Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia

São Paulo: Atlas, 2004

Cap. 6 – Variáveis aleatórias contínuas

APOIO:
Fundação de Apoio à Pesquisa Científica e Tecnológica do Estado de Santa Catarina (FAPESC)
Departamento de Informática e Estatística – UFSC (INE/CTC/UFSC)

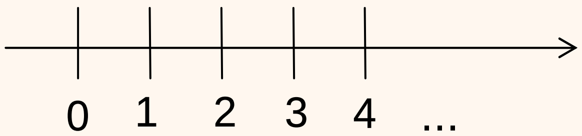
Variável aleatória

variável aleatória

discreta

os possíveis resultados estão contidos em um conjunto finito ou enumerável

Ex.



número de defeitos em ...

contínua

os possíveis resultados abrangem todo um intervalo de números reais

Ex.

tempo de resposta de ...

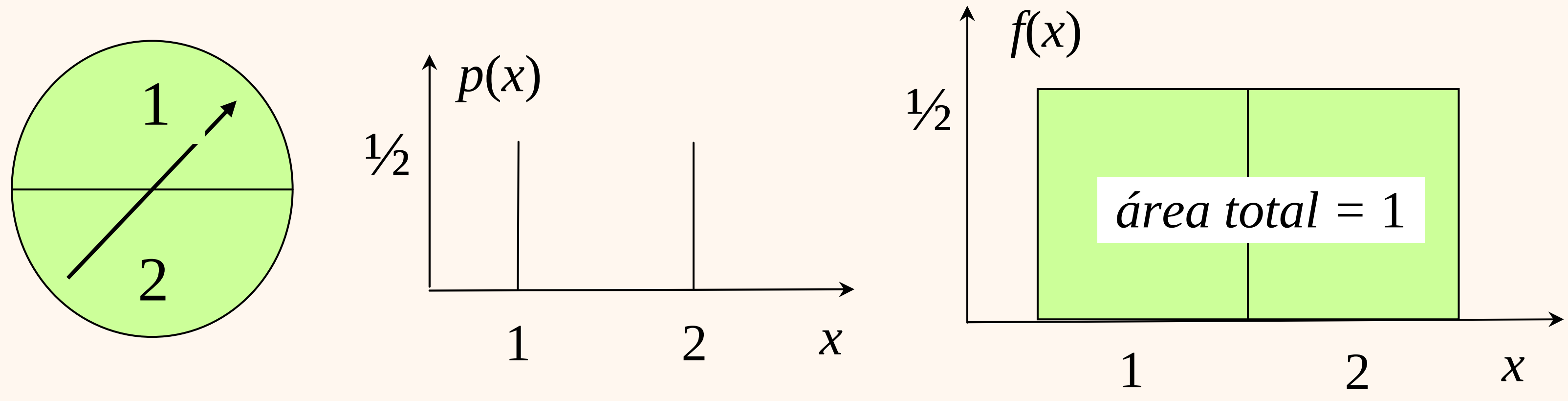
BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

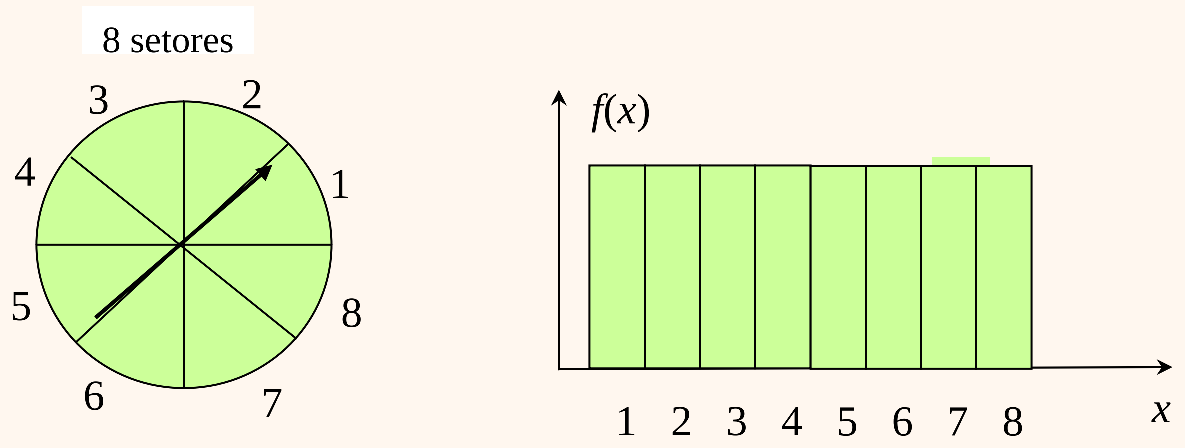
Variáveis aleatórias contínuas

  - tempo de resposta de um sistema computacional;
  - rendimento de um processo químico;
  - tempo de vida de um componente eletrônico;
  - resistência de um material; etc.
- Variáveis aleatórias discretas com grande número de possíveis resultados (podem ser aproximadas para contínuas):
  - número de transações por segundo de uma CPU;
  - número de defeitos numa amostra de 5.000 itens; etc.

Variável aleatória: discreta x contínua

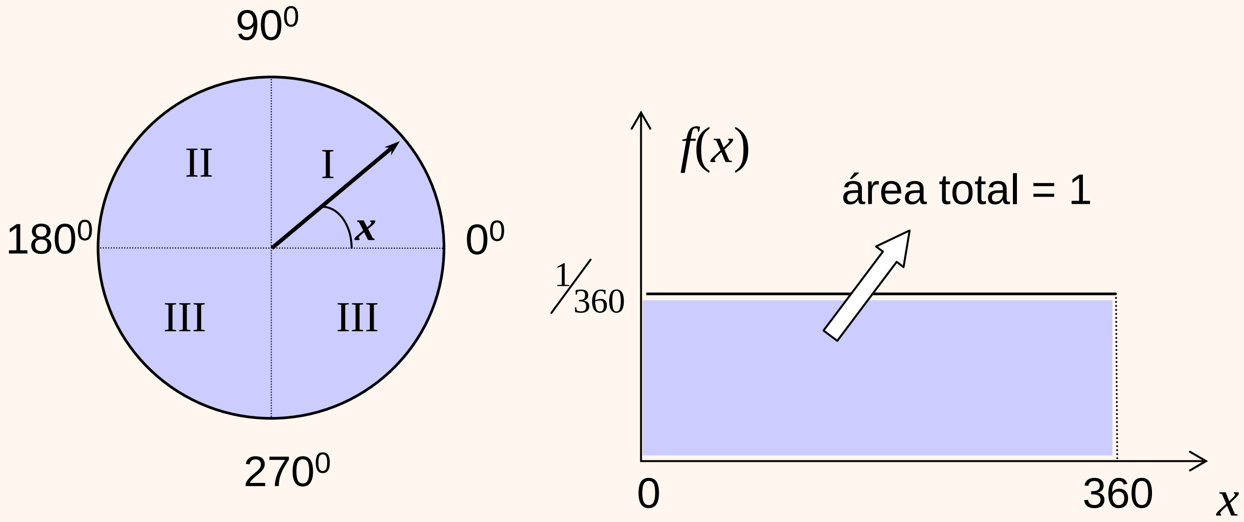
Discreta



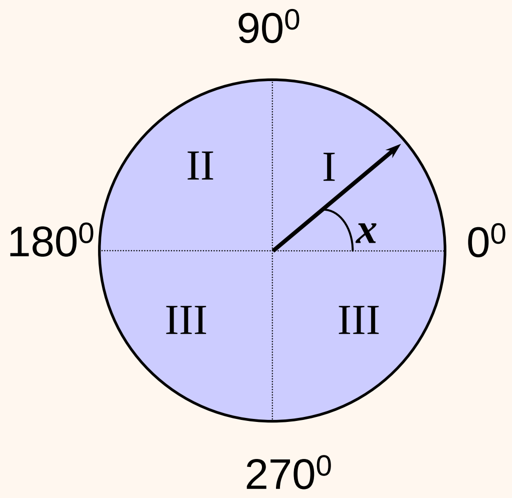


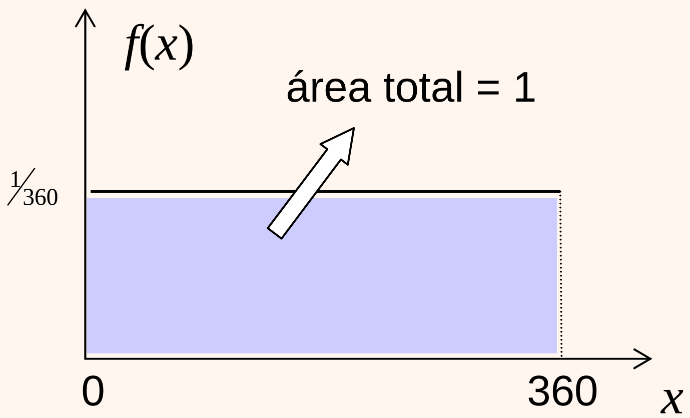
Variável aleatória: discreta x contínua

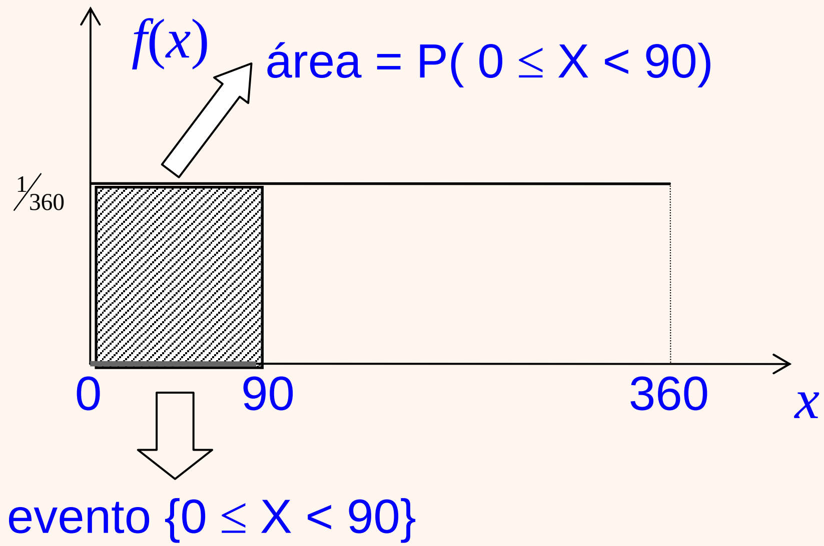
Contínua



Variável aleatória contínua







BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Variável aleatória contínua

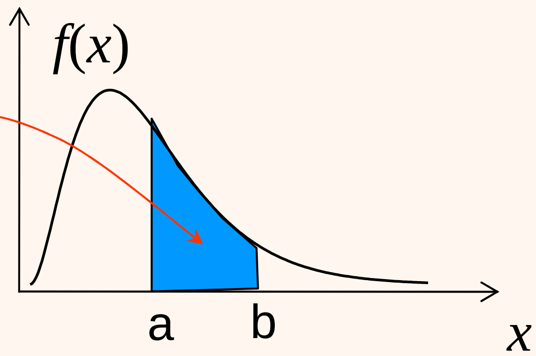
- As probabilidades de eventos associados a uma variável aleatória contínua *X* podem ser calculadas através de uma **função densidade de probabilidade** *f*, que deve satisfazer:

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Re \quad e$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$$

Se $A = [a, b]$, então

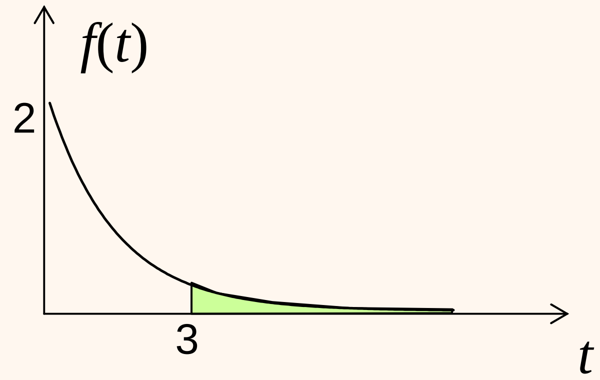
$$P(A) = \int_a^b f(x)d(x)$$



Variável aleatória contínua

- Exemplo 6.3

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



$$P(T > 3) = \int_3^{+\infty} f(t)dt = \int_3^{+\infty} 2e^{-2t}dt = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_3^{+\infty} = 0 + e^{-2(3)} = e^{-6}$$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

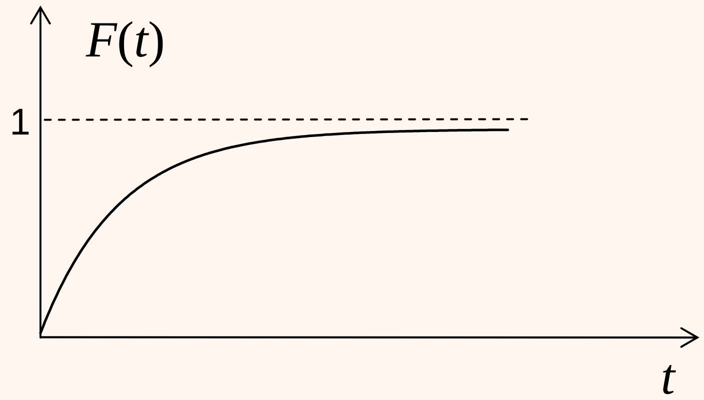
Variável aleatória contínua

- Função de distribuição acumulada

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds, \quad \forall x \in \Re$$

- Exemplo 6.3

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & \text{para } t \ge 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



Variável aleatória contínua

- Valor esperado e variância

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

ou

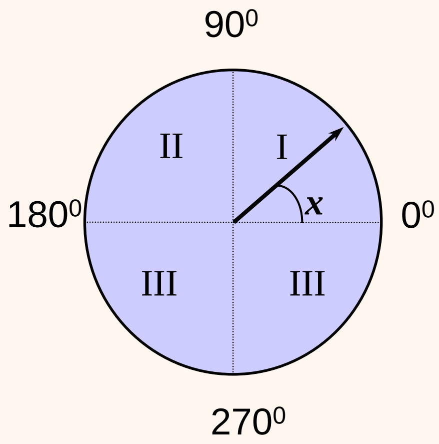
$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

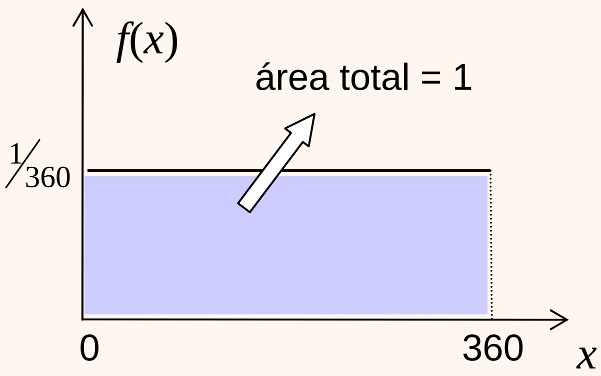
onde: $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

Principais Modelos Contínuos
Distribuição uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{para } x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & \text{para } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

- Exemplo:

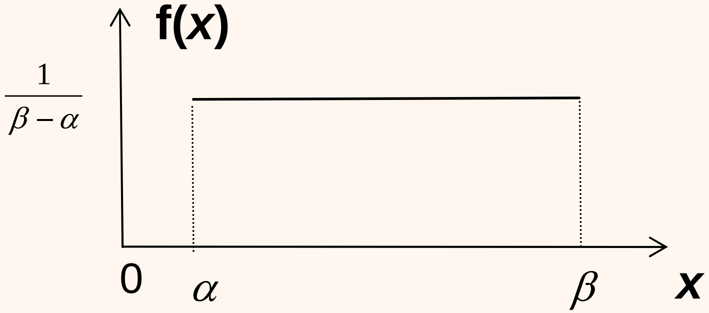


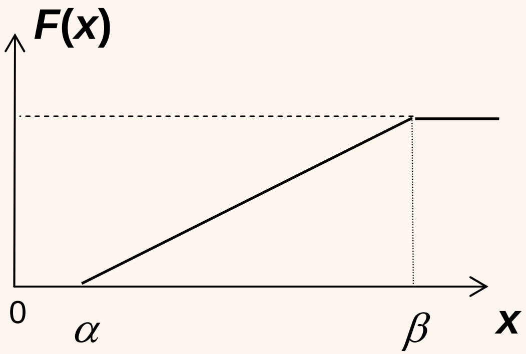


Principais Modelos Contínuos
Distribuição uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{para } x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & \text{para } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{para } \alpha \le x < \beta \\ 1, & \text{para } x \ge \beta \end{cases}$$

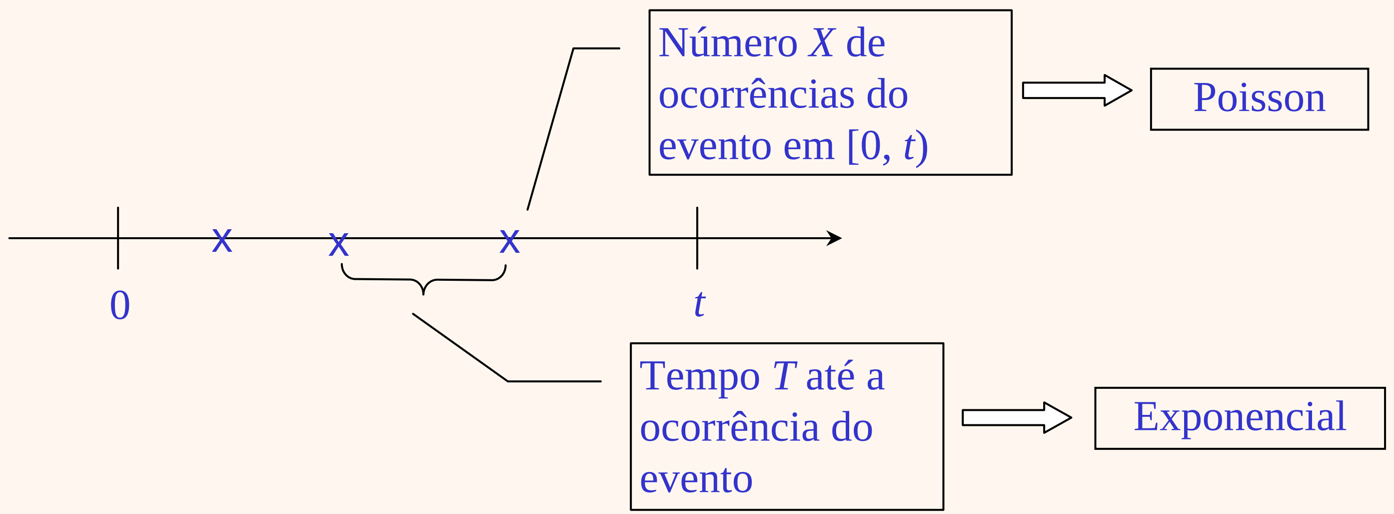




$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Principais Modelos Contínuos
Distribuição exponencial

- Exemplos:
  - tempo (em minutos) até a próxima consulta a uma base de dados;
  - tempo (em segundos) entre pedidos a um servidor;
  - distância (em m) entre defeitos de uma fita.



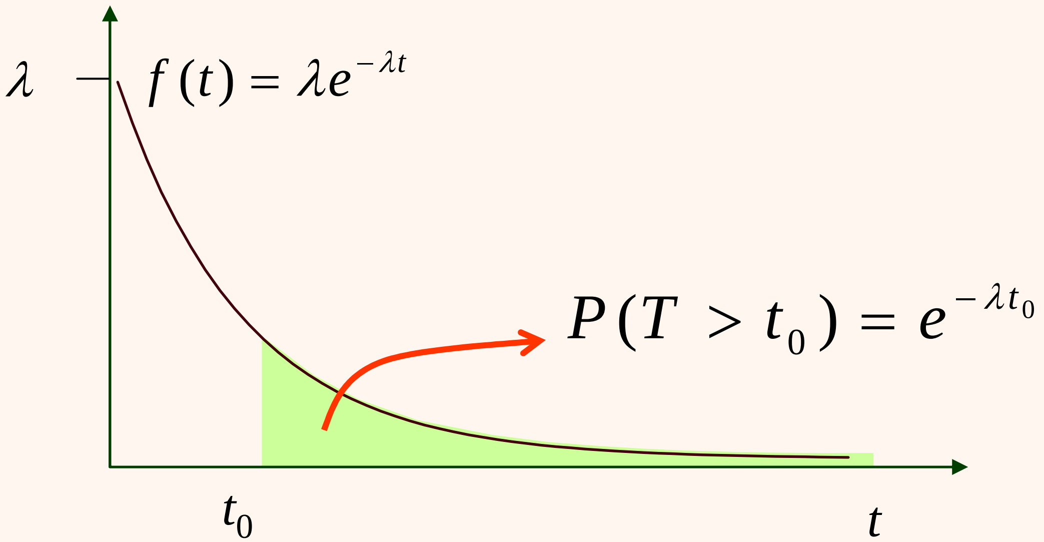
Principais Modelos Contínuos
Distribuição exponencial

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$F(t) = P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

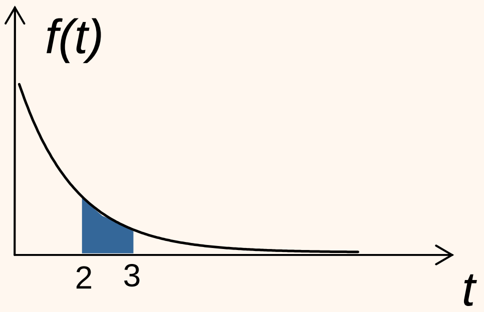


BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Principais Modelos Contínuos
Distribuição exponencial

- Exemplo 6.3

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



$P(2 \leq T \leq 3) = ?$

Resp.

$$P(2 \leq T \leq 3) = \int_2^3 2e^{-2t}\,dt \qquad \text{ou}$$

$$P(2 \leq T \leq 3) = P(T \geq 2) - P(T > 3) = e^{-2(2)} - e^{-2(3)} = e^{-4} - e^{-6} = 0{,}0158$$

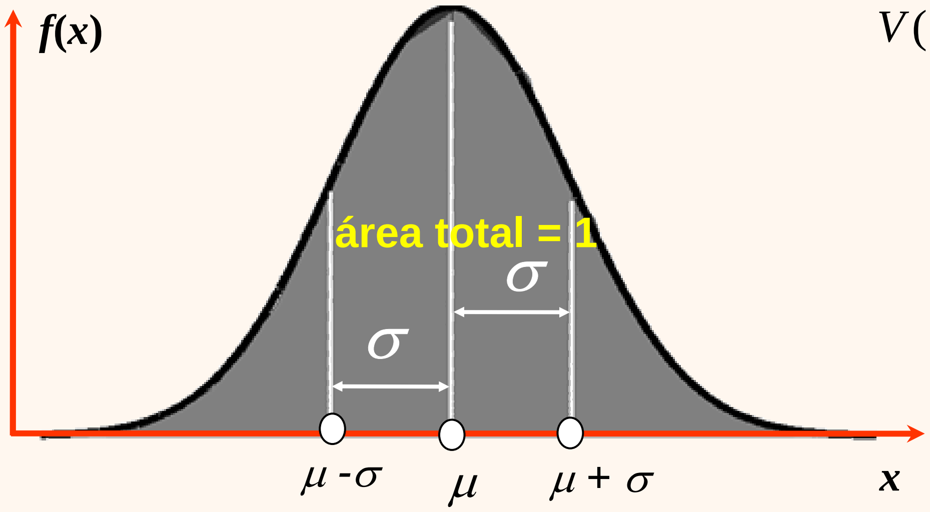
Principais Modelos Contínuos

Distribuição normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu$$

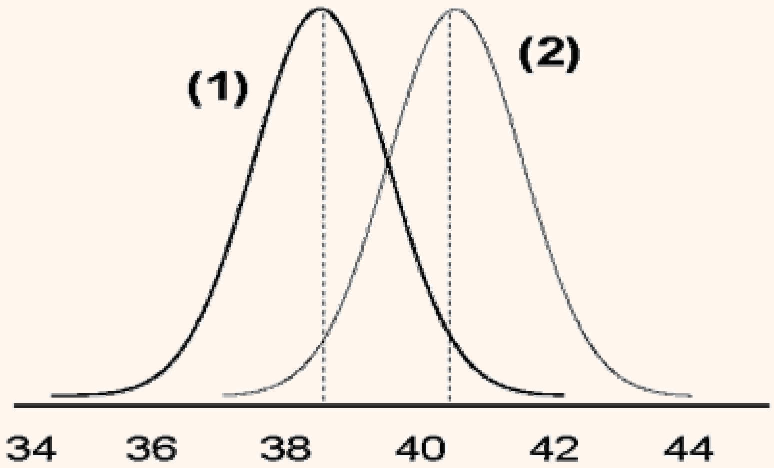
$$V(X) = \sigma^2$$



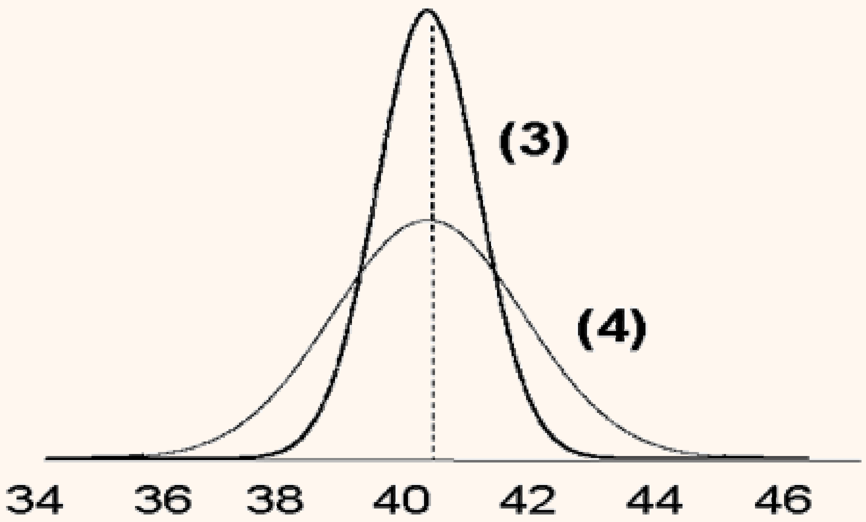
Principais Modelos Contínuos

Distribuição normal

$\mu_1 \neq \mu_2 \quad e \quad \sigma_1 = \sigma_2$



$\mu_3 = \mu_4 \quad e \quad \sigma_3 < \sigma_4$

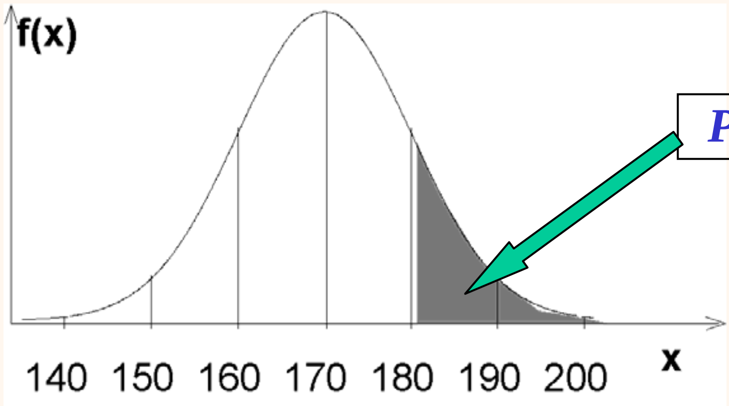


BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

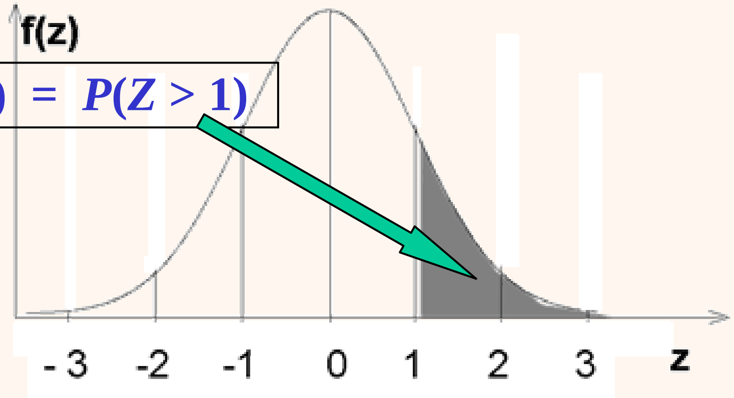
Principais Modelos Contínuos
Distribuição normal padrão

Distribuição de *X*:
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$

Distribuição de *Z*:
normal padrão



$P(X > 180) = P(Z > 1)$



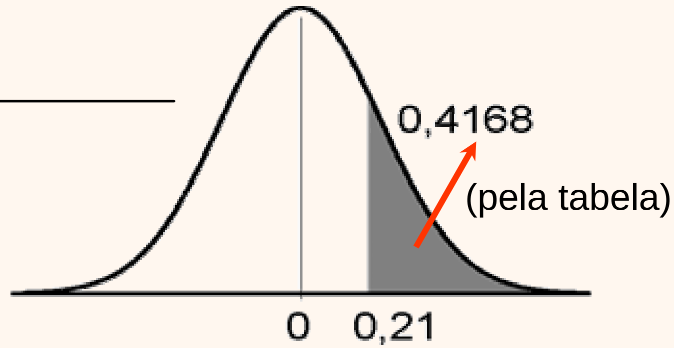
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

Principais Modelos Contínuos

Tabela da distribuição normal padrão

z	segunda decimal de z				
	0,00	0,01	0,02	...	0,09
0,0					
0,1					
0,2		0,4168			
...					

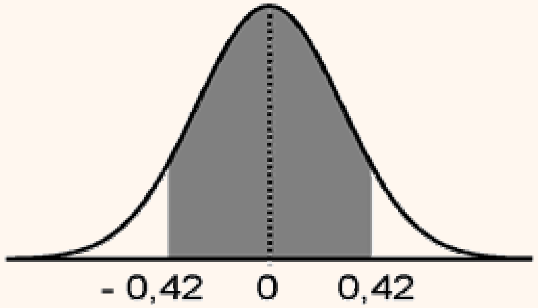
(área na cauda superior)

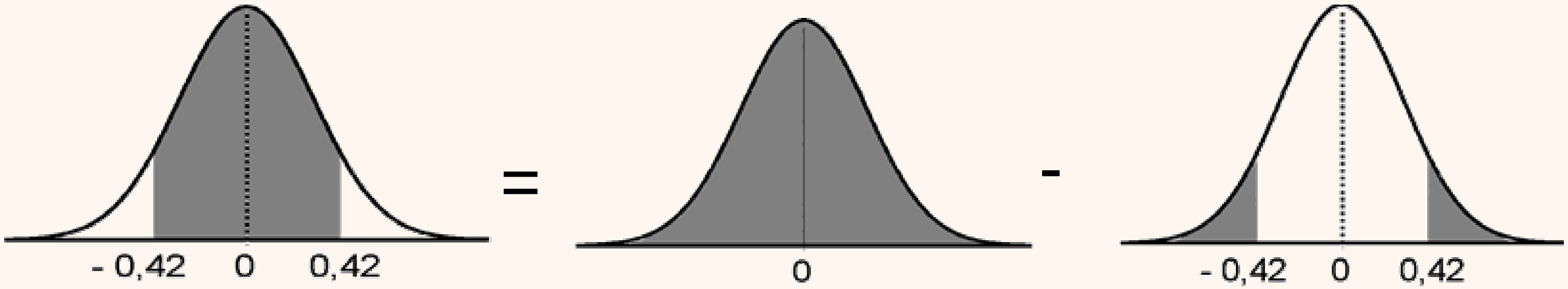


BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Principais Modelos Contínuos
Tabela da distribuição normal padrão

$P(-0{,}42 < Z < 0{,}42) = ?$





Então, $P(-0{,}42 < Z < 0{,}42) = 1 – 2\ (0{,}3372) = 0{,}3256$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

A normal como limite de outras distribuições
Aproximação normal à binomial

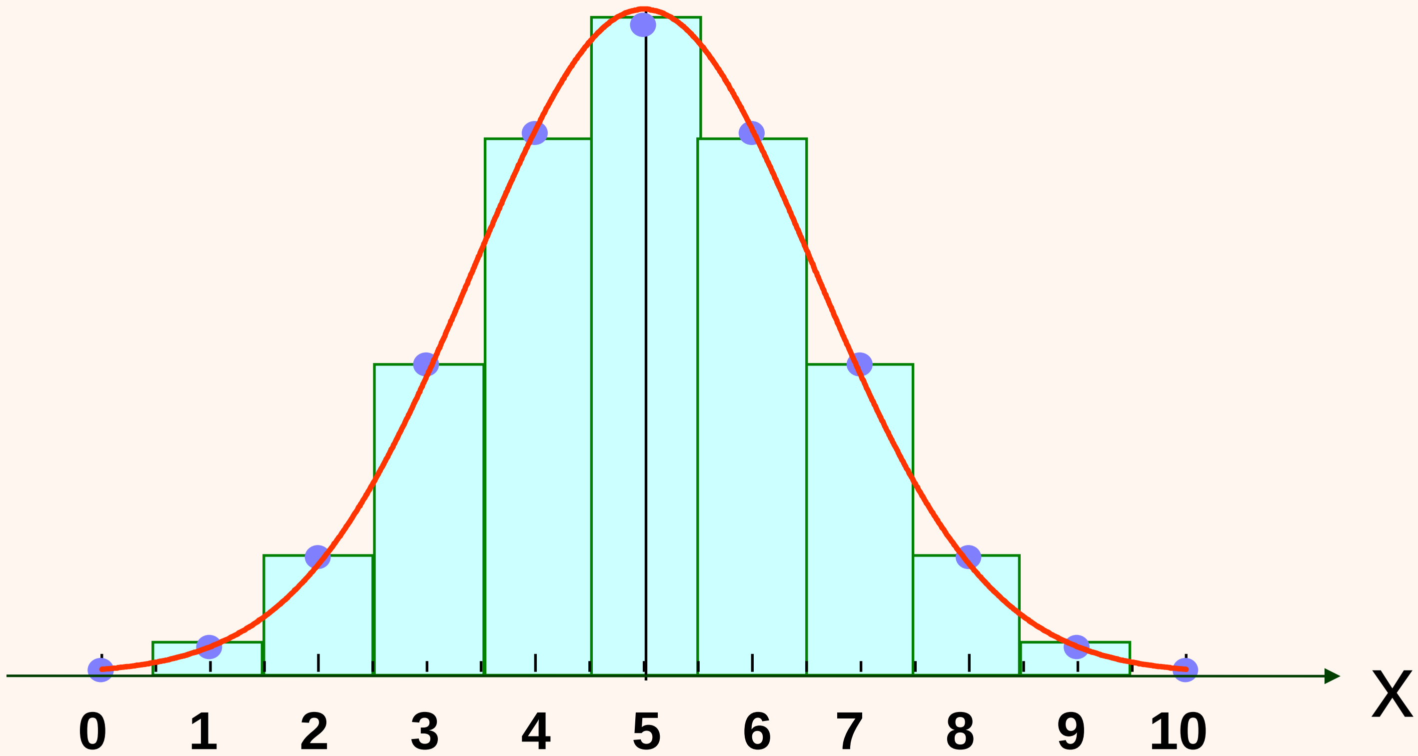
- Condição:
  - *n* grande e
  - *p* não muito próximo de 0 (zero) ou de 1 (um).

- Parâmetros:

$$\mu = np$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Aproximação normal à binomial

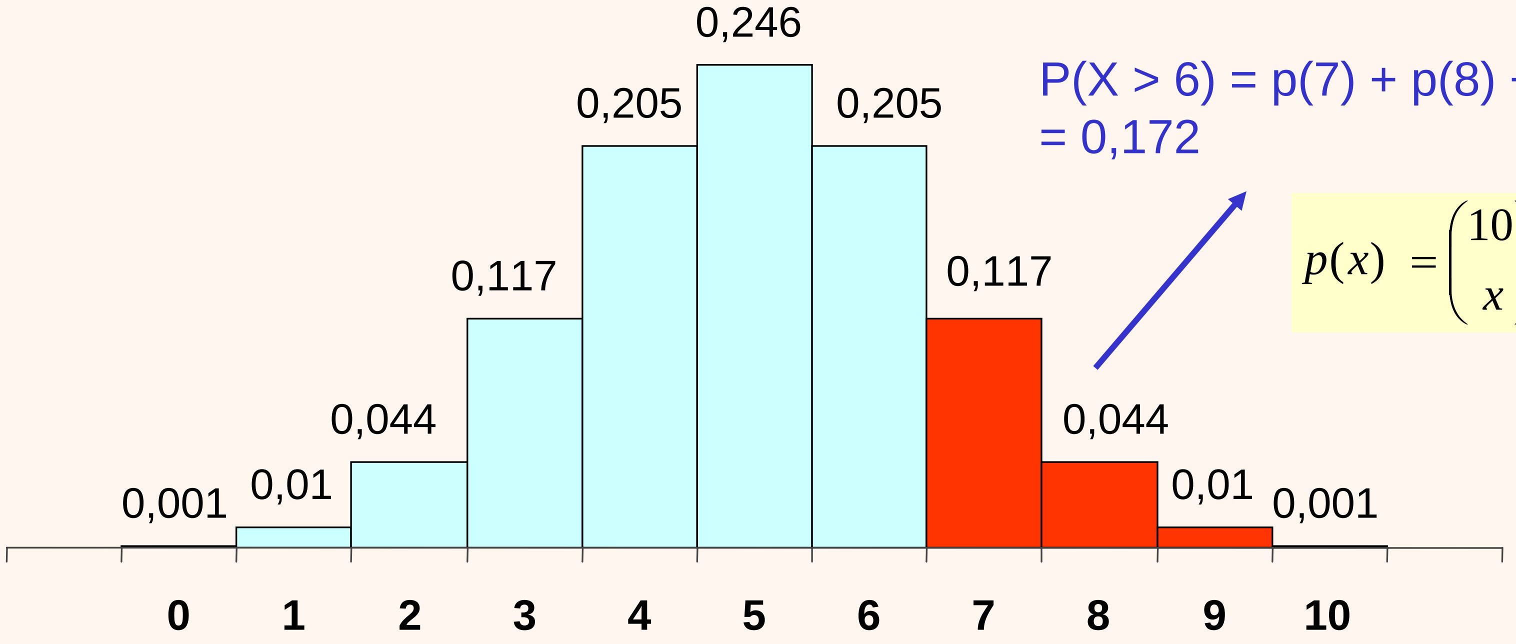


BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Aproximação normal à binomial

Ex. Qual é a probabilidade de mais de 6 caras em 10 lançamentos de uma moeda "honesta"?

Pela binomial:



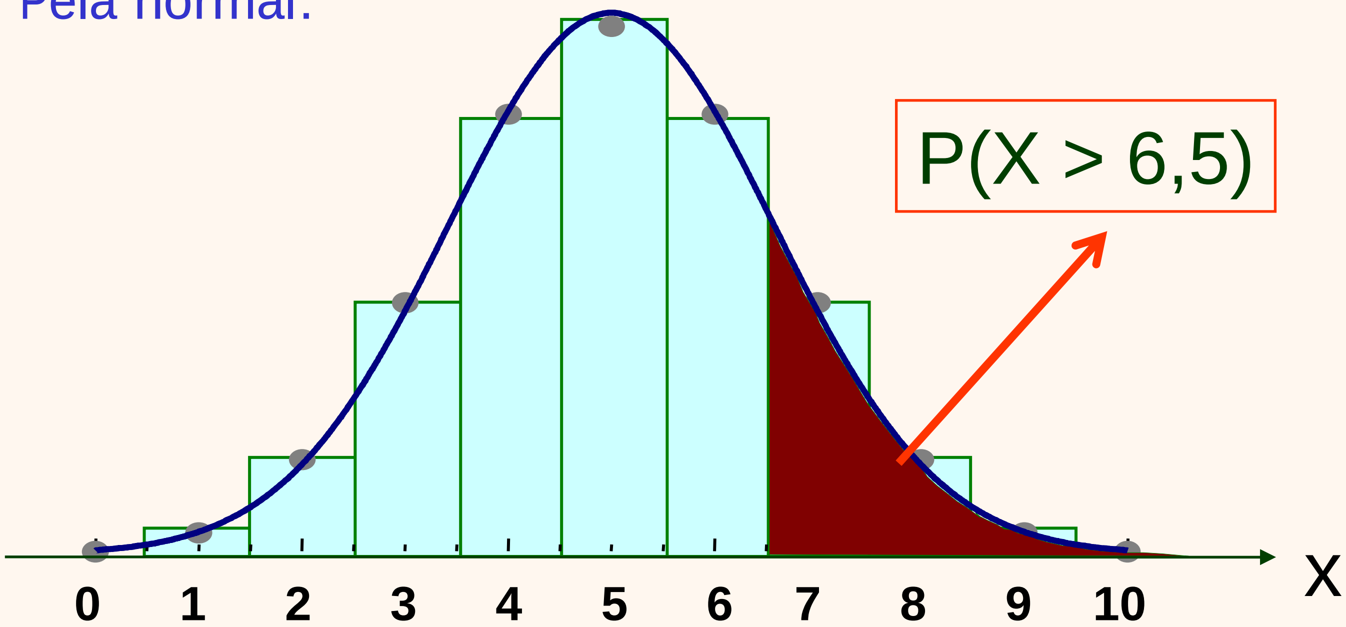
$P(X > 6) = p(7) + p(8) + p(9) + p(10)$
$= 0{,}172$

$$p(x) = \binom{10}{x} . (0{,}5)^x . (0{,}5)^{10-x}$$

Aproximação normal à binomial

Ex. Qual é a probabilidade de mais de 6 caras em 10 lançamentos de uma moeda "honesta"?

Pela normal:

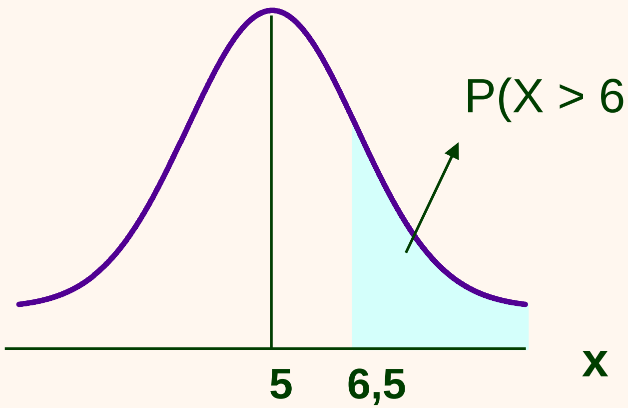


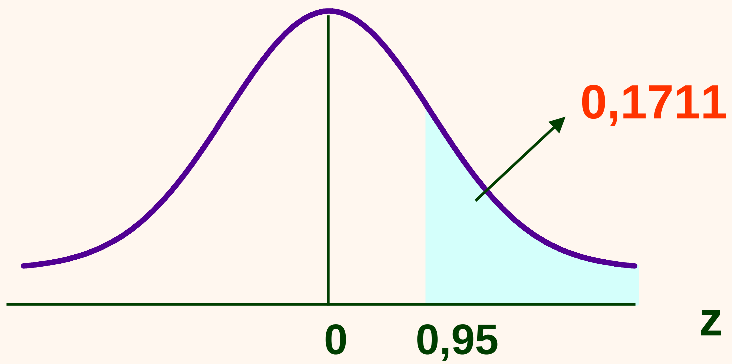
BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Aproximação normal à binomial

Ex. Qual é a probabilidade de mais de 6 caras em 10 lançamentos de uma moeda "honesta"?

Pela normal:





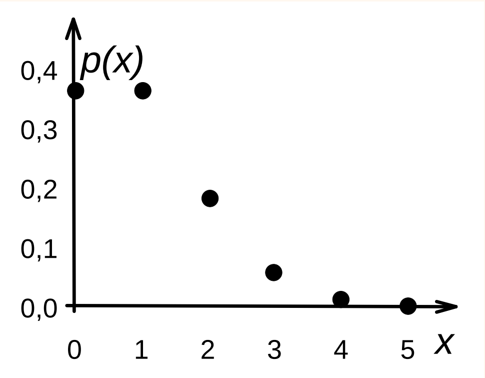
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{6{,}5-5}{\sqrt{2{,}5}} = 0{,}95$$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

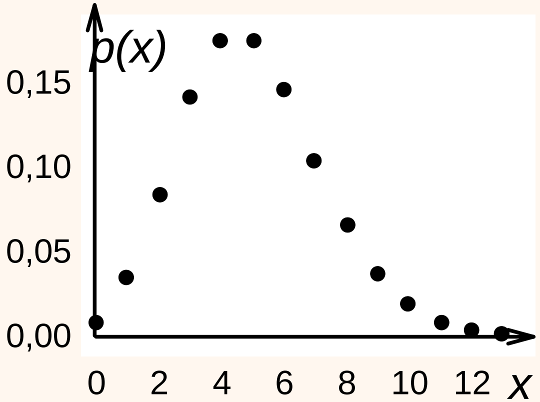
A normal como limite de outras distribuições
Aproximação normal à Poisson

- Aproximação válida quando λ for grande

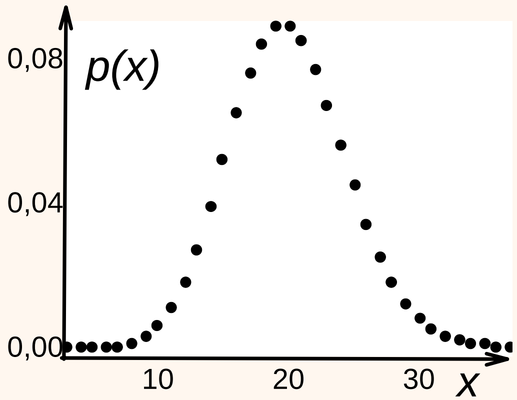
$\lambda = 1$



$\lambda = 5$



$\lambda = 20$



Parâmetros da normal: $\mu = \lambda$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

Gráfico de probabilidade normal

- Ex. Dados:74,0; 74,4; 74,7; 74,8; 75,9

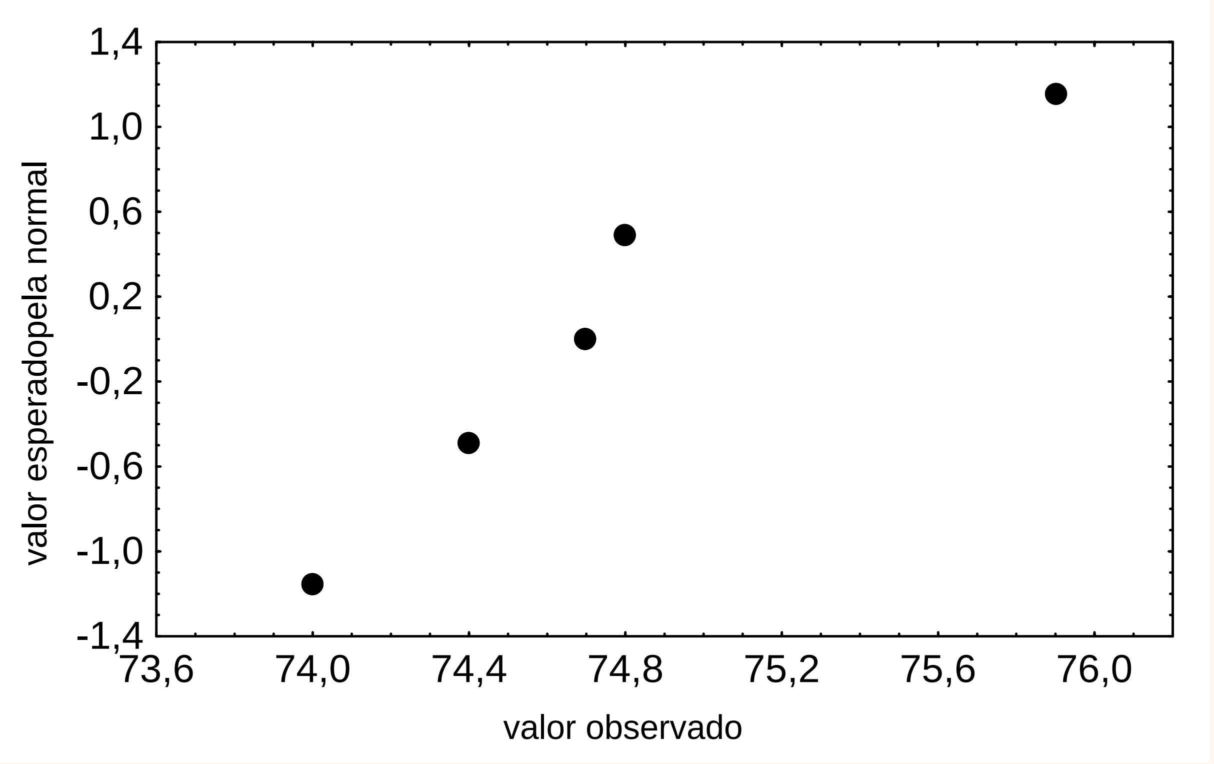


Gráfico de probabilidade normal

- Dados com distribuição normal

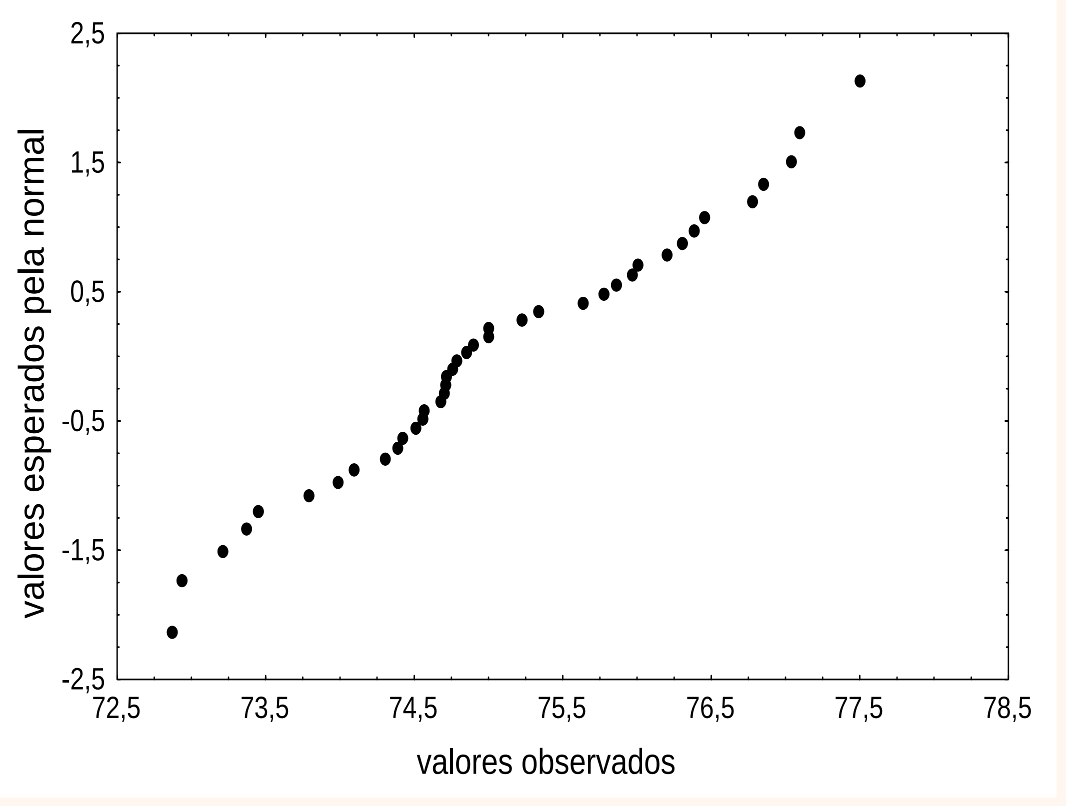
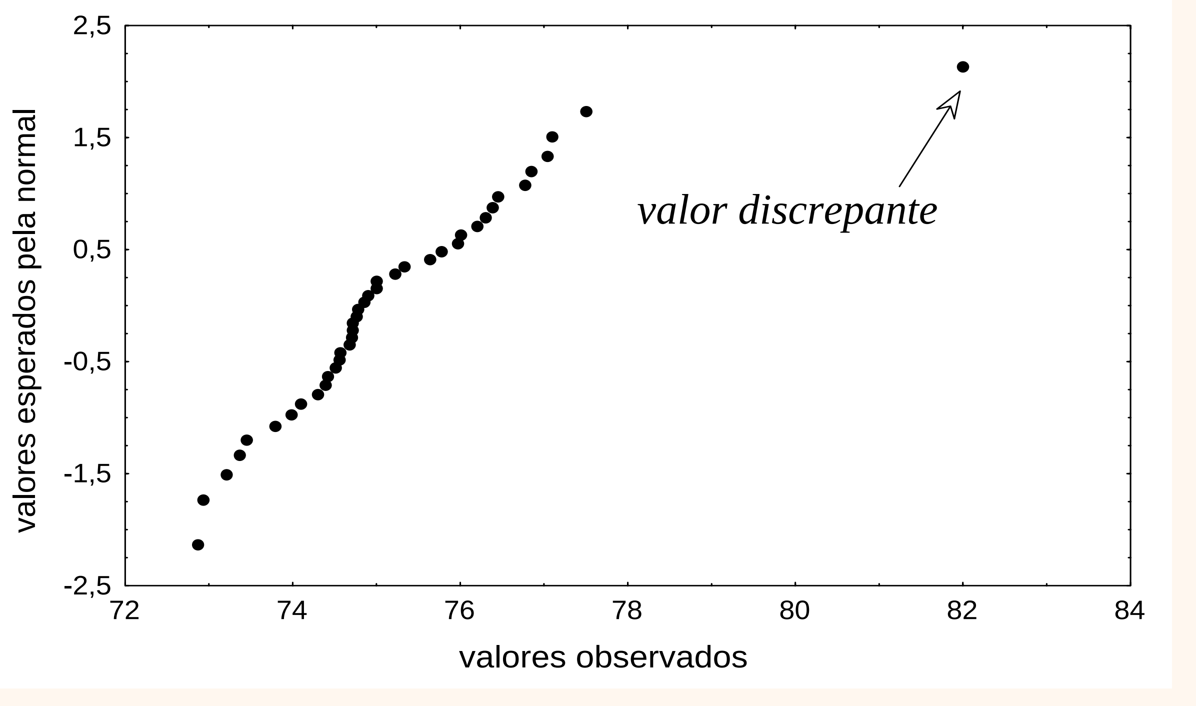


Gráfico de probabilidade normal

- Dados com distribuição normal, mas com um ponto discrepante



BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Gráfico de probabilidade normal

- Dados com distribuição assimétrica