão

Antes de passar para o “módulo teste” vamos apresentar uma sequência de telas que procuram exemplificar a publicação dos trabalhos em páginas web.

A dinâmica desse processo é simples: uma vez iniciada uma publicação pelo professor, por exemplo, os demais alunos, de forma individual ou em grupos, podem publicar as suas “crenças-afirmações”, “justificações”, bem como desenhos, tabelas, diagramas, em páginas próprias, criando-se apenas “links” para facilitar a navegação entre elas.

Outro ponto que merece destaque, é a organização e a estrutura do documento que está sendo criado, no sentido de oportunizar que este seja discutido e avaliado por todos.

Como exemplo fictício para caracterizar a organização das publicações, primeiro apresenta-se a tela onde aparece a situação motivadora publicada pelo professor, e em seguida a publicação do grupo C. Ambas realizadas através dos recursos de edição do módulo construtor.

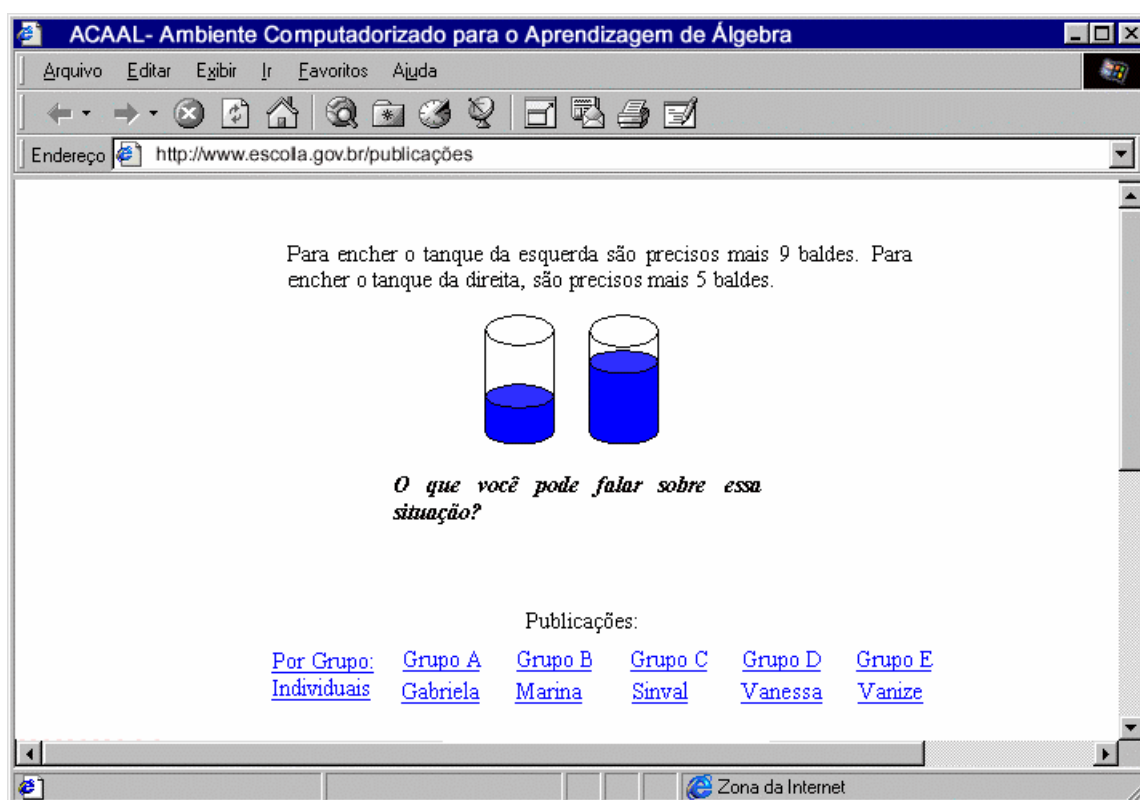


Figura 25: Publicação do professor

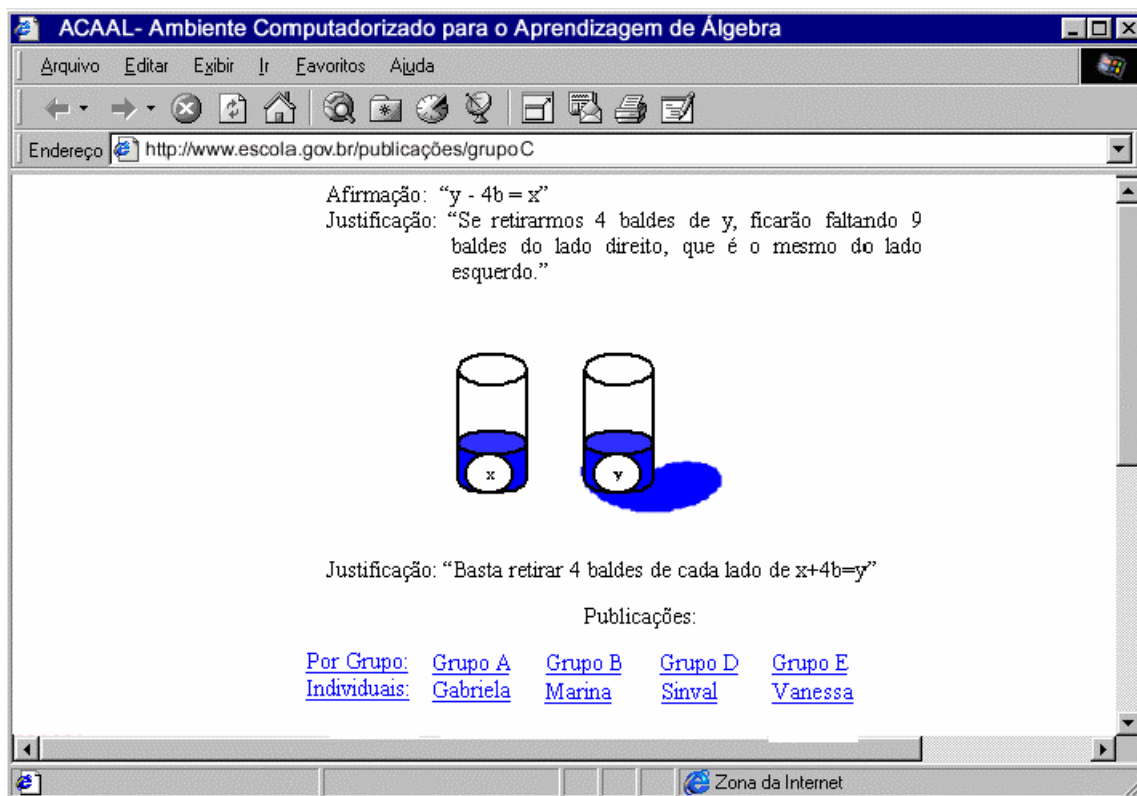


Figura 26: Publicação do grupo C

A próxima tarefa é a atividade no módulo teste. Vamos apresentar algumas telas que procuram caracterizar a sua atuação conforme descrevemos anteriormente. O jogo “corrida servirá como exemplo para explorar novamente as transformações diretas obtidas nas atividades do módulo construtor.

O “assistente” tem por objetivo facilitar essa tarefa, uma vez que fornece um conjunto de orientações. A nossa perspectiva é que o “assistente” torne-se “robusto” o suficiente para que, tanto o professor quanto o aluno, criem seus jogos de forma livre, misturando metáforas já conhecidas pelo assistente.

Uma vez selecionado no Menu a opção jogo, uma caixa de diálogo é apresentada e o usuário escolhe a opção Corrida no nosso exemplo. Nesse momento o assistente é ativado apresentando a seguinte tela que permite escolher a trajetória da corrida. No nosso caso, optamos por uma trajetória livre. Observe a figura a seguir:

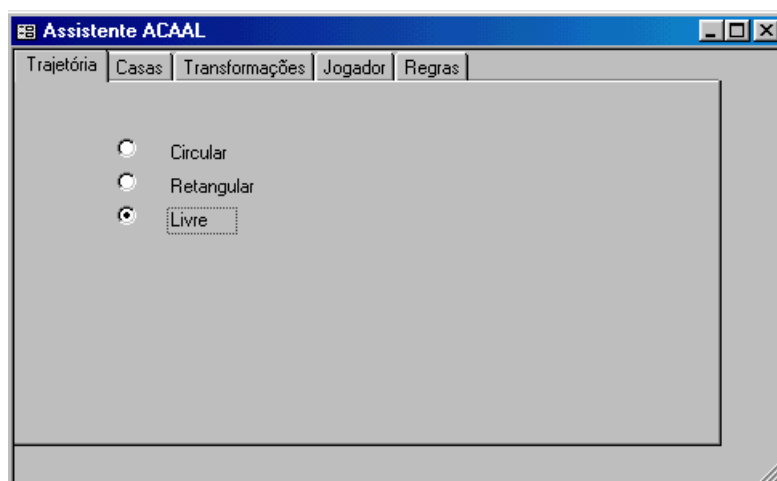


Figura 27: Escolha da trajetória

Na próxima etapa vamos definir, o número de casas que terá o jogo, quantas e quais delas vão apresentar efeitos especiais, qual o tipo de efeito será apresentado, como som, imagens, ou pequenas animações, as quais fazem parte do ambiente, bem como aquelas que poderão ser capturadas pelos usuários, bastando para isso indicar o “caminho” na caixa “selecionar efeito”.

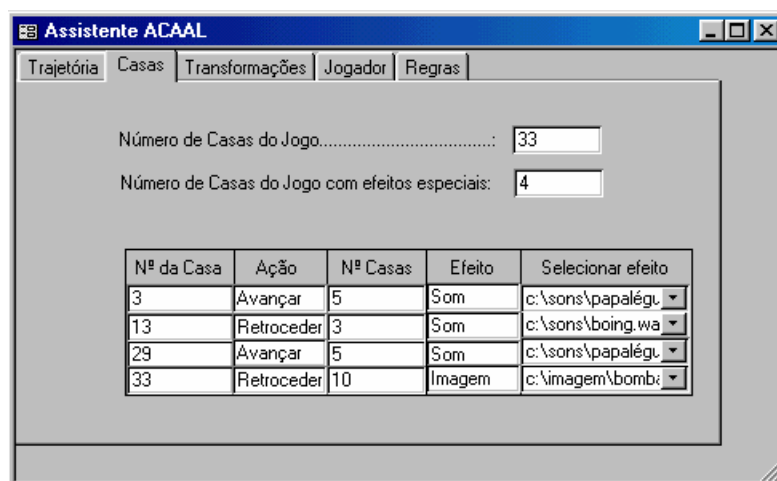


Figura 28: Características das casas do jogo

Em seguida definem-se as transformações diretas que serão utilizadas. Nesse o momento defini-se o número de transformações que se quer inserir na trajetória, bem como a transformação, a posição que ela ocupará na corrida e se vai ou não estar visível no momento do jogo. Observe na figura abaixo:

Número de Transformações.....: 3

Transformação	Nº Casa	Efeito
$x + 2b < y$	8	Visível
$y - 4b = x$	17	Visível
$x + 4b = y$	11	Invisível

Figura 29: Inserindo transformações no jogo

A formação dos pares tanto na perspectiva de Vygotsky quanto de Piaget, ocupa uma posição de destaque. As trocas sociais ou inter-individuais que os papéis dos sujeitos desempenham é geradora de conflitos sócio-cognitivos o que nos fornece um potente indicador na hora de compor os pares. Os seguidores de Vygotsky sugerem que deve-se evitar “abismos semânticos” entre os pares, e os Piagetianos recomendam que sujeitos de posições adversas sejam colocados lado a lado para solucionarem problemas. A figura abaixo tenta expressar esta orientação dando oportunidade para os sujeitos definirem seus pares e a forma como gostariam de aparecer no jogo. Duas formas foram previstas para esta representação: indivíduos ou grupos representados por letras ou algumas formas geométricas disponíveis no assistente.

Número de Jogadores.....: 2

Identificação

Nº	Nome:	Apresentação do Jogador
1	Sinval de Oliveira	S
2	Sandro Sauro	2S

Figura 30: Definição dos jogadores

O “assistente” pode oferecer algumas regras para o jogo, mas a perspectiva é que ele possa incorporar as regras definidas de forma cooperativa, tal qual preconizada por Constance Kamii, onde os jogos, em particular os de regras e competição constitui-se numa poderosa forma para trabalhar a autonomia da crianças.

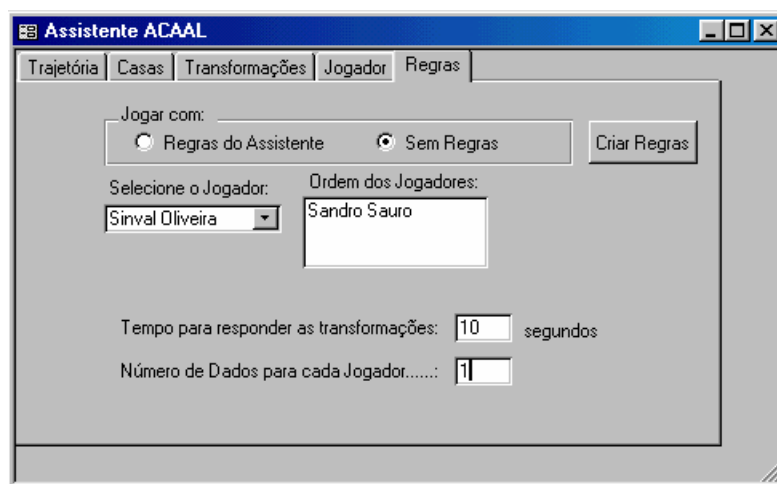


Figura 31: Definindo regras para o jogo

Realizados esses passos o “assistente” disponibiliza na tela principal do módulo teste, o jogo para o usuário definir a trajetória e dimensionar com cliques do mouse, bem como o início e o fim do jogo. Para jogar, basta clicar no botão jogo do menu principal e escolher a opção jogar que o número de dados indicados estará disponível. Observe na figura algumas situações que poderão ocorrer.

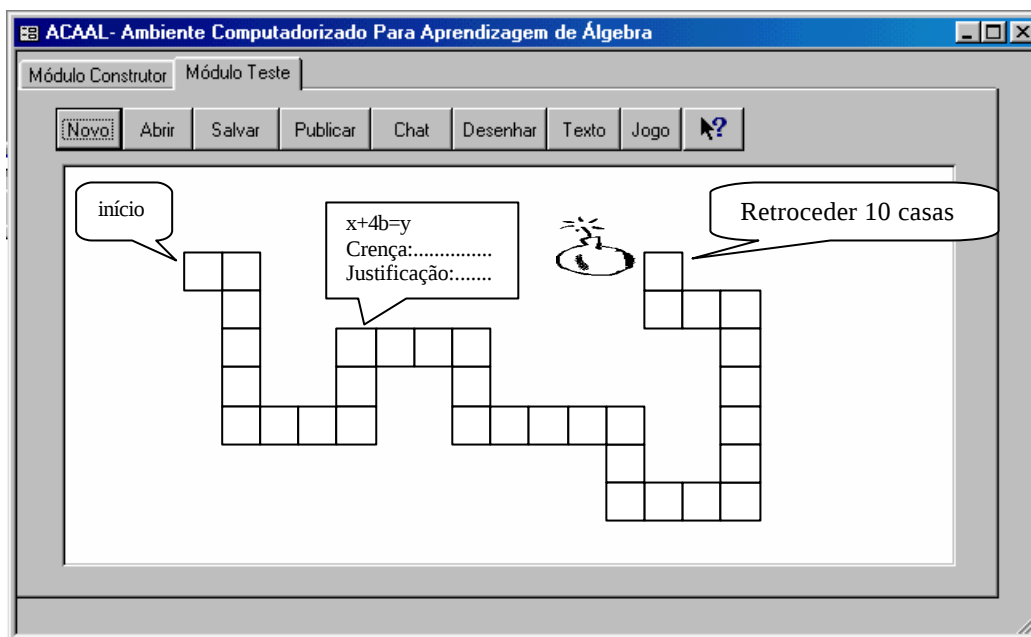


Figura 32: Dinâmica do jogo

A dinâmica dos jogos é do domínio das crianças, acreditamos que esse esboço seja suficiente. A idéia central é sempre a mesma. Trabalhar na direção de desenvolver a idéia de que manipular diretamente as expressões é legítima. A questão de melhorar a “influência” no domínio da representação algébrica dos alunos é algo que o ambiente pode contribuir, pois no interesse de vencer partidas e vivenciar toda emoção que os jogos proporcionam os alunos envolve-se num processo de produzir uma transformações “bem difíceis” para fazer parte do jogo.

É importante nesse momento ressaltar algumas questões subjacentes ao trabalho. Dentre elas destacamos:

- A dimensão do brincar, do aprender brincando, que permeia este trabalho deve ser entendida tal qual Ramos:

“ o aprender brincando aqui tem o sentido de que é possível aprender através de atividades que sejam realmente interessantes e significativas. Significa que a aprendizagem deve porvir da ação efetiva do aprendiz, seja ação motora, ou ação intelectual. É preciso perceber que o conhecimento buscado não está na sala de aula, ele faz parte do cotidiano, as pessoas estão imersas nele”. [RAM, 1996].

- Um verso de uma poesia de Carlos Drumond de Andrade, que permite buscar um releitura das nossas finalidades educativas, como também justificar esforços para que esta proposta seja futuramente colocada a disposição de todos:

“brincar com a criança não é perder tempo, se é triste ver crianças sem escola, mais triste ainda é vê-las sentadas, enfileiradas em salas de aulas sem ar, fazendo exercícios estéreis sem valor para formação do homem”.

6. Conclusões

Este estudo parte da hipótese de que os artefatos das novas tecnologias, em particular os computadores, provocam uma mudança nas estruturas físicas, cognitivas, e mediadoras da sala de aula.

Isto quer dizer que, enquanto no paradigma tradicional ao conceber a dinâmica do processo educativo, onde estes ingredientes são articulados quase na sua totalidade de forma unidirecional, limitando a qualidade e as potencialidades de todos os componentes mediadores neste cenário. Particularmente este processo numa aula de álgebra tradicional pode ser expresso assim: o professor fala, escreve no quadro, o quadro assume característica de um mediador físico, e por sua vez, “fala” para os alunos, e estes anotam. A figura a seguir procura caracterizar estas relações.

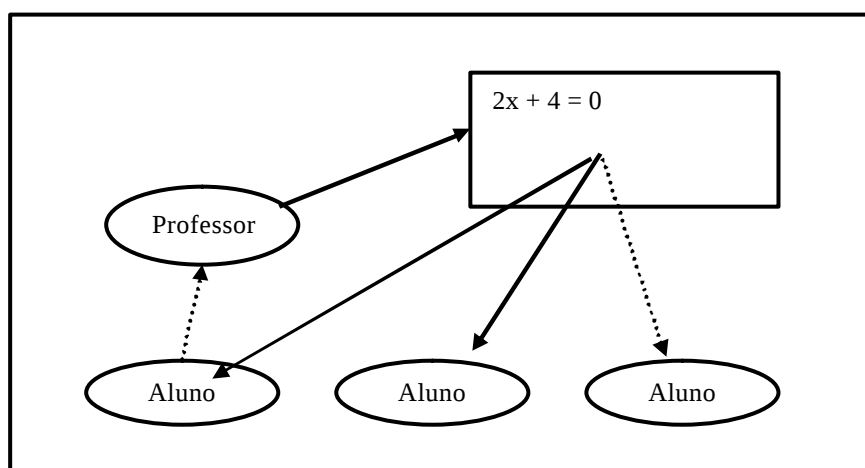


Figura 33: Produção de significados numa aula tradicional de álgebra

Por outro lado não se considerava fundamental centrar todas as ações de aprendizagem no computador. Admite-se que não só o cenário físico, mas também o desenho do espaço das interações interpessoais e o “espaço psicológico e operatório” dos sujeitos são afetados com o uso das novas tecnologias.

Tinha-se também como claro que compor um cenário computadorizado para aprendizagem de álgebra exigiria reflexão e fundamentação. A figura a seguir procura expressar a forma como pode ser percebido o processo de produção de significados, bem como a forma pela qual os atores interagem.

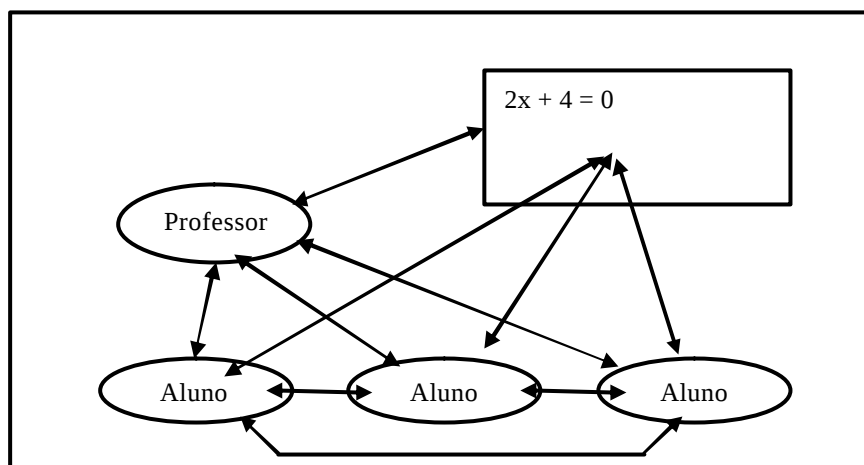


Figura 34: Produção de significados na perspectiva de Lins e Gimenez

Os trabalhos que explicitam a potencialidade das novas mídias na aprendizagem de álgebra revelam que os seus atores mudam de papéis, de aprendiz para feiticeiro, de receptor para mediador, de feiticeiro à aprendiz – bem como atitudes cognitivas, que outrora estavam esquecidas ou despercebidas, retornam. Dentre eles as inferências, as conjecturas e hipóteses, novas formas de representar, de produzir significados, e de “significados”. A figura a seguir procura expressar este novo cenário, mais dinâmico e flexível.

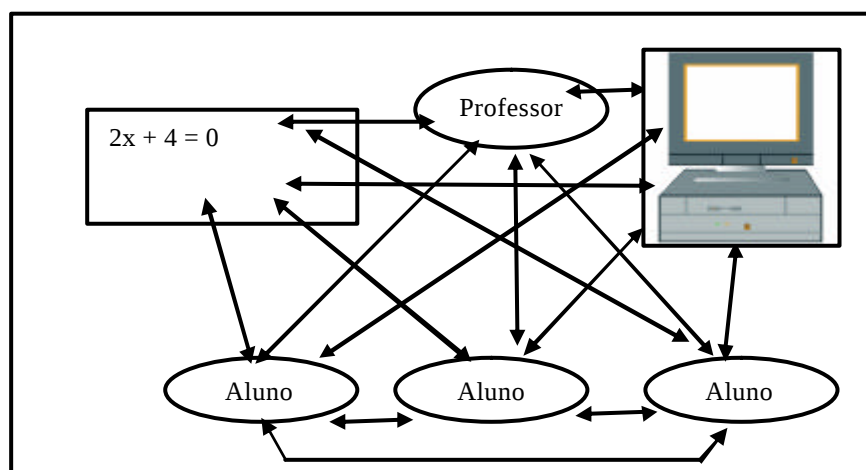


Figura 35: Produção de significados na perspectiva de um ambiente computadorizado

Essa percepção nos parece consubstanciada por Lévy que explica essa configuração com uma metáfora chamada hipertexto da seguinte forma:

“Um conjunto de nós conectados pelas ligações. Os nós podem ser palavras, páginas, imagens, gráficos ou pares de gráficos, seqüências sonoras, documentos complexos que podem ser, eles próprios, hipertextos. Os itens de informação não estão ligados linearmente, como numa corda de nós: cada um deles, ou a maior parte, estende as suas ligações em estrela, de um modo reticular. Navegar num hipertexto é, portanto desenhar um percurso numa rede que pode ser tão complicada quanto possível. Porque cada nó pode, por seu turno, conter toda uma rede.[LEV, 93p.34]

Outro aspecto que emerge com força neste estudo, é a necessidade da produção de significados de diferentes núcleos semânticos. Isso caracteriza um objetivo educacional bastante forte não somente para educação algébrica mas também para a educação matemática, em geral, a construção de significados dessa forma leva ao equilíbrio entre o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas, de investigar, e de explorar situações, com o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, a capacidade de usar as ferramentas e linguagens técnicas desenvolvidas com maior facilidade.

Portanto, é preciso ver a produção de significados de maneira ampla, dentro e fora da matemática, pois é preciso entender que a capacidade de usar ferramentas, ou investigar situações envolve modos próprios de pensar, e que isto deve ser entendido como uma finalidade educativa, pois do que adianta ver um gráfico da variação da cesta básica, se o único significado que é produzido é o de que aquilo representa uma função. É preciso pensar com gráficos, examinar as relações quantitativas e também é necessários pensar com diagramas.

Entre as criança, é comum o brinquedo de transferências de códigos, que consiste em escrever mensagens trocando o significado usual das letras e números, o que significa dizer que a letra “a”, por exemplo, pode assumir muitas possibilidades. Com esta brincadeira é possível vislumbrar que a noção de variável está sendo construída, e também compreender melhor a seguinte afirmação de Vygotsky , “*ho brinquedo a criança sempre se comporta além do seu comportamento habitual de sua idade*”, e por outro lado, conceber álgebra como “cálculo com letras” como parece ser tudo o que praticamente é encontrado na maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado, sem dúvida, perde-se algumas boas oportunidades de aprender álgebra.

Dentre os software estudados, as planilhas eletrônicas, constituem-se num campo fecundo para a exploração de significados, não só algébricos, mas é preciso usá-

las como instrumentos integrados ao desenvolvimento projetos de estudos, combinados com as metodologias de resolução de problemas ou modelagem matemática, na produção de gráficos, na produção de significados para problemas que não sejam necessariamente os dos livros didáticos.

As planilhas permitem trabalhar com uma faixa ampla de problemas de proporcionalidade, que por sua vez abrange uma classe incrivelmente ampla de ocorrências concretas com diferentes núcleos possíveis. Mas por que o raciocínio com proporções é tão importante no aprendizado de álgebra?

Um dos argumentos que encontrados que é esclarecedor é o seguinte: o raciocínio com proporções envolve “pensamento qualitativo”, o que significa dizer que uma comparação não depende de valores específicos. Veja o exemplo dado por [POST, et al. In idéias da álgebra]: *“Se Nick, ao correr, desse menos voltas na pista e gastasse mais tempo do que ontem, sua velocidade seria maior, menor, igual, ou impossível dizer”*.

Nesta situação o raciocínio qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado das duas taxas, guardar a informação e então comparar as interpretações de acordo com alguns critérios predeterminados. Piaget referiu-se a esse processo como operar com operações, isto é, a interpretação de cada uma dessas razões é uma operação em si e por si, e comparação é outro nível de operação.

O design proposto para a introdução da aprendizagem da álgebra toma como ponto de partida uma proposta para a educação algébrica sólida e consistente, e seu foco está na produção de significados.

O *design* proposto apresenta algumas características pedagógicas importantes identificadas na base teórica:

- Permite a construção de atividades tanto pelo professor como os alunos de forma cooperativa;
- Permite ao usuários produzir novas transformações algébricas motivados através de jogos previamente estruturados no ambiente.
- Estrutura as interações inter-indivduais e grupais promovendo a construção dos significados pelo registro escrito e não apenas verbal.
- Cria um registro ou memória do processo de construção de significados no grupo.

Os dois últimos pontos são condições fundamentais para a realização de um bom processo avaliativo da grupo. Essa é uma contribuição importante da proposta aqui apresentada, o registro de todas as etapas da produção de significados se aproxima da perspectiva de avaliação da aprendizagem de Hernandez¹⁶ quando sugere o uso do “portifólio” como um instrumento capaz de fornecer uma leitura com mais propriedade do processo educativo, e por outro lado. Hernandez expõe o que as abordagens tradicionais tem de mais perverso, que é o registro apenas de “momentos” estanques, ou de “fotografias”. Esse tipo de avaliação trabalha em geral com médias aritméticas – muitas vezes enganosas – que são interpretadas na perspectiva daquilo que falta produzir, e não daquilo que já foi produzido. O professor assume a tarefa de trazer o aluno para onde ele quer, sem realmente saber onde ele está.

Este trabalho partiu da premissa que o computador pode criar novas e ricas condições para o aprendizado da matemática. O ambiente desenhado é um exemplo que, acredita-se, valida essa premissa, pois crê-se que é possível uma introdução sólida e significativa para o aprendizado da álgebra com o uso do mesmo. A proposta partiu também da premissa de que é preciso considerar que as crianças estão imersas num mundo que muda à medida em que mudam as tecnologias, pois estas determinam novos modos de ser, de pensar, de falar, de ler, de escrever, de fazer, de representar, de aprender, de conhecer ...

No contexto atual uma das novas característica da sociedade é a demanda gerada para se trabalhar com diferentes tipos de linguagens e representações. Outra premissa que norteou, e que acredita-se tenha sido atendida, a proposta apresentada é a de que o trabalho em ambientes computadorizados cria oportunidades de novas formas de interação e de uso de novas linguagens icônico-gráficas. A hipótese subjacente é a de que a manipulação de ambientes computacionais pode gerar habilidades e competências no uso de sistemas simbólicos. Essa competência pode ser transferida para outras situações gerando assim a promoção de um aprendizado mais facilitado da álgebra.

Este trabalho apresenta uma contribuição importante na área de CSCL (aprendizagem colaborativa suportada por computador) e CSCW (trabalho cooperativo suportado por computador), pois sugere a reestruturação de uma ferramenta de comunicação de uso geral (o chat) para uma situação de caráter mais específico,

¹⁶ HERNADEZ, Fernando. VENTURA, Montserrat. A Organização e o Currículo por Projetos de

dando suporte a uma nova arquitetura de interações inter-individuais. Esta é uma necessidade na área de ambientes cooperativos como sugerem Mc'Connell¹⁷ e Arriada.

Como sugestões de trabalhos futuros tem-se:

- Empreender esforços no sentido de implementar e promover ensaios e testes práticos de utilização desta proposta com vistas a torná-la uma ferramenta de domínio público;
- Um estudo mais detalhado sobre o papel das planilhas eletrônicas no aprendizado da álgebra, com base em projetos de intervenção pedagógica que levem os professores de matemáticas a vislumbrar as potencialidades destas ferramentas.

BIBLIOGRAFIA

- [BAR, 1988] BARROS Jorge, P. D., D'AMBROSIO, Ubiratam. Computadores, Escola e Sociedade. São Paulo. Editora Scipione Ltda, 1988.
- [BEC, 1997] BECKER, Fernando. A Epistemologia do Professor: o Cotidiano da Escola. Rio de Janeiro: Vozes, 1993.
- [BEC, 1997] BECKER, Fernando. Da Ação a Operação: O Caminho da Aprendizagem em J. Piaget e P. Freire. 2ª edição. Rio de Janeiro: DP&A Editora Palmarinca, 1997.
- [BIC, 1999] BICUDO, Maria A. Viggiani. (Org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.
- [BIZ, 1999] BIZELLI, Maria H. S. S., BORBA, Marcelo de Carvalho. O Conhecimento Matemático e o Uso de Software Gráficos. In: Educação Matemática em Revista, nº 7, ano 6, 1999. pp.45-54.
- [BON, 1998] BONGIOLO, Cyntia Elvira, et .al. Subindo e Escorregando: Um Jogo para Introdução do Conceito de Adição de Números Inteiros: In IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.
- [BOR, 1998] BORRÕES, Manuel Luís Catela. O Computador na Educação Matemática. V Concurso de Materiais de Apoio à Integração e Utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação nos Ensinos Básico e Secundário. Lisboa 1998.

- [BRU, 1975] BRUNER, Jerome S. Uma Nova Teoria da Aprendizagem. 3ª edição. Rio de Janeiro: Bloch Brasileira. INL 1975.
- [BRU, 1997] BRUNER, Jerome. Realidade Mental: Mundos Possíveis. Porto Alegre: artes Médicas 1997.
- [COX, 1995] COXFROD, Arthur F. SHULTE, Alberto P. (Orgs). As Idéias da Álgebra. Tradução Hygyno h. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.
- [GAR, 1996] GARNIER, Catherine et .al. Após Vygotsky e Piaget: Perspectivas Social e Construtivista Escolas Russa e Ocidental. Porto Alegre. Artmed,1996.
- [GAV, 1998] GAVINA, Maria Alice, SANTAROSA, Lucila Maria, Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados: In IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.
- [GEL, 1997] GELLER, Marlise, PAPROCKI, Leandro Luiz, SILVEIRA, Sidnei R. A Utilização de Jogos Educativos Computadorizados no Processo de Ensino Aprendizagem. Universidade Luterana do Brasil.
- [GIO, 1992] GIOVANNI, José Ruy. CASTRUCCI, Benedito. GIOVANNI Jr, José Ruy . A Conquista da Matemática. São Paulo: FTD, 1999.
- [FAR, 1998] FARIA, Anália Rodrigues de. O Desenvolvimento da Criança e do Adolescente Segundo Piaget. 4ª edição. São Paulo: Editora Ática, 1998.

- [LAT, 1992] LATAILLE, Yves de. et .al. Piaget, Vygotsky, Wallon: Teorias Psicogenéticas em Discussão. 10ª edição. São Paulo: Summus editorial, 1992.
- [LÉV, 1993] LÉVY, Pierre. As Tecnologias da Inteligência: O Futuro do Pensamento na Era da Informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
- [LÉV, 1993] LÉVY, Pierre. A Máquina do Universo: Criação, Cognição e Cultura Informática. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- [LIN, 1992] LINS, Romulo C. “A Framenwork for Understanding what Algebraic Thinking is. Tese de doutorado submetida a university of Nottingham em junho 1992.
- [LIN, 1997] LINS, Romulo C. GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. Campinas SP:Papirus, 1997.
- [LIN, 1997] LINS, Romulo C. “Álgebra e Pensamento Algébrico na Sala de Aula”. In A Educação Matemática em Revista – SBEM, nº 2 1º Sem. 94. São Paulo.
- [MAC, 1996] MACHADO, Nilson José. Epistmologia e Didática: As Concepções de Conhecimento e Inteligênica e a Prática Docente. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 1996.
- [MOR, 1986] MOREIRA, Mércia. O Uso do Computador na Educação: Pressupostos Psicopedagógicos. In Educação em Revista. Belo Horizonte, dez 1986. pp.13-17.

- [MOY, 1997] MOYSÉS, Lucia. Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática. Campinas SP: Papirus, 1997.
- [PAL, 1999] PALIS, Gilda de La Ro cque. Uso de Computadores e o Papel do Professor: In; Revista do Professor de Matemática. nº 41, 3º quadrimestre, 1999. pp.23-29.
- [PAP, 1986] PAPERT, Seymour. Logo: Computadores e Educação . São Paulo: Editora Brasiliense S.A. 1986.
- [PAP, 1994] PAPERT, Seymour. A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na era Informática. Porto Alegre: Artmed, 1994.
- [PIA, 1991] PIAGET, Jean. Seis Estudos de Psicologia. 18ª edição. Rio de Janeiro: Florença Universitária, 1991.
- [PIA, 1991] PIAGET, Jean. Para Onde Vai a Educação. 8ª edição. Rio de Janeiro. Livraria José Olympio Editora, 1984.
- [PIA, 1986] PIAGET, Jean. A Linguagem e o Pensamento da Criança. 4ª edição. São Paulo: Martins Fontes, 1986.
- [PIA, 1978] PIAGET, Jean. A Formação do Símbolo na Criança. 3ª edição. Zahar Editores, 1978.
- [RAM, 1996] RAMOS, Edla M. Faust. Análise Ergonômica do Sistema Hipernet Buscando o Aprendizado da Autonomia. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Florianópolis, 1996.

- [RAM, 1997] RAMOS, Edla M. Faust, CARDOSO, Claudine M. AALO: Um Ambiente para Aprendizagem de Lógica. Laboratório de software educacional EDUGRAF – Universidade Federal de Santa Catarina.
- [SCH, 1997] SCHLUMANN, Analúcia, CARRAEHER, David, SPINILO, Alinea, et al. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. 2ª edição Recife. Ed. Universitária da UFPE, 1997.
- [SID, 1988] SIDERICOUDES, Odete. A Utilização do Computador no Ensino de Matemática. NIED – Núcleo de Informática Aplicada a Educação. Universidade Estadual de Campinas. Meno nº 17 1988.
- [SIL, 2000] SILVA, Benedito Antônio da et al. Tratamento Gráfico de funções em Ambiente Computacional. Anais do I Congresso Sul-Brasileiro de Informática na Educação. Areas Exatas: Matemática – física – Química. Florianópolis, 2000.
- [SIL, 1998] SILVEIRA, Milene S. GIARETTA, Letícia da Luz, ALVES, Tatiana de Oliveira. CAMALEÃO: Ferramenta de Apoio a Confecção de Jogos Educativos Computadorizados. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998.
- [SIM, 2000] SIMÃO, Lucélio Ferreira. O Uso de Softwares Educativos no Ensino de Funções. Anais do I Congresso Sul-Brasileiro de Informática na Educação. Areas Exatas: Matemática – física – Química. Florianópolis, 2000.

- [SOU, 2000] SOUZA, Aguinaldo R. SILVA, Gilmara Ap. da . Proposta para o estudo da função/equação quadrática utilizando o software Parábola no ensino fundamental e médio. Anais do I Congresso Sul-Brasileiro de Informática na Educação. Areas Exatas: Matemática – física – Química . Florianópolis, 2000.
- [STA, 1990] STAHL, Marimar M. Software Educacional: Características dos Tipos Básicos. Anais do 1º Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. 19 a 21 de novembro de 1990- Rio de Janeiro.
- [TRI, 1996] TRINDADE, José Análio de Oliveira. Os obstáculos Epistemológicos e a Educação Matemática. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Florianópolis – SC, 1996.
- [VAL, 1998] VALENTE, José Armando. Questão do Software: Parâmetros para o Desenvolvimento de Software Educativo. NIED – Núcleo de Informática Aplicada a Educação. Universidade Estadual de Campinas. Meno nº 24 1988.
- [VAL, 1998] VALENTE, José Armando, (Org) Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação. 2. ED. Campinas SP: UNICAMP/NIED, 1998.
- [VYG, 1991] VYGOTSKY, Lev Semenovitch. A Formação Social da Mente. Organizadores: Michael Cole et al; Tradução: José Cipello Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

McCONNELL D. Implementing computer supported cooperative learning. 2nd ed.
Kogan Page.London, 1999.