

# Uma Análise Comparativa de Técnicas de Mapeamento de Símbolos em Constelações de Sinais

Rafael Fernandes Lopes<sup>\*†‡</sup>, Carlos Danilo Miranda Regis<sup>\*†</sup>,  
Waslon Terllizzie Araújo Lopes<sup>\*†</sup> e Marcelo Sampaio de Alencar<sup>\*†</sup>

<sup>\*</sup>Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil

<sup>†</sup>Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Campina Grande, Brasil

<sup>‡</sup>Instituto Federal do Maranhão (IFMA), São Luís, Brasil

E-mail: {rafaelf, danilo, waslon, malencar}@iecom.org.br

**Resumo**— De forma a melhorar o desempenho dos sistemas de comunicações digitais, o esquema de mapeamento de símbolos Gray é comumente empregado. Contudo, estudos mostram que, em determinados tipos de constelações, o mapeamento Gray não é possível, como é o caso em constelações TQAM. Este artigo apresenta uma comparação entre quatro métodos de otimização aplicados ao problema do mapeamento de símbolos. A penalidade de codificação Gray e a BER resultante de cada um dos métodos são as métricas utilizadas na avaliação e comparação.

**Abstract**— The Gray coding scheme is commonly used to improve the performance of digital communication systems. However, studies show that, in certain types of constellations, the Gray coding is not possible, as is the case with TQAM constellation. This paper presents a comparison of four optimization methods applied to the problem of symbols mapping. The Gray coding penalty and the resulting BER from each of the methods are the metrics used for evaluation and comparison.

## I. INTRODUÇÃO

Uma das formas de melhorar o desempenho de sistemas de comunicações digitais é utilizar esquemas de mapeamento de constelações de sinais que gerem menores taxas de erro na recepção dos sinais recebidos. Por esse motivo estudos têm sido realizados para estabelecer métodos de busca para o melhor mapeamento em diferentes esquemas de modulação. Dentre os esquemas de mapeamento existentes o que mais se destaca é o código Gray binário. Ele mapeia adequadamente os esquemas de modulação M-PAM (*Pulse Amplitude Modulation*), M-PSK (*Phase-shift Keying*) e M-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), reduzindo a taxa de erro de *bit* (BER – *Bit Error Rate*) média do sistema [1].

Entretanto, em alguns tipos de constelações, como as TQAM (*Triangular Quadrature Amplitude Modulation*), realizar o mapeamento Gray perfeito não é possível, uma vez que existem mais de quatro regiões adjacentes a cada símbolo. Dessa forma, sequências binárias com dois ou mais *bits* de diferença acabam por serem associadas a símbolos vizinhos, acarretando um aumento na BER do sistema [2].

A associação de sequências binárias a cada símbolo da constelação deve ser realizada de forma a minimizar o número de erros de *bit* quando ocorre um erro de símbolo. Nesse

contexto, a busca por uma solução ótima para esse problema se caracteriza como um problema NP (Não Polinomial) e, por conta disso, alguns trabalhos foram realizados na tentativa de estabelecer um método prático para encontrar a melhor solução (ou pelo menos soluções sub-ótimas) para o problema.

Quando ocorre um erro de símbolo é provável que o símbolo transmitido seja detectado como um de seus vizinhos mais próximos. Assim, para obter o mapeamento ótimo de uma constelação, o número médio da diferenças de *bit* entre um símbolo e seus vizinhos, denominada penalidade de codificação Gray (GCP – *Gray Coding Penalty*), deve ser minimizada. Em geral, para uma constelação  $M$ -ária arbitrária, são necessárias  $M!$  pesquisas para encontrar o mapeamento de *bit* ótimo, requerendo um tempo de processamento elevado para a busca. Esse fato torna o método impraticável para uma constelação com um grande número de símbolos.

São propostos na literatura vários esquemas de mapeamento de *bits*. Entre os trabalhos que buscam estabelecer uma melhor solução para o mapeamento pode ser citado o artigo de Foschini *et al.* [3] que apresenta um esquema de mapeamento ideal para a constelações QAM utilizando um algoritmo de busca baseado em um método de gradiente.

O trabalho de Yang [4] propõe um método de busca, baseado em algoritmos genéticos, para estabelecer uma solução para o problema do mapeamento de constelações de sinais que minimize a BER do sistema. Em [5] os autores propõem um esquema de mapeamento sub-ótimo para constelações TQAM regulares, ótimas e sub-ótimas.

Nesse contexto, este artigo apresenta uma comparação entre quatro métodos de otimização aplicados ao problema do mapeamento de símbolos em constelações de sinais, a saber: (a) algoritmo de busca com mapeamento iterativo de linhas e colunas (MILC), (b) algoritmo de busca com mapeamento recursivo (MREC), (c) algoritmos genéticos (AG) e (d) algoritmo híbrido de busca baseado em seleção clonal e mutação genética. Essa comparação visa identificar pontos fortes e fracos de cada técnica e seu grau de adequação a determinados tipos de constelação. Particular atenção é dada às constelações TQAM.

A próxima Seção apresenta o esquema de modulação TQAM. Na Seção III são apresentados aspectos relativos ao processo de mapeamento de *bits* em constelações de sinais. A Seção IV apresenta o algoritmo híbrido utilizado para otimizar o processo de mapeamento de constelações TQAM. Na Seção V são discutidos os resultados obtidos e na Seção VI as conclusões e trabalhos futuros serão apresentados.

## II. ESQUEMAS DE MODULAÇÃO EM QUADRATURA

A combinação de esquemas de modulações em fase e amplitude iniciou com os pontos em círculos [6], [7] e em 1962 Campopiano e Glazer criaram a distribuição QAM quadrada, também chamada de SQAM (*Square Quadrature Amplitude Modulation*) [8].

O SQAM mantém uma distância mínima entre os pontos do sinal e tem o método de detecção mais fácil. Os vários sistemas de comunicações digitais que utilizam esquemas de modulação de alta ordem (16 ou mais símbolos) têm adotado o SQAM (Figura 1). Porém, outras constelações se destacam em relação à eficiência de transmissão, como por exemplo o *honeycomb*, mas têm receptor mais complexo [2].

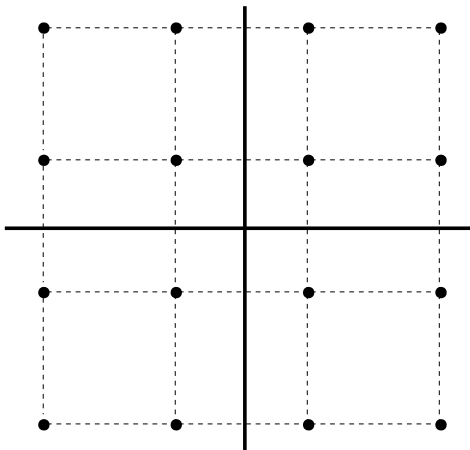


Fig. 1. Constelação 16-SQAM.

A partir da procura de novas constelações que superam o SQAM convencional, mantendo uma baixa complexidade na detecção, foi proposto um esquema de modulação chamado QAM triangular ou TQAM (Figura 2), cujos pontos da constelação representam vértices de triângulos equiláteros [2].

### A. Constelações TQAM

Na constelação TQAM os sinais são dispostos de forma mais densa que em constelações SQAM, porém preservando a distância mínima entre símbolos adjacentes igual a  $2d$ . Uma vez que a constelação é mais compacta que a SQAM, pode ser um sistema mais eficiente em termos da utilização dos recursos de energia.

As regiões de decisão dos símbolos no TQAM são mapeadas por meio de hexágonos e o número de símbolos da constelação é dado por  $M = 4^k$ , em que  $k \in \mathbb{Z}^+$ . O limiar entre duas regiões de decisão apresenta distância  $d$ , conforme ilustrado na Figura 3.

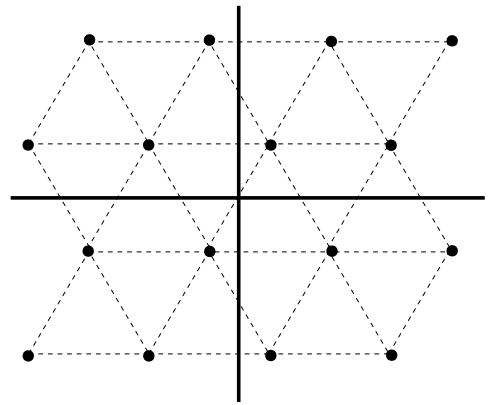


Fig. 2. Constelação 16-TQAM.

As energias médias por símbolo para o 16-SQAM ( $E_{s16}$ ) e para o 16-TQAM ( $E_{t16}$ ) são dadas por [2]

$$E_{s16} = 10d^2, \quad (1)$$

$$E_{t16} = 9d^2. \quad (2)$$

A partir das Equações 1 e 2 pode ser obtida a economia de energia ( $PG_{16}$ ) do esquema 16-TQAM em relação ao 16-SQAM, dado por

$$\begin{aligned} PG_{16} &= 10 \log_{10} \left( \frac{E_{s16}}{E_{t16}} \right) \\ &= 0.46 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (3)$$

Para o 64-TQAM a energia média por símbolo é dada por

$$E_{t64} = 37d^2, \quad (4)$$

e a economia é dada por

$$\begin{aligned} PG_{16} &= 10 \log_{10} \left( \frac{E_{s64}}{E_{t64}} \right) \\ &= 0.55 \text{ dB} \end{aligned} \quad (5)$$

em que  $E_{s64}$  é a energia média por símbolo do 64-SQAM, que é igual a  $42d^2$ .

## III. MAPEAMENTO DE SÍMBOLOS EM CONSTELAÇÕES TQAM

O mapeamento de símbolos em constelações de sinais é um problema clássico relativo ao projeto de sistemas de comunicações digitais. A associação de sequências binárias a cada símbolo da constelação deve ser realizada de forma a minimizar o número de erros de *bit* quando um erro de símbolo ocorre. Esse mapeamento gera um impacto direto na taxa média de erro de *bit* do sistema.

De forma a melhorar o desempenho dos sistemas de comunicações, o esquema de mapeamento Gray é comumente empregado. Nesse esquema, a distribuição do código binário da constelação é realizado de forma que os *bits* associados

a símbolos adjacentes (*i.e.*, localizados a uma distância  $2d$ ) apresentem uma distância de Hamming unitária, criando uma equivalência entre a ocorrência de um erro de símbolo e de *bit* (para símbolos vizinhos).

O mapeamento por código Gray é o esquema de mapeamento ótimo em termos de BER para o esquema de modulação SQAM [1], [9]. Entretanto, em alguns tipos de constelações, como as TQAM, realizar o mapeamento Gray perfeito não é possível, uma vez que, neste tipo de constelação, a maioria dos símbolos apresenta seis vizinhos adjacentes, e não apenas quatro como ocorre em constelações SQAM [2]. Dessa forma, sequências binárias com dois ou mais *bits* de diferença acabam por serem associadas a símbolos vizinhos, acarretando um aumento na taxa de erro de *bit* do sistema.

A Figura 3 apresenta um exemplo de mapeamento de símbolos de uma constelação 16-TQAM e suas respectivas regiões de decisão. É possível verificar na figura que o mapeamento Gray ilustrado não é perfeito.

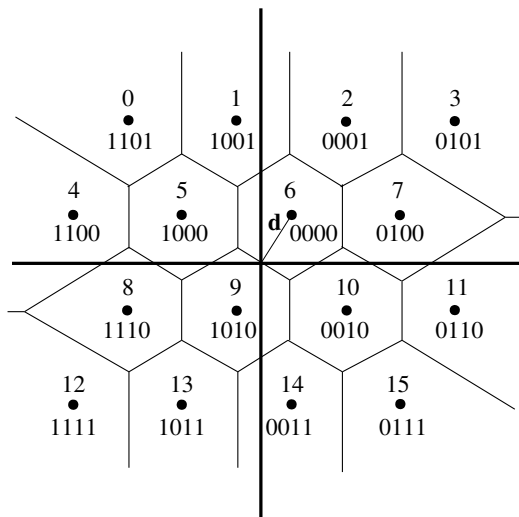


Fig. 3. Constelação 16-TQAM e suas regiões de decisão.

Uma importante característica das constelações TQAM é o fato de que elas nem sempre atingem uma probabilidade de erro de *bit* menor que as constelações SQAM. Isso se deve ao fato de que, em constelações SQAM, é possível realizar uma codificação Gray perfeita. Nesse contexto, encontrar um esquema de mapeamento que minimize a taxa de erro de *bit* do sistema é um requisito fundamental no projeto de sistemas de comunicações que utilizam constelações TQAM.

No entanto, a descoberta de um esquema de mapeamento ótimo (*i.e.*, que gere a menor BER possível) se constitui um problema NP, cujo espaço de busca é da ordem de  $M!$ . Dessa forma, heurísticas de busca representam uma solução adequada ao contexto do problema.

#### A. Penalidade de Codificação Gray

De forma a medir o grau de eficiência dos mapeamentos em constelações de símbolos, Smith [10] propôs uma métrica para representar a penalidade causada pelo mapeamento dos

*bits* em constelações de sinais, chamada de penalidade de codificação Gray (GCP – *Gray coding penalty*). A GCP pode ser definida como o número médio de *bits* diferentes entre símbolos adjacentes, definido matematicamente por [11]

$$G_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G_p^{S_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{\sum_{j=1}^{N(S_i)} B_d(S_i, S_j)}{N(S_i)}, \quad (6)$$

em que  $S_i$  denota o  $i$ -ésimo símbolo da constelação,  $G_p^{S_i}$  representa a GCP do símbolo  $S_i$ ,  $N(S_i)$  é o número de vizinhos mais próximos de  $S_i$  e  $B_d(S_i, S_j)$  é o número de *bits* diferentes entre  $S_i$  e seu vizinho  $S_j$ . Uma constelação SQAM com mapeamento Gray perfeito apresenta  $G_p = 1$ , ao passo que o mapeamento da constelação da Figura 3 exhibe  $G_p = 1.2375$ .

As expressões aproximadas para a taxa de erro de símbolo (SER – *Symbol Error Rate*) e a taxa de erro de *bit* (BER) para canais com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) são apresentadas a seguir [11]:

$$P_s \simeq \frac{N}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{d}{\sqrt{N_0}} \right), \quad (7)$$

$$P_b \simeq \frac{G_p}{\log_2 M} P_s, \quad (8)$$

em que  $P_s$  é a SER,  $P_b$  é a BER,  $N$  é o número médio de vizinhos mais próximos para um símbolo da constelação,  $N_0/2$  é a densidade espectral de potência do ruído e  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  é a função erro complementar.

Por meio da Equação 8 é possível verificar que, para minimizar a taxa de erro de *bit* do sistema, é necessário que a penalidade  $G_p$  seja minimizada (dado que  $\log_2 M$  é constante). Nesse contexto, neste trabalho, a GCP foi utilizada como o critério de otimização do mapeamento de constelações TQAM.

#### IV. OTIMIZAÇÃO DO MAPEAMENTO DE SÍMBOLOS EM CONSTELAÇÕES DE SINAIS

O processo de otimização do mapeamento de símbolos em constelações de sinais visa minimizar a taxa de erro de *bit* média do sistema de comunicações. Para tanto, deve ser feito um mapeamento que associe a símbolos adjacentes, sequências binárias com a menor distância de Hamming possível, proporcionando uma redução no valor da GCP da constelação. Nesse contexto, o principal objetivo das técnicas de otimização é encontrar um conjunto de associações de *bits* que torne a GCP da constelação a mais próxima possível de 1.

No entanto, a procura por uma solução ótima para esse problema requer um alto custo computacional, já que o espaço de busca é da ordem de  $M!$ . Dessa forma, heurísticas de busca constituem-se soluções apropriadas para aplicação no processo de otimização do mapeamento de constelações de sinais.

Com vistas a verificar a eficiência de algumas soluções para esse problema de otimização, este artigo apresenta um estudo comparativo entre os seguintes métodos de otimização do mapeamento de constelações:

- Busca com mapeamento interativo de linhas e colunas (MILC);
- Busca com mapeamento recursivo (MREC);
- Busca com algoritmos genéticos (AG);
- Busca com algoritmo híbrido (AH).

Cada uma dessas técnicas é apresentada com mais detalhes nas subseções seguir.

#### A. Busca com Mapeamento Interativo de Linhas e Colunas

O esquema de mapeamento interativo de linhas e colunas (MILC) foi proposto em [2]. Nesse método, os símbolos da constelação são agrupados em linhas e colunas, de forma similar a uma tabela. Cada linha e/ou coluna está associada a uma parte dos *bits* relativos ao mapeamento dos símbolos. O esquema MILC é adequado quando a constelação é regular, como é o caso em constelações TQAM. A Figura 3 apresenta um exemplo de mapeamento realizado com o uso da técnica MILC, em que os *bits* mais significativos estão associados às linhas e os menos significativos às colunas.

#### B. Busca com Mapeamento Recursivo

Um possível esquema para realizar o mapeamento de símbolos de constelações de sinais é a utilização de uma estratégia de busca gulosa recursiva. Neste trabalho, esse esquema foi denominado de mapeamento recursivo (MREC).

O princípio básico da técnica MREC é utilizar a informação das sequências binárias dos vizinhos já associados para atribuir uma sequência com a menor distância de Hamming disponível (utilizando as sequências binárias ainda não atribuídas à constelação). O algoritmo então continua sua execução para cada um dos vizinhos ainda não associados, até que a constelação seja totalmente mapeada. O pseudo-código apresentado no Algoritmo 1 ilustra a operação da técnica MREC.

Um problema associado a essa técnica é que, por ser baseada em uma informação de vizinhança local, ela dificilmente atinge um desempenho ótimo global.

#### C. Busca com Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos (AG) são algoritmos de otimização gerais que têm sido empregados com sucesso em diversas áreas. Os AGs pertencem a uma classe de soluções de problemas de otimização chamada de estratégias evolutivas, pois são baseadas no processo de evolução natural das espécies para encontrar soluções satisfatórias (*i.e.*, ótimas ou sub-ótimas). Em [4], os autores propõem a utilização de AGs para solucionar o problema do mapeamento de constelações de sinais.

Nos AGs, cada solução do espaço de busca deve ser codificada como um cromossomo. Os cromossomos são compostos por um agrupamento de alelos (*i.e.*, os possíveis valores que compõem cada solução), cada um disposto em uma dada posição do cromossomo (denominada *locus*).

---

#### Algoritmo 1 Pseudo-código do algoritmo de mapeamento recursivo.

---

```

1: função Mapear_Vizinhos(i, j)
2: início
   //Caso o símbolo (i, j) não exista na constelação
3: se (i < 0 ou i ≥ √M) ou (j < 0 ou j ≥ √M) então
4:   retorna
5: fim
6: se o símbolo já foi mapeado então
7:   retorna
8: caso contrário
9:   vizinhos[] ← lista_de_vizinhos();
10:  para todos os vizinhos faça
11:    constelação[i][j] ← símbolo disponível com a menor
      distância de Hamming para seus vizinhos;
12:  fim para
13:  Mapear_Vizinhos(i, j-1); Mapear_Vizinhos(i-1, j-1);
14:  Mapear_Vizinhos(i+1, j-1); Mapear_Vizinhos(i-1, j);
15:  Mapear_Vizinhos(i+1, j); Mapear_Vizinhos(i, j+1);
16: fim
17: fim

```

---

Neste trabalho, cada solução  $C$  é representada por um cromossomo de comprimento  $M$ . Cada *locus* associa um símbolo da constelação à representação binária de um alelo do conjunto  $\mathcal{A} = [0, 1, \dots, M - 1]$ . No contexto do problema de mapeamento de símbolos, o esquema de codificação dos cromossomos  $C$  está sujeito às seguintes restrições: (a) todos os alelos devem estar mapeados; e (b) nenhum alelo deve ser repetido. Por exemplo, o mapeamento do cromossomo  $C_1 = [13, 9, 1, 5, 12, 8, 0, 4, 14, 10, 2, 6, 15, 11, 3, 7]$  é apresentado na constelação 16-TQAM da Figura 3 (o índice de cada *locus* é ilustrado acima dos pontos da constelação).

A cada geração do AG são selecionados os  $n_e$  cromossomos com melhor desempenho (avaliados por meio de uma função de *fitness*) e preservados para a próxima geração<sup>1</sup>. Os demais  $n_c$  cromossomos são selecionados para a próxima geração por meio do método da roleta (RWS – *Roulette-Wheel Selection*). De acordo com o método da roleta, cada indivíduo  $i$  da geração  $j$  é selecionado para a geração  $j + 1$  com a seguinte probabilidade [4], [12]:

$$p_{sel}(i) = \frac{f(C_{i,j})}{\sum_i f(C_{i,j})}, \quad (9)$$

em que  $f(\cdot)$  é a função de *fitness*. A GCP foi adotada como a função de *fitness* do problema (também chamada de função custo ou função objetivo) e é utilizada para verificar a convergência do AG.

Após a seleção dos cromossomos para a próxima geração são realizadas duas importantes operações no contexto dos AGs: o cruzamento e a mutação. Esses operadores são executados com probabilidades de ocorrência  $P_c$  e  $P_m$ , respectivamente.

<sup>1</sup>Essa estratégia é denominada elitismo.



O operador de cruzamento adotado no problema foi o cruzamento parcialmente mapeado (PMX – *Partially Matched Crossover*). Esse operador é classicamente adotado para resolver o problema do caixeiro viajante (TSP – *Travelling Salesman Problem*) com algoritmos genéticos [13]. Já o operador de mutação seleciona dois *loci* diferentes de forma aleatória e realiza a troca dos alelos posicionados nestes *loci*.

O AG então continua sua execução por  $G_{max}$  gerações ou até atingir uma determinada condição. Por apresentar características aleatórias, os AGs não garantem a convergência a uma solução ótima em todas as suas execuções, exibindo um certo grau de variação das soluções a cada nova execução.

#### D. Busca com Algoritmo Híbrido

O algoritmo híbrido de otimização (AH) combina três técnicas de busca para melhorar seu desempenho: *hill-climbing*, seleção clonal e algoritmos genéticos. O algoritmo híbrido foi originalmente proposto em [14] e visa melhorar a qualidade das soluções encontradas combinando as melhores características de cada uma das três técnicas: a escolha da melhor solução para a próxima geração, dos algoritmos *hill-climbing*; a clonagem da melhor solução, do algoritmo de seleção clonal; e a operação de mutação, dos algoritmos genéticos. Neste trabalho, o AH utiliza os mesmos conceitos de cromossomo, alelo e *locus* empregados nos AGs. O pseudo-código do algoritmo é apresentado a seguir.

---

#### Algoritmo 2 Pseudo-código do algoritmo híbrido.

---

- 1:  $C \leftarrow$  Inicializa\_solução( $M$ );
  - 2: Avalia( $C$ );
  - 3: **enquanto** NÃO(critério de parada) **faça**
  - 4:    $P \leftarrow$  Clonagem( $C, n_c$ );
  - 5:    $P' \leftarrow$  Mutação( $P$ );
  - 6:    $C \leftarrow$  Avalia( $P'$ );
  - 7: **fim enquanto**
- 

O algoritmo é inicializado com apenas um cromossomo em  $C$ , que deve ser gerado aleatoriamente sob as mesmas restrições impostas aos cromossomos dos AGs. O processo continua com a avaliação da GCP relativa ao cromossomo  $C$ , que é utilizada para verificar a melhoria das soluções no decorrer das interações do algoritmo.

Após essa etapa,  $n_c$  clones de  $C$  devem ser produzidos de forma a criar uma nova população de soluções  $P$ . O operador de mutação é então executado em todos os cromossomos contidos em  $P$ , gerando uma diversidade de novas soluções (uma nova população  $P'$ ). O mesmo operador de mutação adotado no AG foi utilizado no algoritmo híbrido.

Após o término do processo de mutação, as novas soluções são avaliadas para determinar o cromossomo que contém a melhor solução (*i.e.*, que gera o mapeamento com a menor GCP). Esse cromossomo é então definido como a solução atual  $C$ , sendo preservado para a próxima interação (ao passo que as demais soluções são descartadas). O algoritmo pode ser facilmente adaptado para preservar um número maior de soluções entre duas interações, melhorando o desempenho

do algoritmo (ao custo de um maior tempo de execução). Esse processo se repete enquanto o critério de parada não for alcançado. Neste trabalho, o critério de parada adotado foi o número de interações, o que permite que ele seja comparado a outros algoritmos, como os algoritmos genéticos.

## V. RESULTADOS

Esta seção apresenta a avaliação de desempenho das técnicas de otimização do mapeamento de constelações descritas na Seção IV. Os experimentos realizados visam comparar a eficiência dos esquemas de mapeamento gerados com o uso de cada técnica (MILC, MREC, AG e AH) em termos da GCP e da BER. A avaliação foi realizada considerando transmissões baseadas em constelações TQAM em um canal AWGN.

As algoritmos MILC e MREC, por não operarem com base em parâmetros aleatórios, geram um único tipo de mapeamento de constelação para cada valor de  $M$ . Dessa forma, não há variação nas soluções geradas em diferentes ciclos de execução. Por outro lado, as técnicas AG e AH operam com base em parâmetros aleatórios e, portanto, apresentam diferentes soluções a cada nova execução.

No AG as probabilidades de cruzamento e de mutação foram definidas, respectivamente, como  $P_c = 0.7$  e  $P_m = 0.1$ . O tamanho da população de cromossomos ( $n_c$ ) foi definido como 750, enquanto o número de gerações ( $G_{max}$ ) foi escolhido igual a 100. Durante a operação de cruzamento, cada par de cromossomos gera 10 novos pares de filhos, dos quais apenas o melhor par é selecionado (os demais são descartados). No AH os números de clones e de gerações foram definidos com os mesmos valores de  $n_c$  e  $G_{max}$  do AG, respectivamente.

Os experimentos foram realizados em um computador com o processador AMD Sempron 3000+ de 1.0 GHz, 1 GB de memória RAM e HD de 80 GB. De forma a permitir uma comparação justa entre as técnicas AG e AH foram realizadas 31 execuções independentes. Esse número foi baseado no teorema central do limite que afirma que, com 30 ou mais execuções, a variável aleatória apresenta distribuição normal, permitindo inferências estatísticas [15]. A Tabela I apresenta estatísticas relativas às GCPs obtidas com cada uma das técnicas de otimização para constelações 16-TQAM.

TABELA I

DESEMPENHO DA GCP DOS ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO DE MAPEAMENTOS PARA CONSTELAÇÕES 16-TQAM.

Alg.	Média	Desv. Padrão	Mín.	Máx.	Int. de Confiança - Grau 95%
AG	1,3635	0,1037	1,2375	1,6312	[1,3270; 1,4000]
AH	1,2890	0,0371	1,2375	1,3313	[1,2760; 1,3021]
MILC	1,2375	–	1,2375	1,2375	–
MREC	1,5427	–	1,5427	1,5427	–

Por meio da análise da Tabela I é possível verificar que apenas a técnica MREC não conseguiu atingir, em algum momento, o valor 1,2375 (valor mínimo da GCP para

constelações 16-TQAM). O AG obteve esse resultado 2 vezes durante os ciclos de execução, enquanto que por meio do AH esse valor foi obtido 10 vezes.

De modo geral, o desempenho do AH superou o desempenho do AG. Isso pode ser verificado pelo fato da GCP média do AH ser menor que a média do AG. Além disso, o AG apresentou uma maior variação nos resultados que o AH (esse fato pode ser verificado por meio dos valores do desvio padrão e do intervalo de confiança). Dessa forma, foi verificado que o AH apresentou uma maior estabilidade nas soluções geradas do que o AG. Por fim, o pior valor obtido pelo AH (1,3313) foi inferior ao pior valor obtido com o AG (1,6312).

A Figura 4 apresenta os gráficos de BER (gerados a partir de simulações de Monte Carlo) com os mapeamentos de melhor desempenho (*i.e.*, menor GCP) obtidos a partir cada método utilizado. É possível verificar que as técnicas MILC, AG e AH apresentaram desempenho equivalente (para suas melhores soluções), enquanto o algoritmo MREC apresentou perdas de até 1 dB em relação aos outros gráficos.

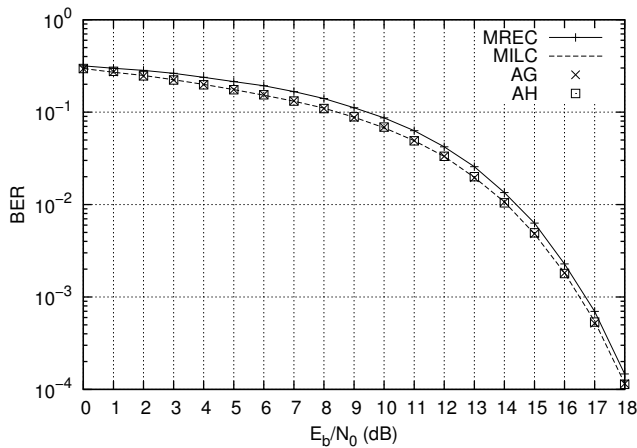


Fig. 4. Gráficos de BER para as melhores soluções obtidas com os algoritmos de otimização do mapeamento de símbolos em constelações 16-TQAM.

Na Tabela II são apresentadas as estatísticas relativas às GCPs obtidas com cada uma das técnicas de otimização para constelações 64-TQAM.

TABELA II

DESEMPENHO DA GCP DOS ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO DE MAPEAMENTOS PARA CONSTELAÇÕES 64-TQAM.

Alg.	Média	Desv. Padrão	Mín.	Máx.	Int. de Confiança - Grau 95%
AG	1,6086	0,0600	1,5331	1,7557	[1,5878; 1,6294]
AH	1,5205	0,0489	1,4312	1,6398	[1,5030; 1,5380]
MILC	1,2823	–	1,2823	1,2823	–
MREC	1,6547	–	1,6547	1,6547	–

Para o caso de constelações 64-TQAM a técnica MILC apresentou desempenho ótimo, enquanto a MREC obteve

o pior resultado dentre todas as técnicas comparadas. As técnicas AG e AH perderam desempenho quando utilizadas em constelações com  $M = 64$ . O motivo dessa perda se deve ao aumento significativo do espaço de busca (que cresceu de  $16!$  para  $64!$ ). Dessa forma, para atingir um desempenho ótimo, essas técnicas demandam um aumento no tamanho de suas populações e de suas gerações, ao custo de um maior tempo de execução. No entanto, a técnica AH ainda manteve características de desempenho melhores que as da técnica AG. Os gráficos de BER obtidos com os melhores mapeamentos de cada técnica são apresentados na Figura 5.

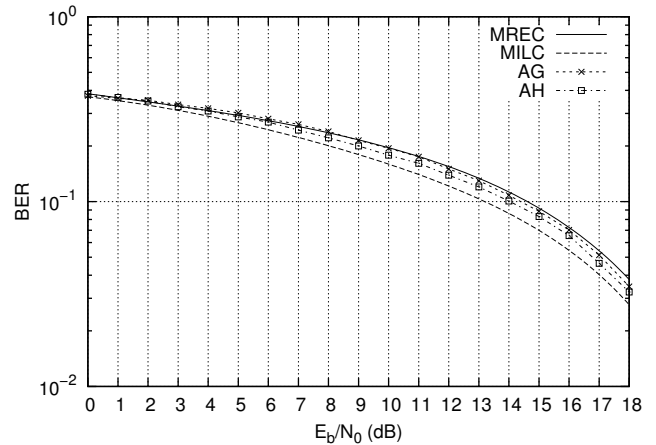


Fig. 5. Gráficos de BER para as melhores soluções obtidas com os algoritmos de otimização do mapeamento de símbolos em constelações 64-TQAM.

Na figura é possível verificar que a melhor técnica (MILC) apresentou um ganho de até 1 dB em relação à segunda melhor (AH). O AH teve desempenho até 0,5 dB melhor que o AG, que por sua vez apresentou um ganho de até 0,2 dB em relação à técnica MREC. Entretanto, em baixos valores de relação sinal-ruído (SNR – *Signal-to-Noise Ratio*), ou seja até 2 dB, o mapeamento obtido com o AG perdeu apenas para o mapeamento MILC, superando os demais.

A partir dos resultados obtidos conclui-se que a técnica MILC, além de apresentar um melhor desempenho computacional, gera o esquema de mapeamento de símbolos que minimiza a BER em sistemas TQAM. Entretanto, essa técnica requer que a constelação possa ser segmentada em grupos de linhas e colunas de tamanho  $2^{\log_2(M)/2}$  e, ainda assim, preserve as relações de vizinhança entre os símbolos. Caso isso não seja possível a técnica MILC não atinge, necessariamente, o desempenho ótimo, sendo preferível a utilização de heurísticas de busca.

De forma a realizar a verificação dessa hipótese, foram realizadas simulações com a constelação irregular apresentada na Figura 6, utilizando as técnicas MILC, AG e AH, cujas estatísticas são apresentadas na Tabela III. Os valores dos pontos dessa constelação foram obtidos em [3].

É possível verificar que, no caso da constelação irregular, as técnicas AG e AH atingem o valor mínimo da GCP, superando a técnica MILC em aproximadamente 0,2 dB, como pode ser

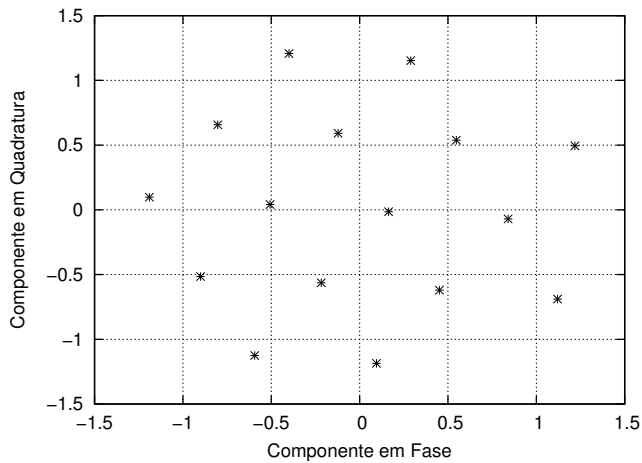


Fig. 6. Constelação irregular obtida em [3].

TABELA III

DESEMPENHO DA GCP DOS ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO DE MAPEAMENTOS A CONSTELAÇÃO IRREGULAR DA FIGURA 6.

Alg.	Média	Desv. Padrão	Mín.	Máx.	Int. de Confiança - Grau 95%
AG	1,4095	0,1507	1,2729	1,8594	[1,3556; 1,4635]
AH	1,2812	0,0195	1,2729	1,3562	[1,2744; 1,2881]
MILC	1,3427	–	1,3427	1,3427	–

constatado no gráfico da BER da Figura 7.

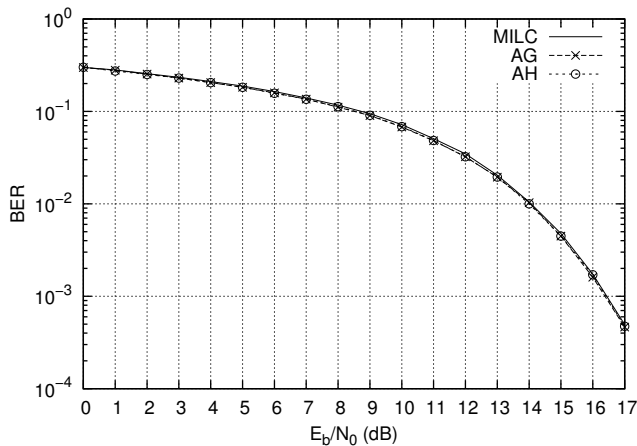


Fig. 7. Gráficos de BER para as melhores soluções obtidas com os algoritmos de otimização do mapeamento de símbolos na constelação irregular.

Contudo, a técnica AH, em média, supera a técnica AG, como pode ser constatado pelas medidas de média, desvio padrão e intervalo de confiança. Além disso, AH converge para a solução ótima mais rapidamente que AG, como ilustrado na Figura 8.

A partir da análise de desempenho realizada conclui-se

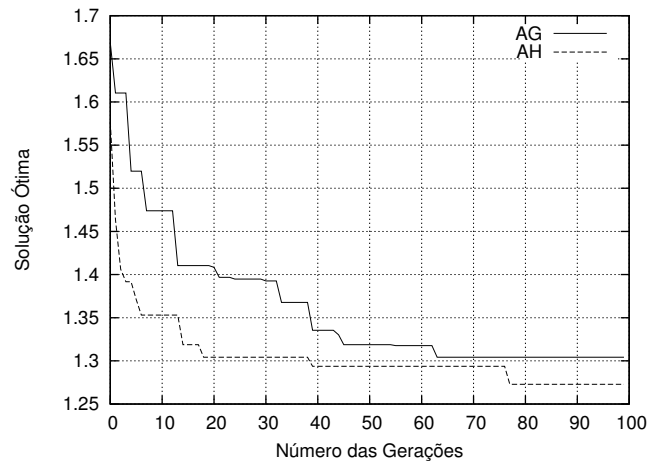


Fig. 8. Desempenho das técnicas AG e AH.

que: (a) quando uma constelação puder ser agrupada em forma de linhas e colunas de tamanho  $2^{\log_2(M)/2}$ , a técnica MILC é a mais adequada para o mapeamento (como é o caso de constelações TQAM); (b) a heurística de busca AH é mais adequada que a AG quando a constelação for irregular, requerendo um menor número de gerações para encontrar uma solução ótima; e (c) as heurísticas de busca apresentam um bom desempenho para o mapeamento de constelações com  $M = 16$ , mas o custo computacional necessário para mapear constelações com  $M = 64$  pode ser alto.

## VI. CONCLUSÕES

O mapeamento de símbolos em constelações de sinais é um problema clássico relativo ao projeto de sistemas de comunicações digitais. A associação de seqüências binárias a cada símbolo da constelação deve ser realizada de forma a minimizar o número de erros de *bit* quando um erro de símbolo ocorre.

De forma a melhorar o desempenho dos sistemas de comunicações, o esquema de mapeamento Gray é comumente empregado. Entretanto, em alguns tipos de constelações, como as TQAM, realizar o mapeamento Gray perfeito não é possível, uma vez que, existem mais de quatro símbolos adjacentes gerando uma penalidade de codificação Gray (GCP).

Nesse contexto, este trabalho apresentou uma comparação entre quatro técnicas de otimização aplicadas ao problema do mapeamento de símbolos em constelações de sinais. Esses métodos visam associar a cada símbolo da constelação uma seqüência binária de forma que a distância de Hamming entre as seqüências binárias de símbolos vizinhos seja a menor possível. Um estudo de caso mais aprofundado a respeito da utilização das técnicas citadas em constelações TQAM foi realizado. Neste artigo, os seguintes métodos foram avaliados:

- Busca com mapeamento iterativo de linhas e colunas (MILC);
- Busca com mapeamento recursivo (MREC);
- Busca com algoritmos genéticos (AG);
- Busca com algoritmo híbrido (AH).

A partir da análise de desempenho realizada foi verificado que a técnica MILC é a mais adequada para o mapeamento de constelações regulares, enquanto que a técnica AH apresentou o melhor desempenho para constelações irregulares. Além disso, a busca por soluções ótimas em constelações de alta ordem utilizando as heurísticas de busca pode impor um alto custo computacional.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelas bolsas de doutorado de Rafael Fernandes Lopes e Carlos Danilo Miranda Regis, respectivamente. Adicionalmente, os autores agradecem ao Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), à Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) e ao Instituto Federal do Maranhão (IFMA).

#### REFERENCES

- [1] E. Agrell, J. Lassing, E. G. Ström, and T. Ottosson, "On the optimality of the binary reflected gray code," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 12, pp. 3170–3182, 2004.
- [2] S.-J. Park, "Triangular quadrature amplitude modulation," *IEEE Communications Letters*, vol. 11, no. 4, pp. 292–294, apr. 2007.
- [3] G. Foschini, R. Gitlin, and S. Weinstein, "Optimization of two-dimensional signal constellations in the presence of gaussian noise," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 22, no. 1, pp. 28–38, jan. 1974.
- [4] Y. Liu, Z. Bie, K. Niu, and Z. He, "Optimization of constellation labeling using genetic algorithm," in *IET International Communication Conference on Wireless Mobile and Computing (CCWMC 2009)*, Dec. 2009, pp. 365–368.
- [5] S.-J. Park, M.-K. Byeon, and J.-H. Jeon, "Odd-bit triangular quadrature amplitude modulations," in *IEEE 20th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2009*, sep. 2009, pp. 2419–2423.
- [6] C. Cahn, "Combined digital phase and amplitude modulation communication systems," *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 150–155, sep. 1960.
- [7] J. Hancock and R. Lucky, "Performance of combined amplitude and phase-modulated communication systems," *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 8, no. 4, pp. 232–237, dec. 1960.
- [8] C. Campopiano and B. Glazer, "A coherent digital amplitude and phase modulation scheme," *IRE Transactions on Communications Systems*, vol. 10, no. 1, pp. 90–95, mar. 1962.
- [9] L. Hanzo, W. Webb, and T. Keller, *Single- and Multi-carrier Quadrature Amplitude Modulation: Principles and Applications for Personal Communications, WLANs and Broadcasting*. John Wiley and Sons, 2000.
- [10] J. G. Smith, "Odd-bit quadrature amplitude-shift keying," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 23, no. 12, pp. 385–389, Mar. 1975.
- [11] S.-J. Park, "Bit mapping of triangular quadrature amplitude modulation," in *IEEE 18th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'07)*, 2007.
- [12] R. Linden, *Algoritmos Genéticos*. Brasport, 2008.
- [13] D. E. Goldberg and R. J. Lingle, "Alleles, loci and the travelling salesman problem," in *Conference on Genetic Algorithm and their applications*, 1985, pp. 154–159.
- [14] O. A. C. Cortes and J. C. Silva, "A local search algorithm based on clonal selection and genetic mutation for global optimization," in *11th Brazilian Symposium on Neural Network (SBRN 2010)*, São Bernardo do Campo, 2010.
- [15] W. C. Scheffler, *Statistics: Concept and Applications*. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1988.