

Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia

São Paulo: Atlas, 2004

Cap. 5 – Variáveis aleatórias discretas

APOIO:

Fundação de Apoio à Pesquisa Científica e Tecnológica do Estado de Santa Catarina (FAPESC)

Departamento de Informática e Estatística – UFSC (INE/CTC/UFSC)

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
 - número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas;
 - número de itens defeituosos em uma amostra retirada, aleatoriamente, de um lote;
 - número de defeitos em um azulejo que sai da linha de produção;
 - número de pessoas que visitam um determinado *site*, num certo período de tempo;

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
 - volume de água perdido por dia, num sistema de abastecimento;
 - resistência ao desgaste de um certo tipo de aço, num teste padrão;
 - tempo de resposta de um sistema computacional;
 - grau de empeno em um azulejo que sai da linha de produção.

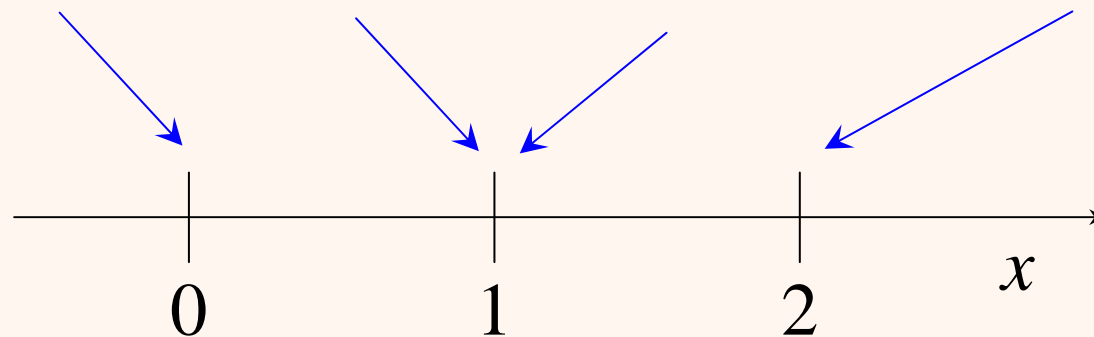
Variável aleatória

- Formalmente, uma **variável aleatória** é uma função que associa elementos do espaço amostral ao conjunto de números reais.

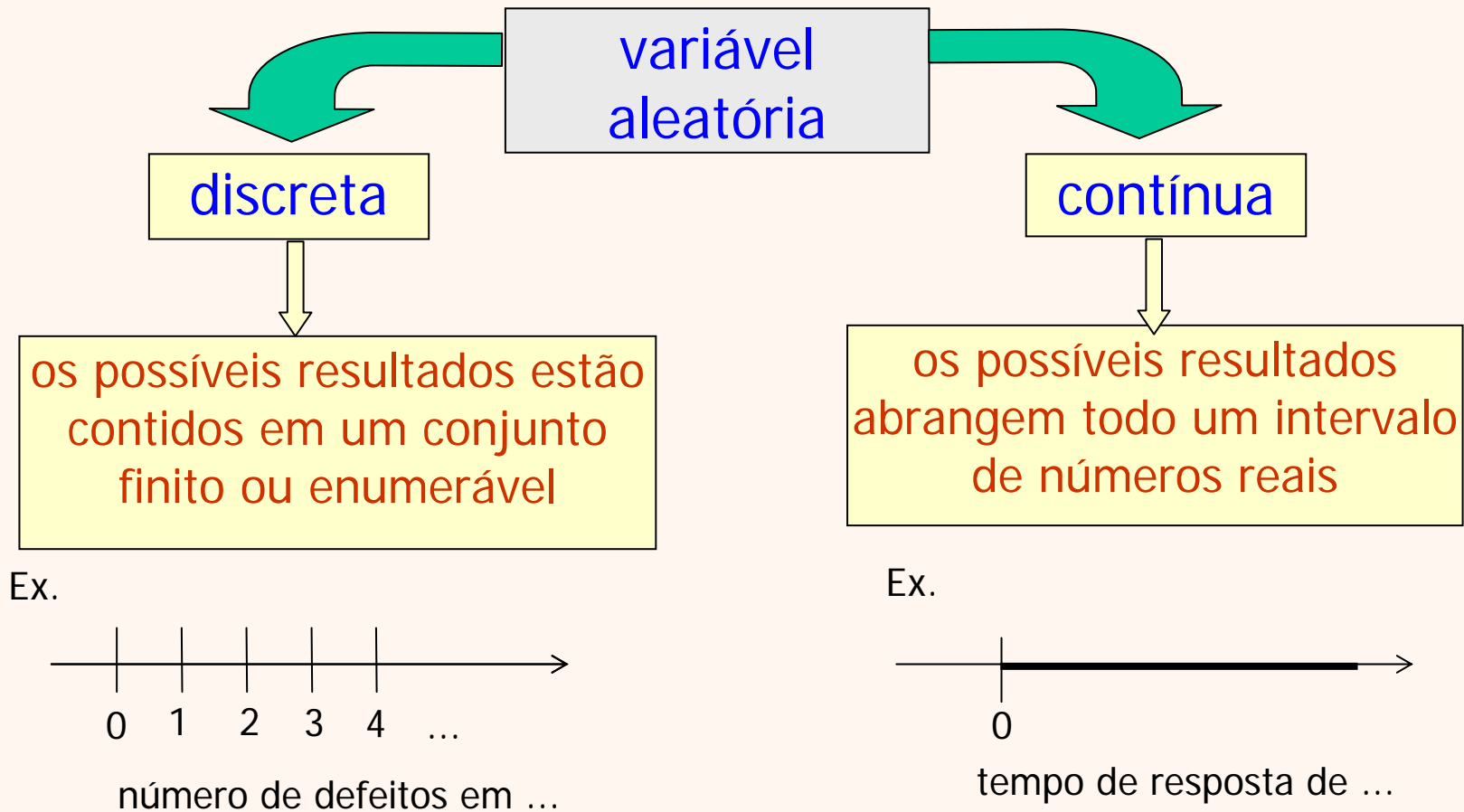
X = número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$$

X:



Variável aleatória



Variável aleatória discreta: função de probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

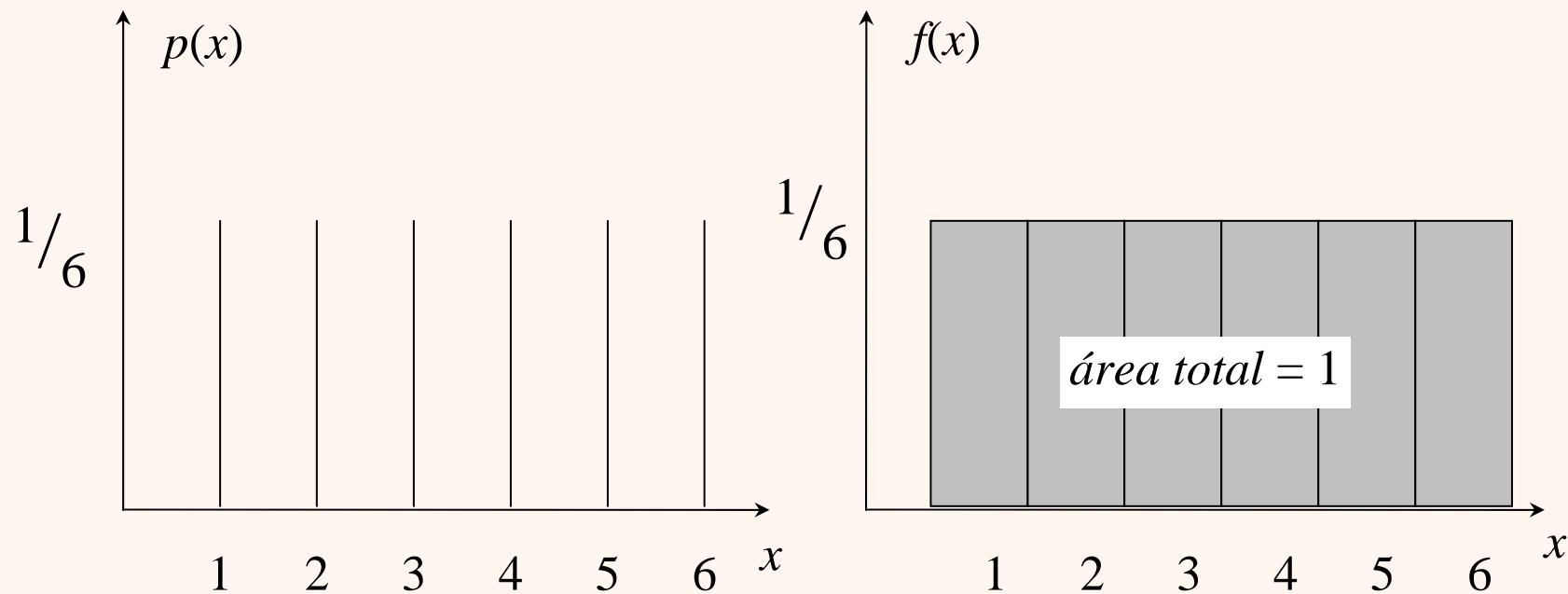
satisfazendo:

$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

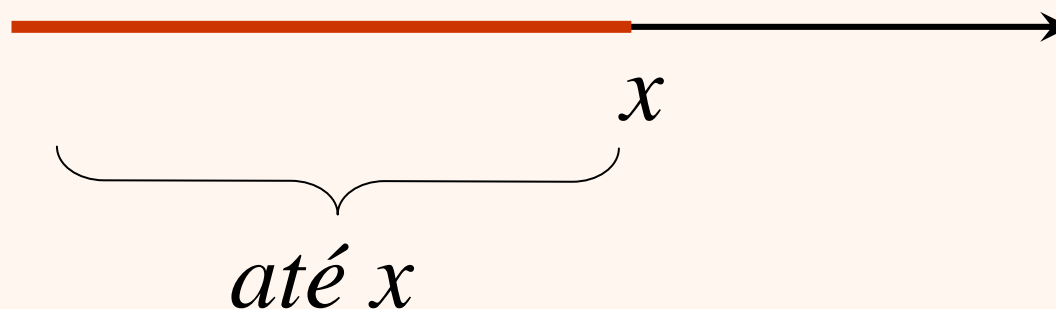
Variável aleatória discreta: função de probabilidade

- **X** = número obtido no lançamento de um dado comum.



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

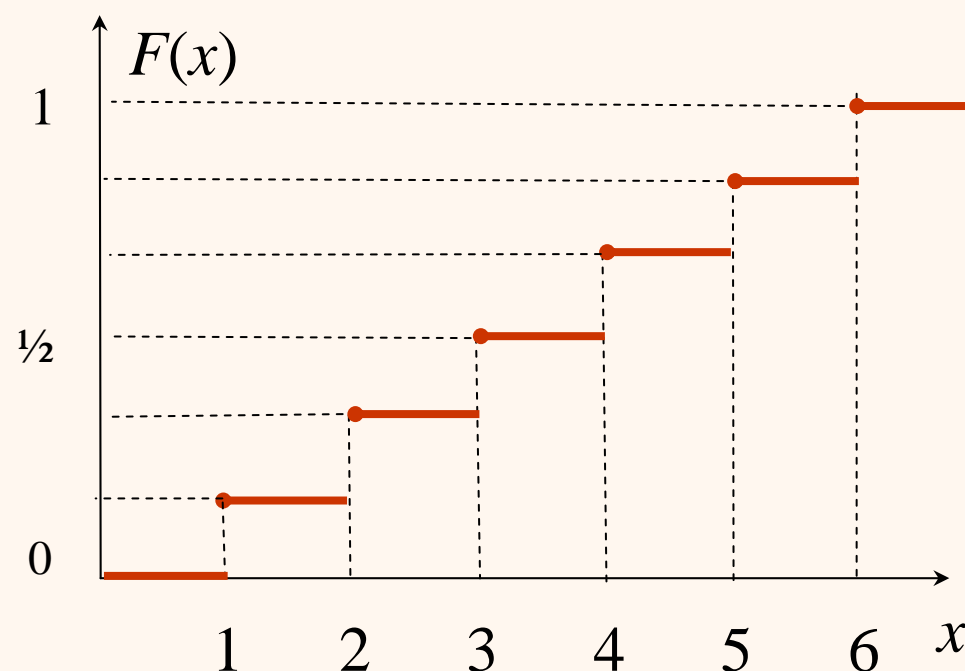
$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

- X = número obtido no lançamento de um dado comum.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$



Variável aleatória discreta: Valor esperado

Valores possíveis	Probabilidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^k x_j p_j$$

Variável aleatória discreta: Variância

Valores possíveis	Probabilidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{j=1}^k (x_j - \mu)^2 p_j$$

ou:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$\text{onde: } E(X^2) = \sum_{j=1}^k x_j^2 p_j$$

Desvio padrão:

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Propriedades do valor esperado e variância

$$a) E(c) = c$$

$$b) E(X + c) = E(X) + c$$

$$c) E(cX) = cE(X)$$

$$d) E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$e) E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

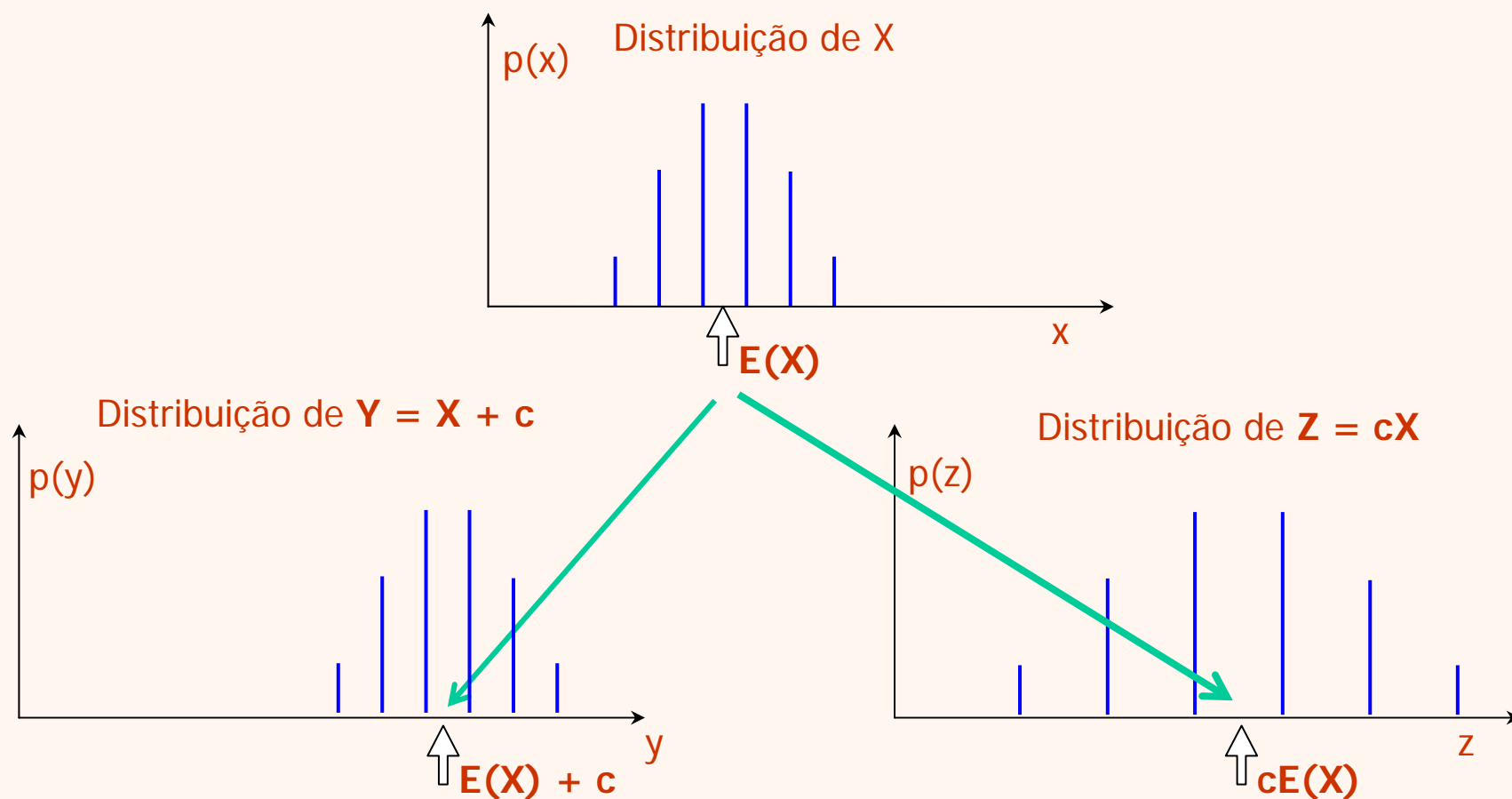
$$a) V(c) = 0$$

$$b) V(X + c) = V(X)$$

$$c) V(cX) = c^2 V(X)$$

$$d) DP(cX) = |c| DP(X)$$

Propriedades do valor esperado e variância



Variáveis aleatórias independentes

- X_1, X_2, \dots, X_n podem ser consideradas **variáveis aleatórias independentes** se o conhecimento de uma não altera as distribuições de probabilidades das demais.

- Vale para **variáveis aleatórias independentes**:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

Modelos discretos

- **Distribuição de Bernoulli de parâmetro p ($0 < p < 1$)**

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p.(1 - p)$$

x	$p(x)$
0	$1 - p$
1	p
Total	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

onde X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes, sendo cada uma delas com distribuição de Bernoulli de parâmetro p constante ($0 < p < 1$).

Ou seja,







Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

- X = número de sucessos em n ensaios
- ensaios independentes e
- com $P\{\text{sucesso}\} = p$,
constante para todo ensaio ($0 < p < 1$).

Modelos discretos

- Distribuição Binomial, $n = 4$:**

			<i>SSFF</i>		
			<i>SFSF</i>		
		<i>SFFF</i>	<i>SFFS</i>	<i>SSSF</i>	
		<i>FSFF</i>	<i>FSSF</i>	<i>SSFS</i>	
		<i>FFSF</i>	<i>FSFS</i>	<i>SFSS</i>	
	<i>FFFF</i>	<i>FFFS</i>	<i>FFSS</i>	<i>FSSS</i>	<i>SSSS</i>
					
Valores de X :	0	1	2	3	4
					
Probab.:	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

Modelos discretos

- **Distribuição Binomial**

$$p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

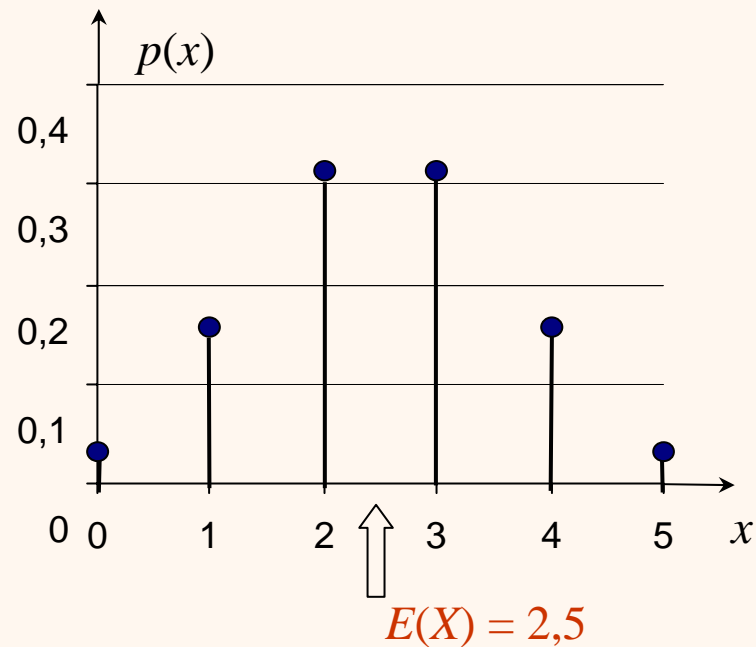
$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! x!}$$

$$E(X) = n.p \quad V(X) = n.p.(1-p)$$

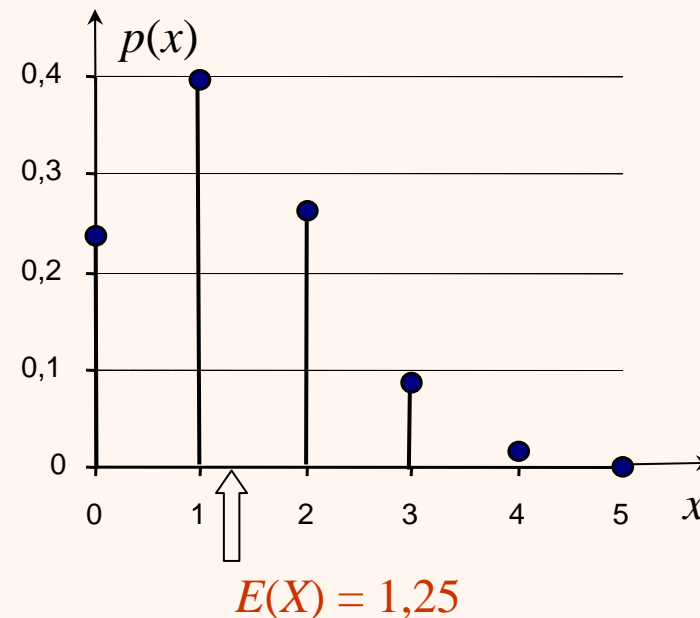
Modelos discretos

- Distribuição Binomial**

binomial com $n = 5$ e $p = 0,5$



binomial com $n = 5$ e $p = 0,25$



Modelos discretos

- **Ex. 5.2 - Binomial $n = 10$ e $p = 0,7$**

- Qual a probabilidade da maioria também acessar a p24?

- $P(X > 5) =$
 $= p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + + p(10)$
 $= 0,8497$

$X > 5$

Tabela da binomial

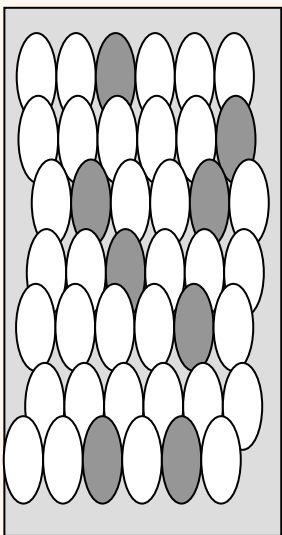
n	x	0,70
10	0	0,0000
	1	0,0001
	2	0,0014
	3	0,0090
	4	0,0368
	5	0,1029
	6	0,2001
	7	0,2668
	8	0,2335
	9	0,1211
	10	0,0282

Modelos discretos

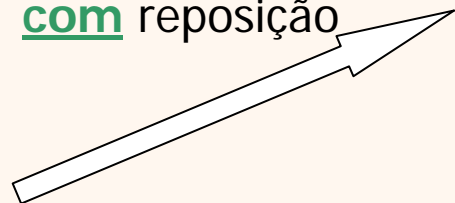
- Distribuição Hipergeométrica**

Lote com N itens:

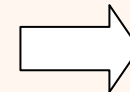
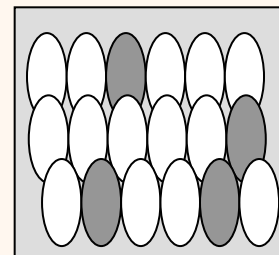
r defeituosos
 $N - r$ bons



Amostragem aleatória
com reposição



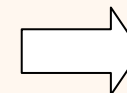
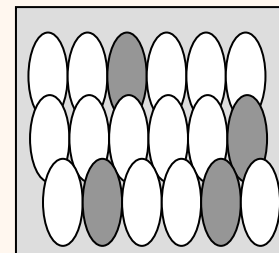
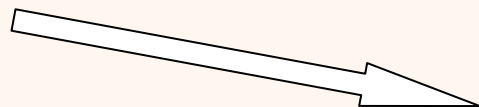
Amostra com n itens



Distribuição
binomial

Amostra com n itens

Amostragem aleatória
sem reposição



Distribuição
hipergeométrica

Modelos discretos

- Distribuição Hipergeométrica

$$p(x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad [x = 0, 1, \dots, \min(r, n)]$$

$$E(X) = n.p$$

$$V(X) = n.p.(1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1} \quad (p = r/N)$$

Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson**

- Na prática, muitas situações nas quais interessa o número de observações de uma variável em um intervalo contínuo (tempo ou espaço) podem ser convenientemente explicadas pela distribuição de Poisson. Exemplos:

- chamadas telefônicas por minuto,
- mensagens que chegam a um servidor por segundo
- acidentes por dia,
- defeitos por m², etc..

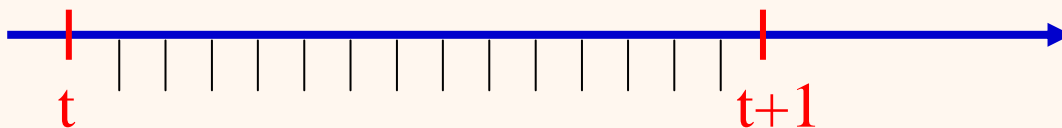
Modelos discretos

- **Distribuição de Poisson. Suposições:**
 - Os números de ocorrências em quaisquer intervalos são **independentes**.
 - A probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é **zero**.
 - O número médio de ocorrências (λ) é **constante** em todo o intervalo considerado.

Modelos discretos

- Distribuição de Poisson. Uma justificativa:**

X = núm. de ocorrências em $[t, t+1]$



n intervalos de amplitude $1/n$, com $n \mapsto \infty$

p = probab. de ocorrência em cada intervalo

$$P(X = x) \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{aligned} n &\mapsto \infty \\ p &\mapsto 0 \\ n p &\mapsto \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$P(X = x) \longrightarrow \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad (x = 1, 2, \dots)$$

Modelos discretos

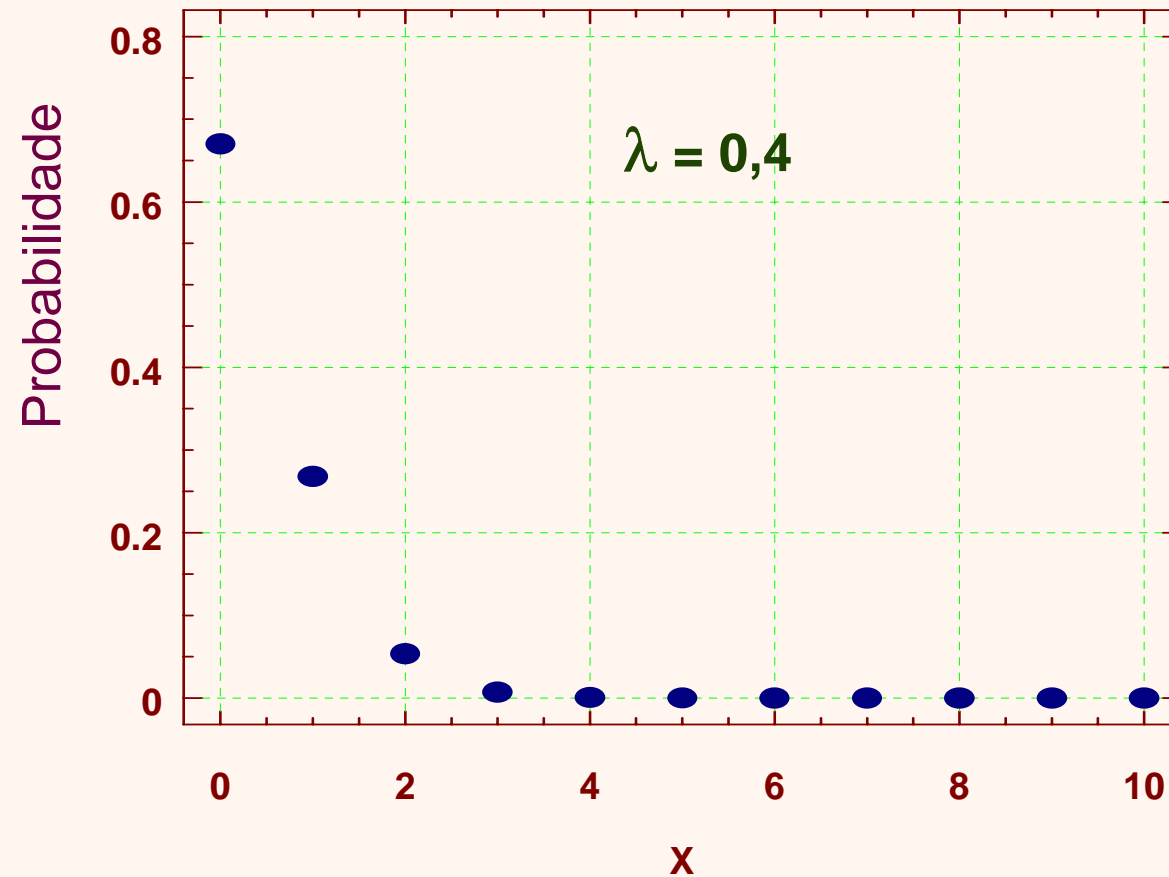
- Distribuição de Poisson

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Modelos discretos

- Distribuição de Poisson



Modelos discretos

- Distribuição de Poisson

