

Estatística Aplicada às Ciências Sociais

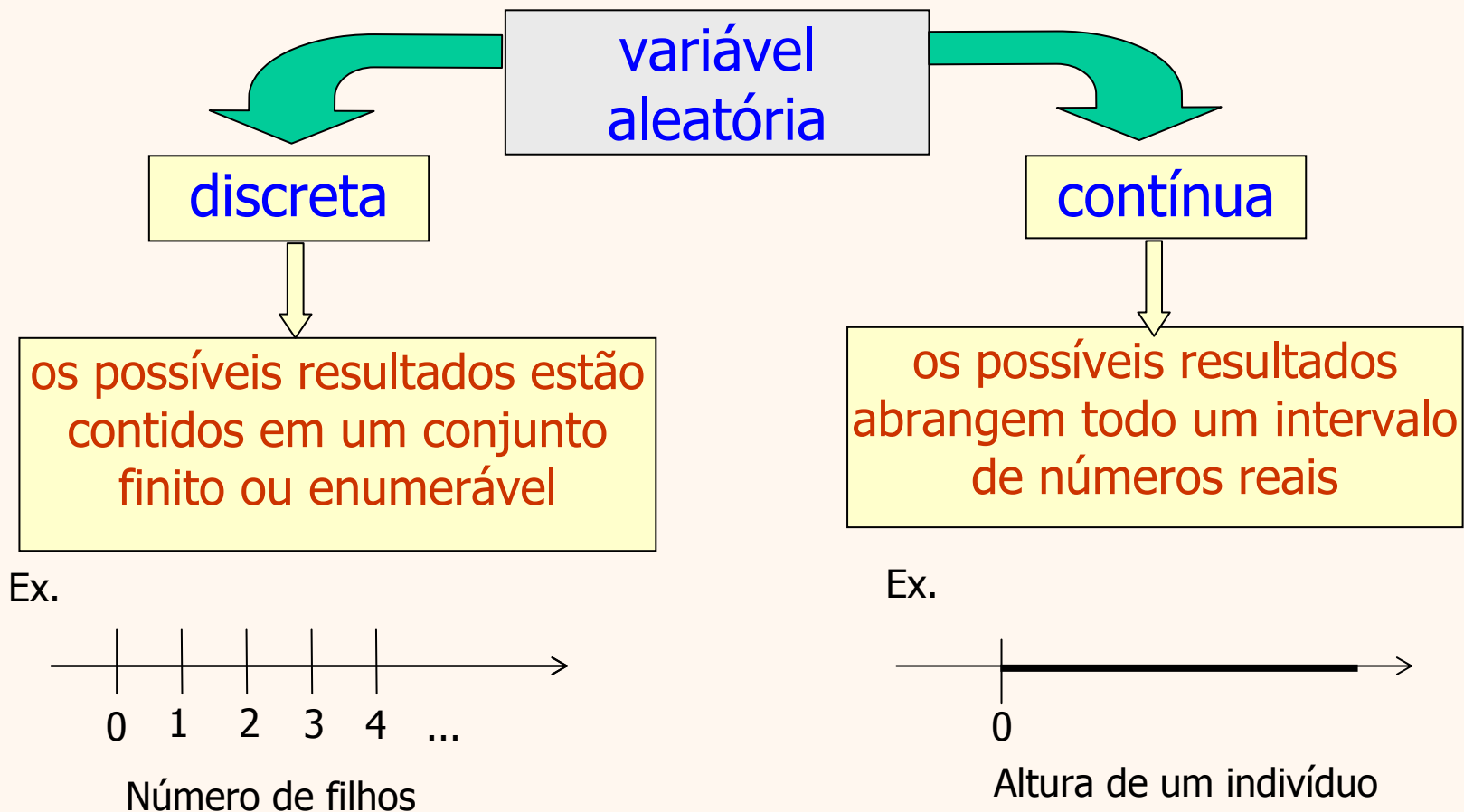
Sexta Edição

Pedro Alberto Barbetta

Florianópolis: Editora da UFSC, 2006

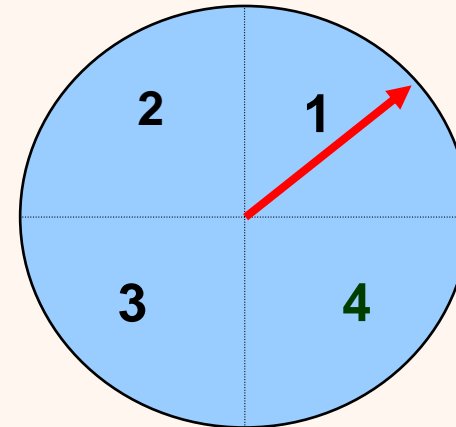
Cap. 8 – Distribuições contínuas e modelo normal

Variável aleatória



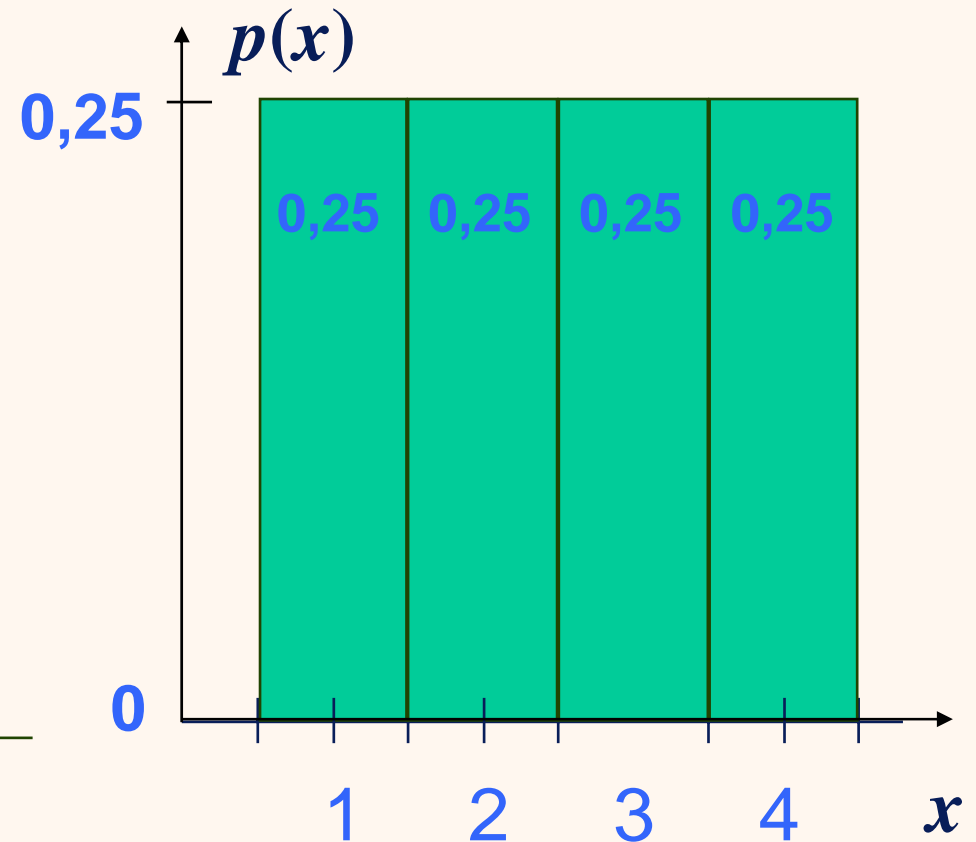
Exemplo (com variável discreta)

- Um jogo de azar é realizado da seguinte forma: toma-se um círculo e divide-se-o em quatro partes iguais, 1 a 4. Sobre o centro do círculo, é fixado um ponteiro, o qual é girado e anota-se o número do setor onde a ponta do ponteiro parou.



Distribuição de probabilidades

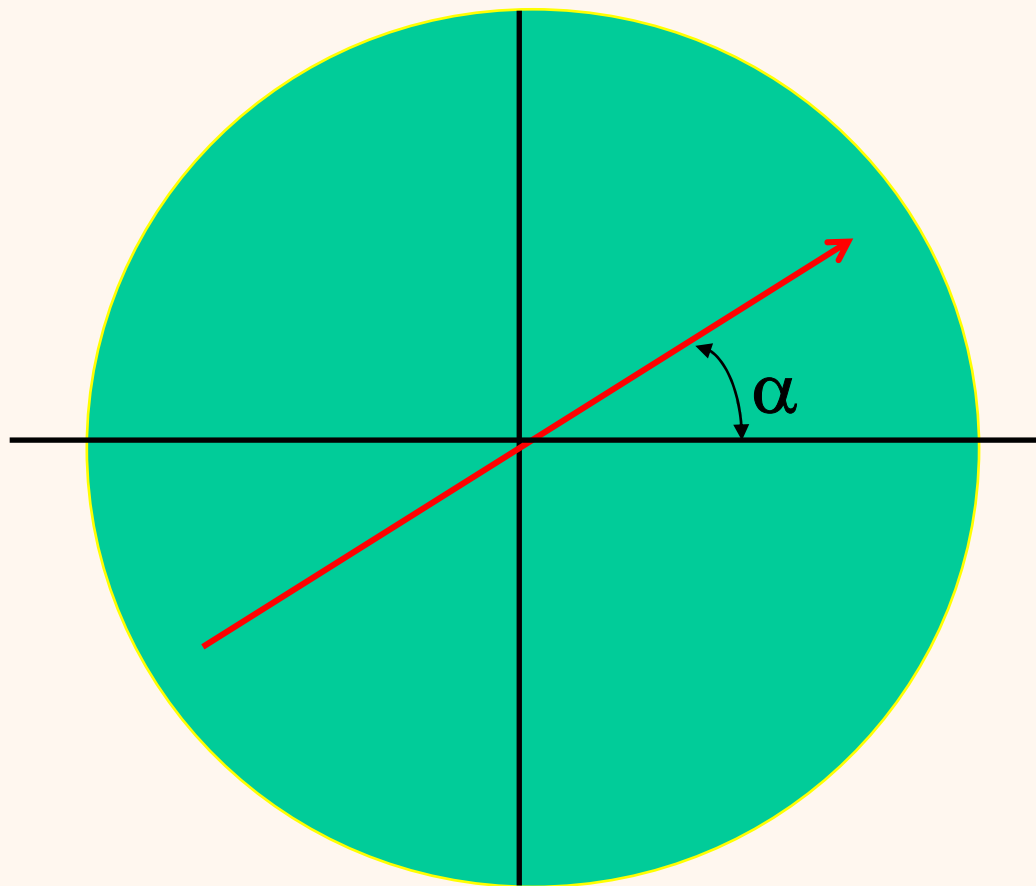
x	$p(x)$
1	0,25
2	0,25
3	0,25
4	0,25
Total	1



Exemplo 8.1: com variável aleatória contínua

- Sobre o centro de um círculo, é fixado um ponteiro, o qual é girado. Anota-se o ângulo formado pelo ponteiro com o eixo horizontal, como na figura a seguir.

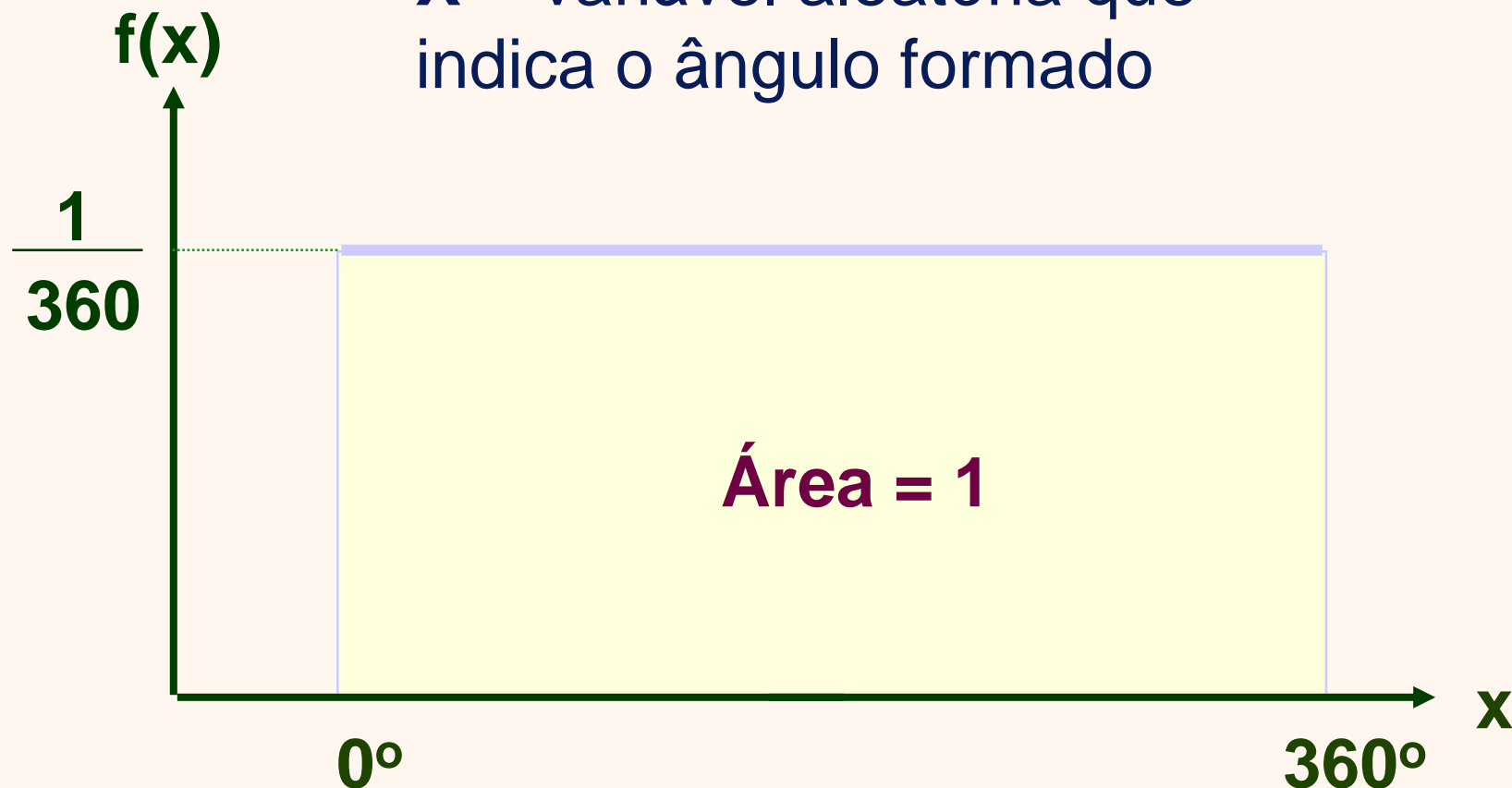
Exemplo 8.1



- Construir a distribuição de probabilidades para o ângulo (α) obtido neste experimento.

Exemplo 8.1

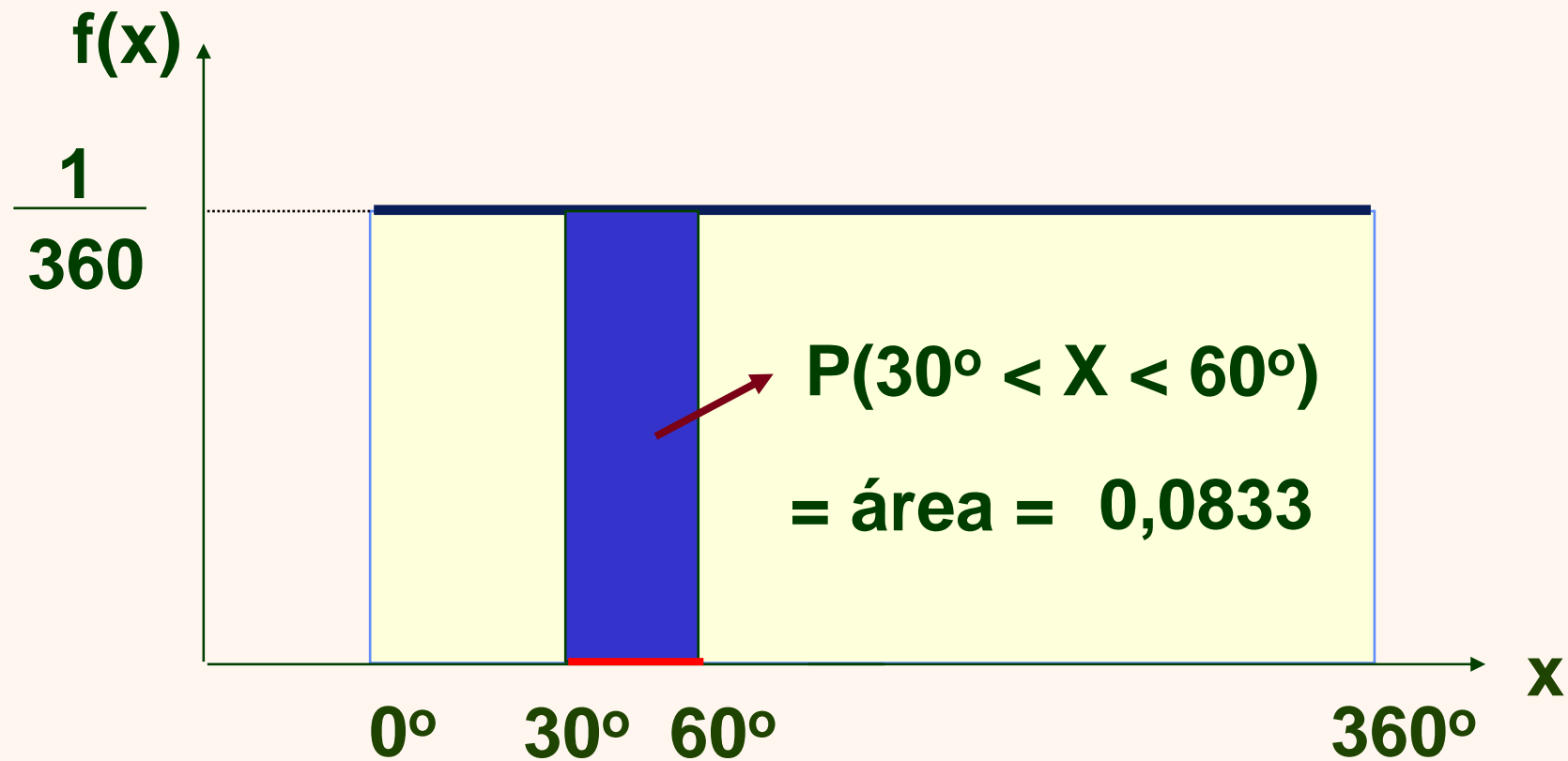
X = variável aleatória que indica o ângulo formado



Exemplo 8.1

- Qual é a probabilidade de se obter um ângulo entre 30° e 60° ?

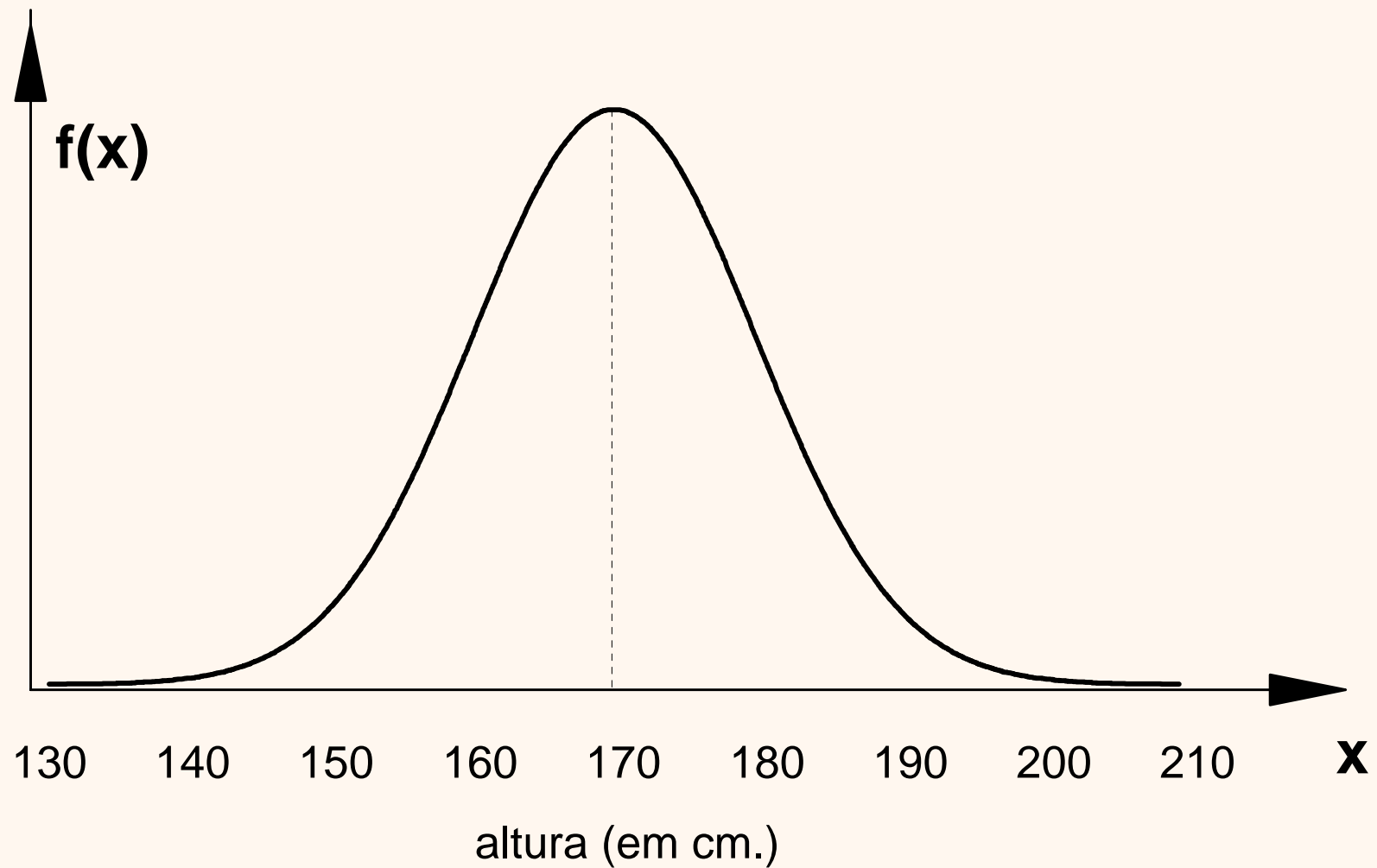
Exemplo 8.1



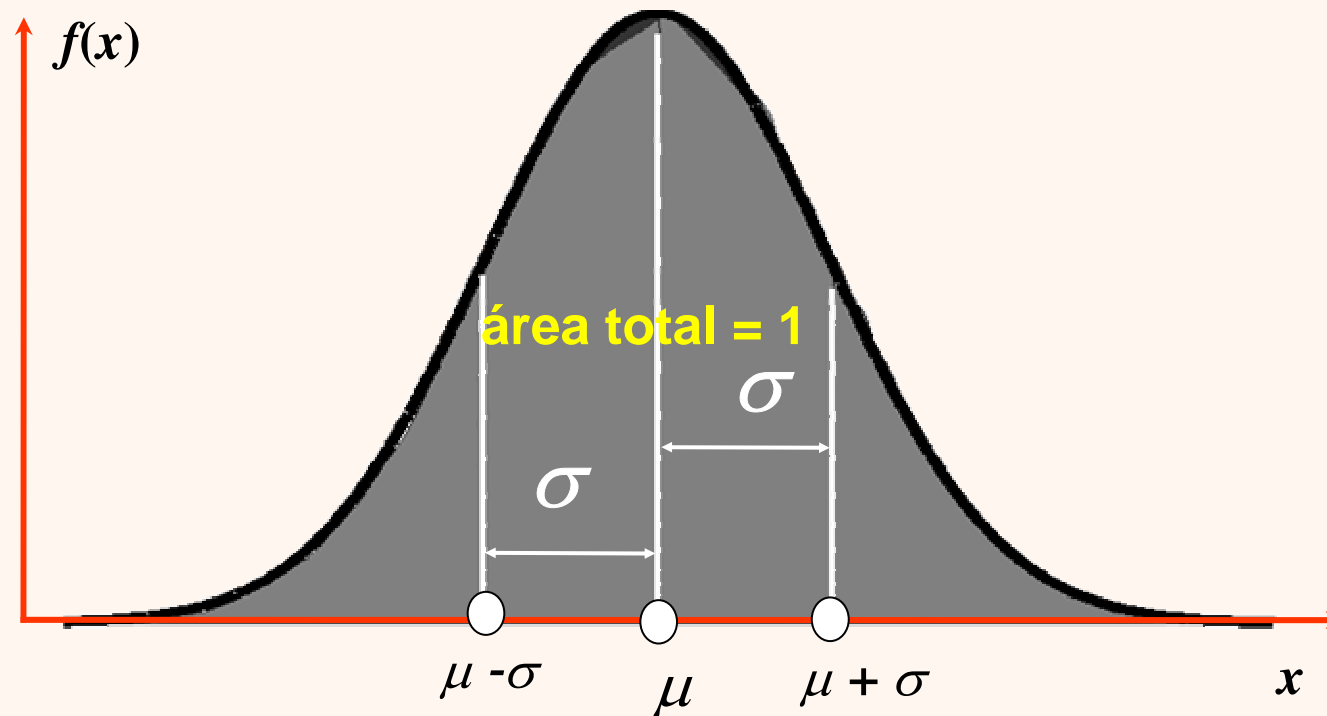
Exemplo 8.2

- Selecionar, aleatoriamente, de uma certa universidade, um estudante do sexo masculino. Seja **X** a sua altura, em centímetros.

Exemplo 8.2



Distribuição normal

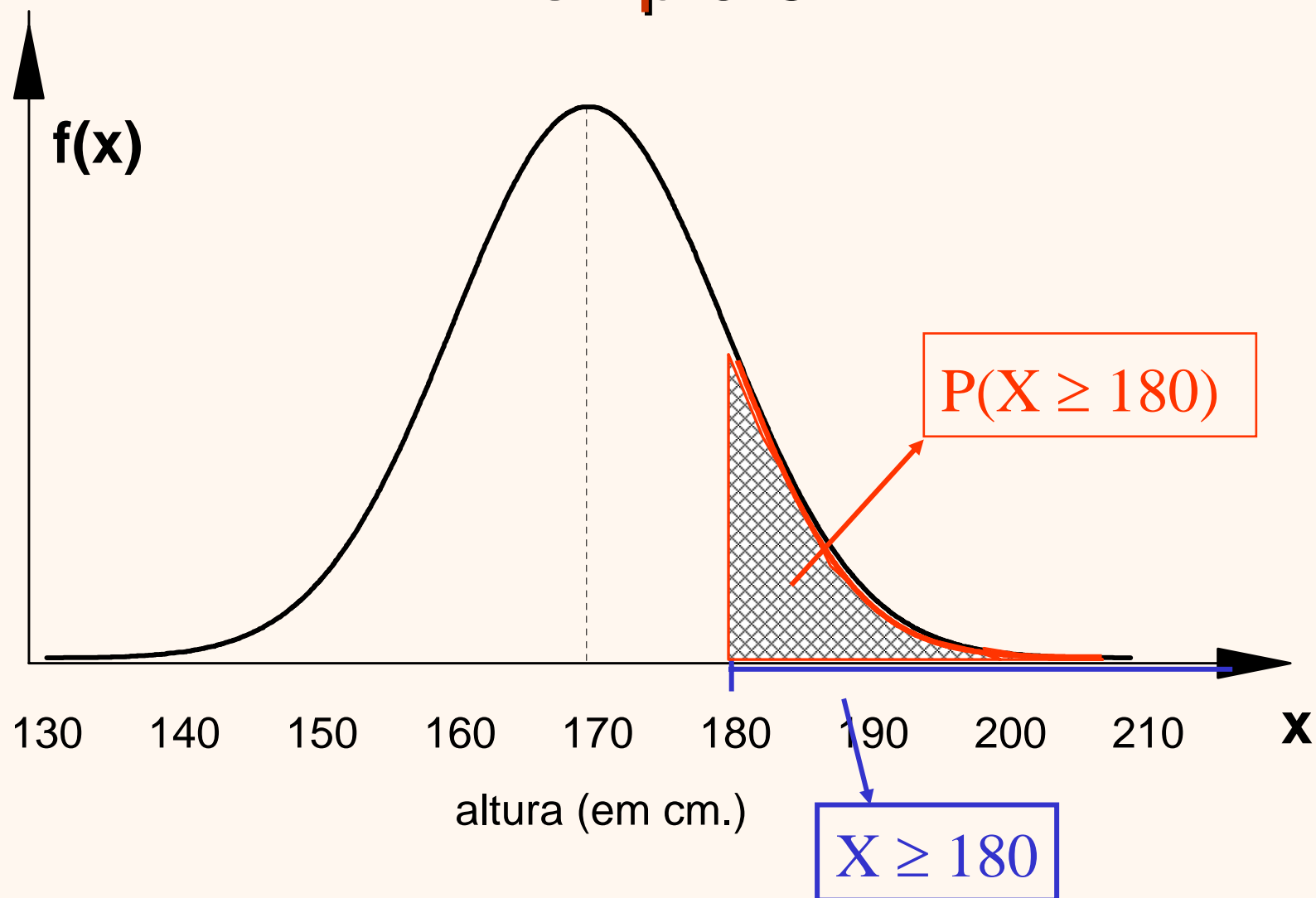


Exemplo 8.2

Representar:

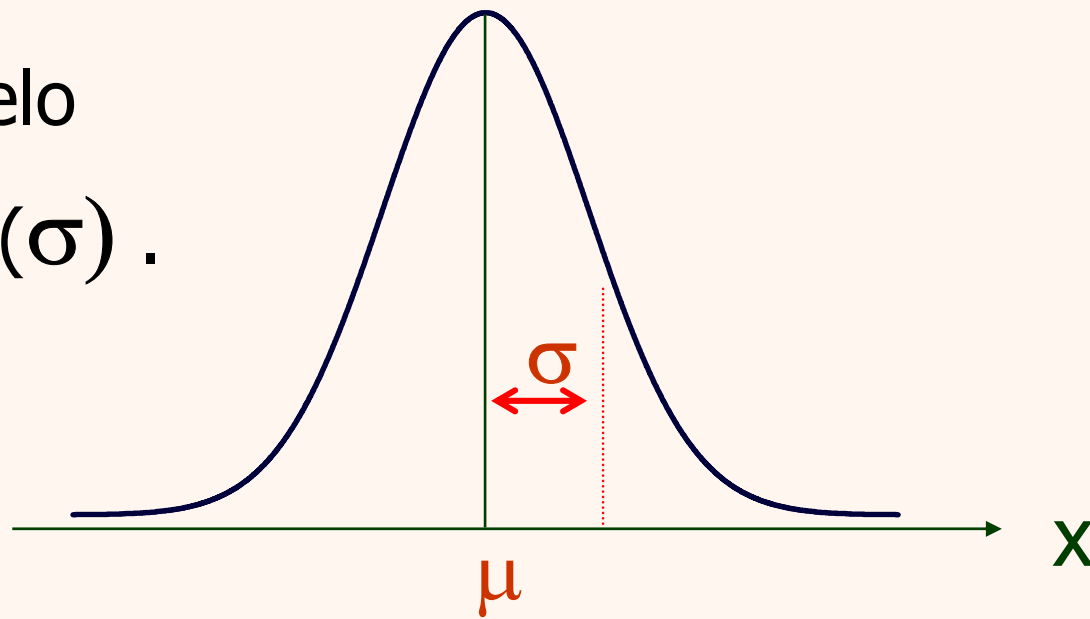
- o evento: “o estudante selecionado ter 180 cm ou mais” ($X \geq 180$) e
- a probabilidade deste evento: $P(X \geq 180)$

Exemplo 8.2



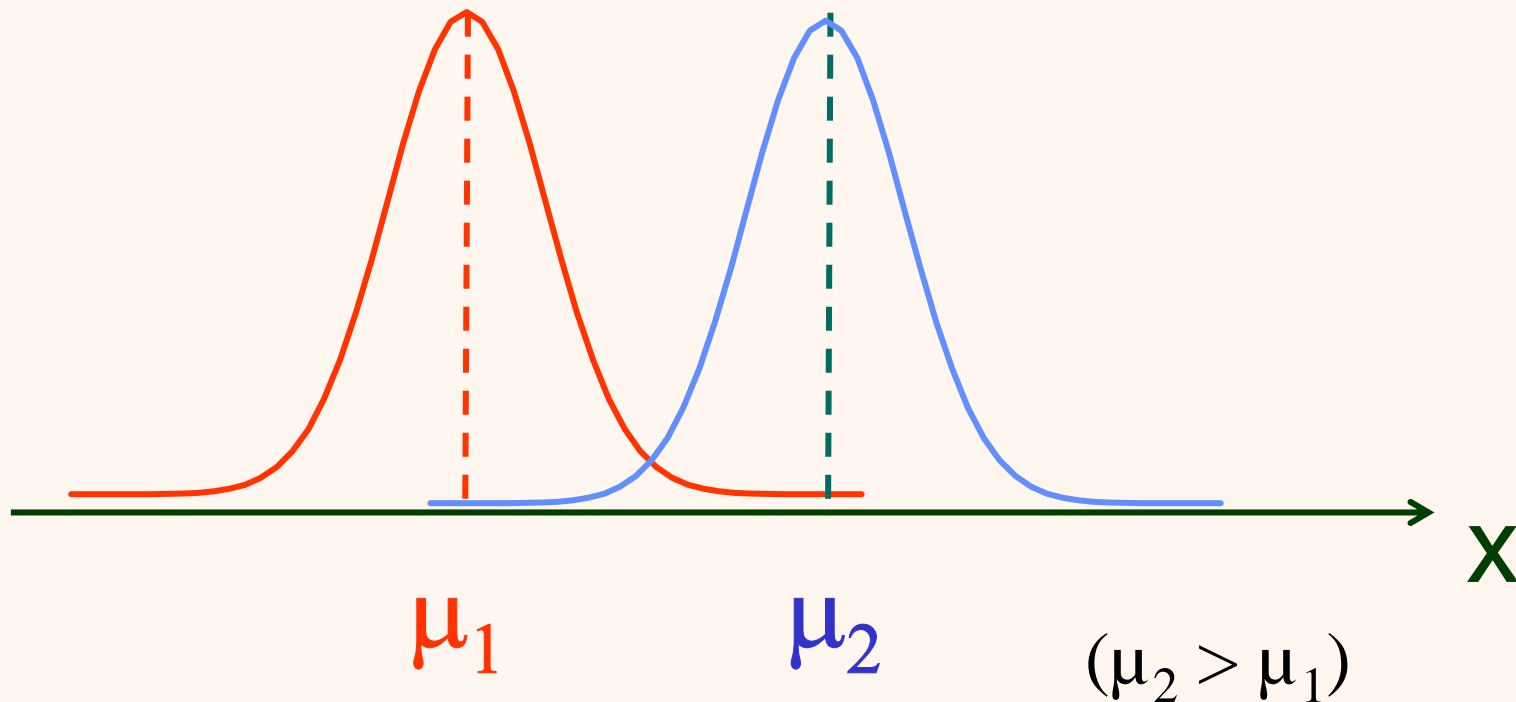
Distribuição normal

- Identificada pela média (μ) e pelo desvio padrão (σ) .



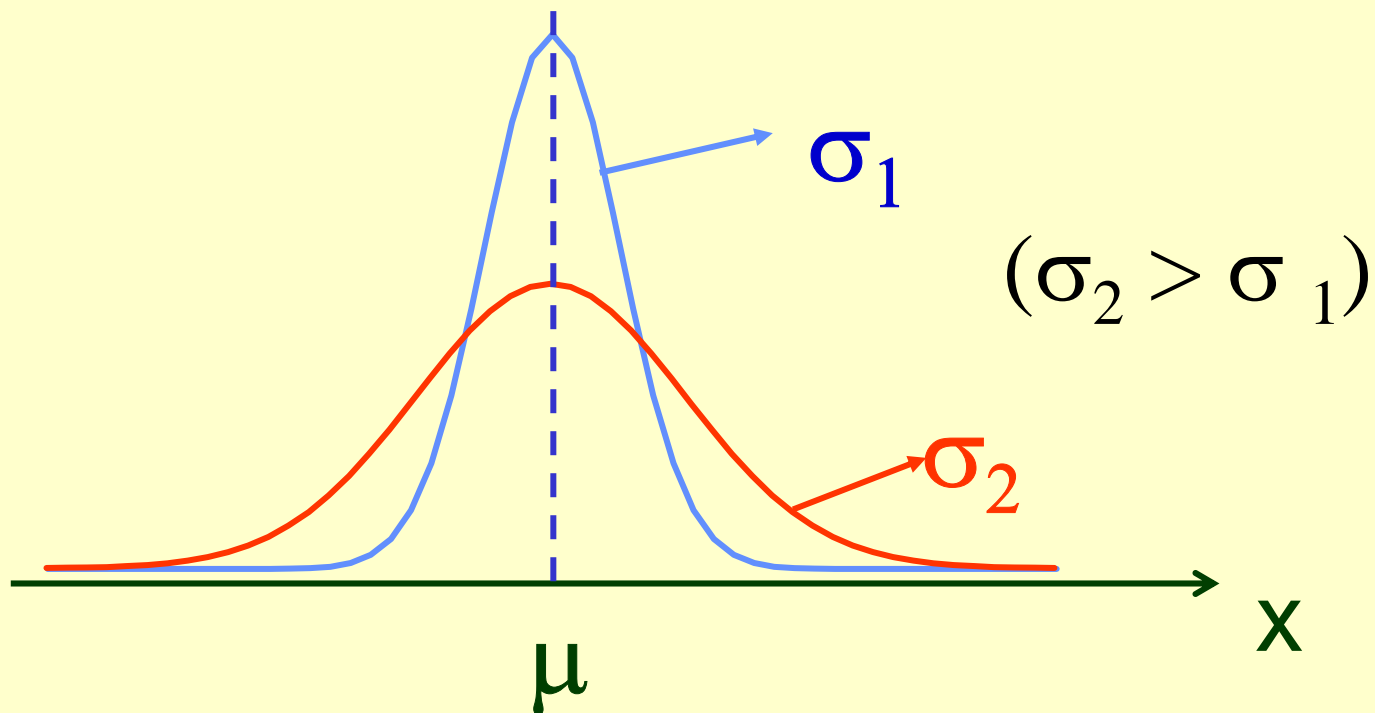
Média e Desvio Padrão

Mesmo σ e diferentes μ



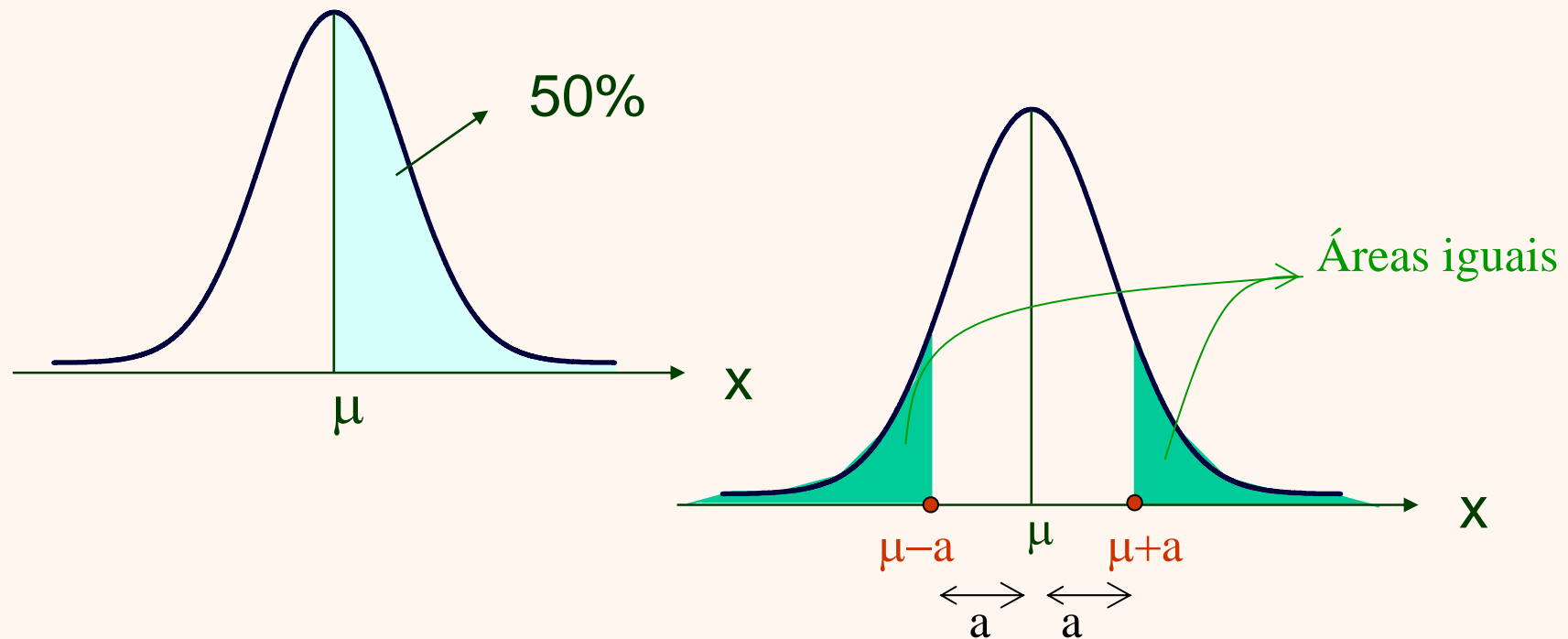
Média e Desvio Padrão

Mesmo μ e diferentes σ



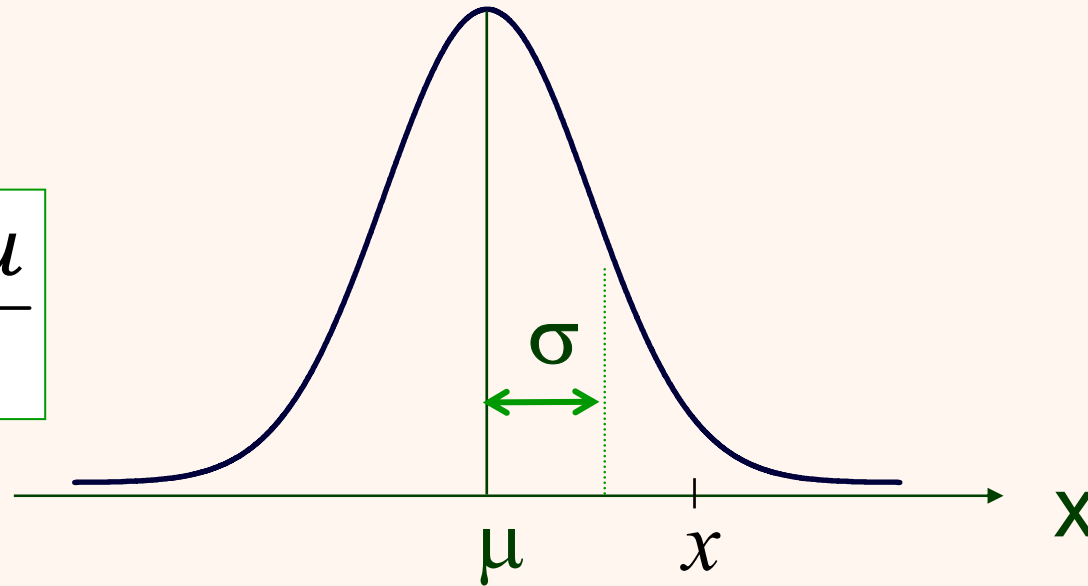
Distribuição normal

- Simetria em relação à média.



Valor padronizado

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



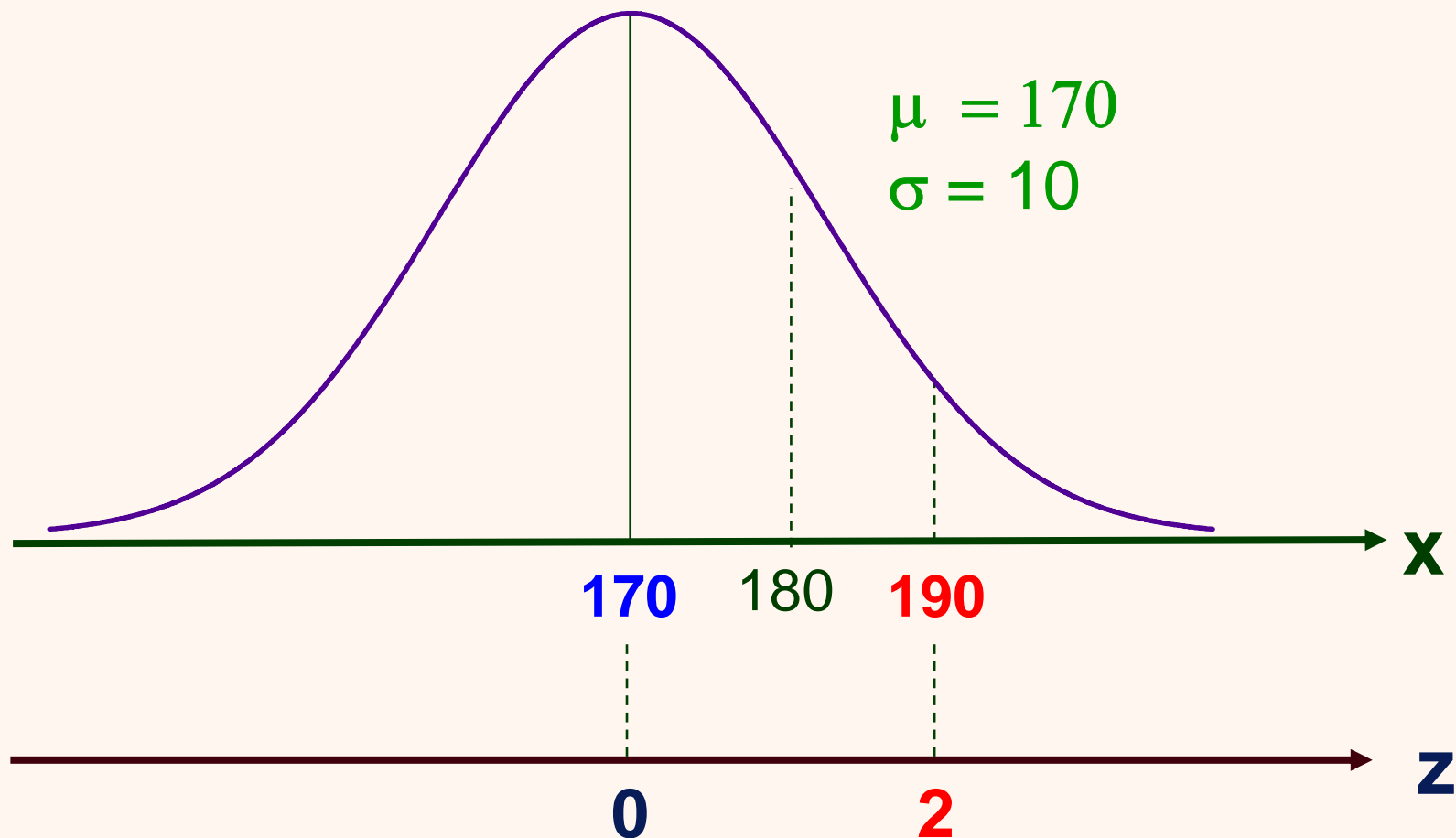
- O valor z (*valor padronizado*) é uma medida relativa. Mede o quanto x se afasta da média (μ), em unidade de desvio padrão (σ).

Exemplo 8.2

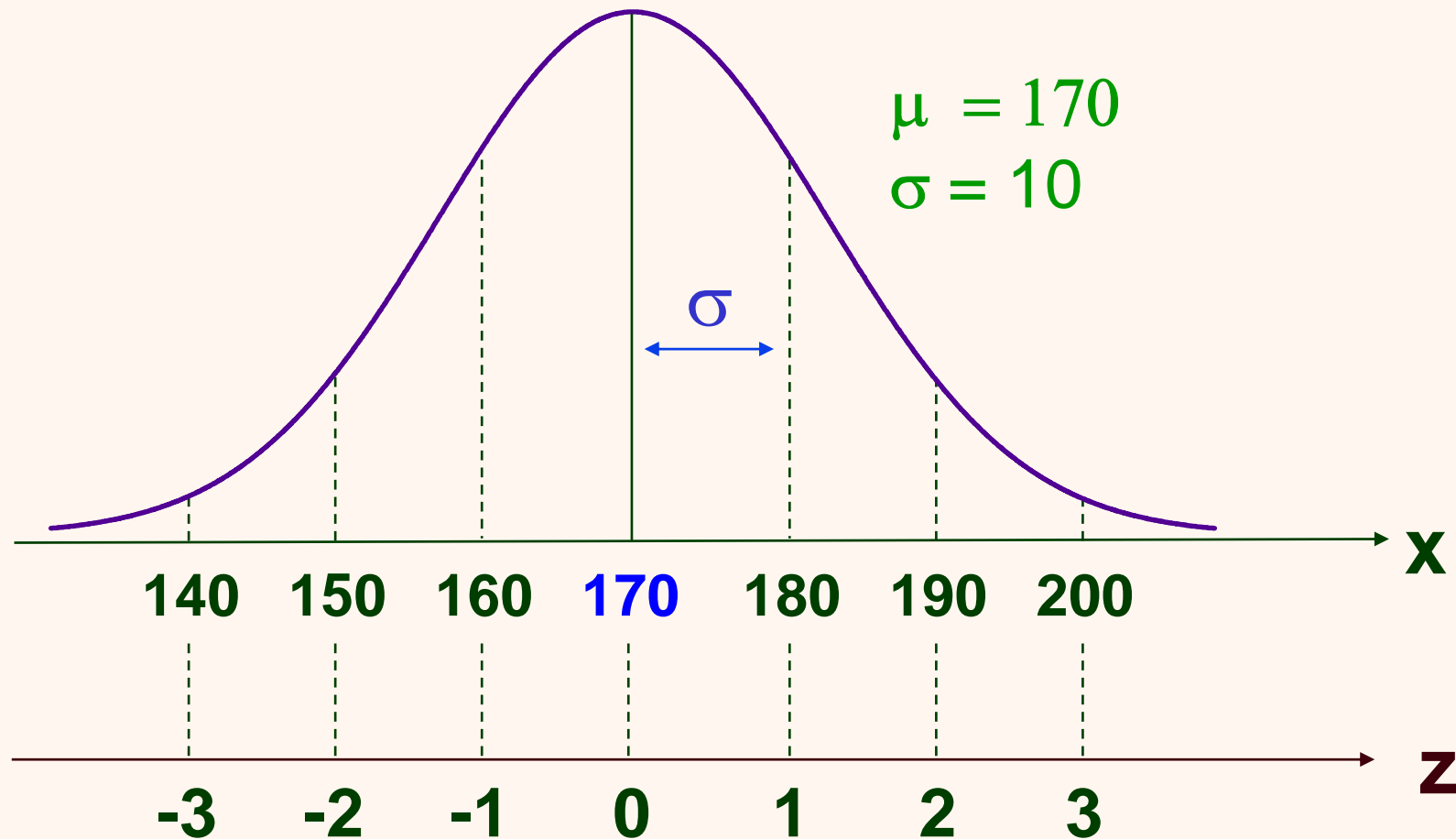
- Se a altura de um indivíduo for $x = 190$ cm, então qual é o escore padronizado z correspondente?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{190 - 170}{10} = 2$$

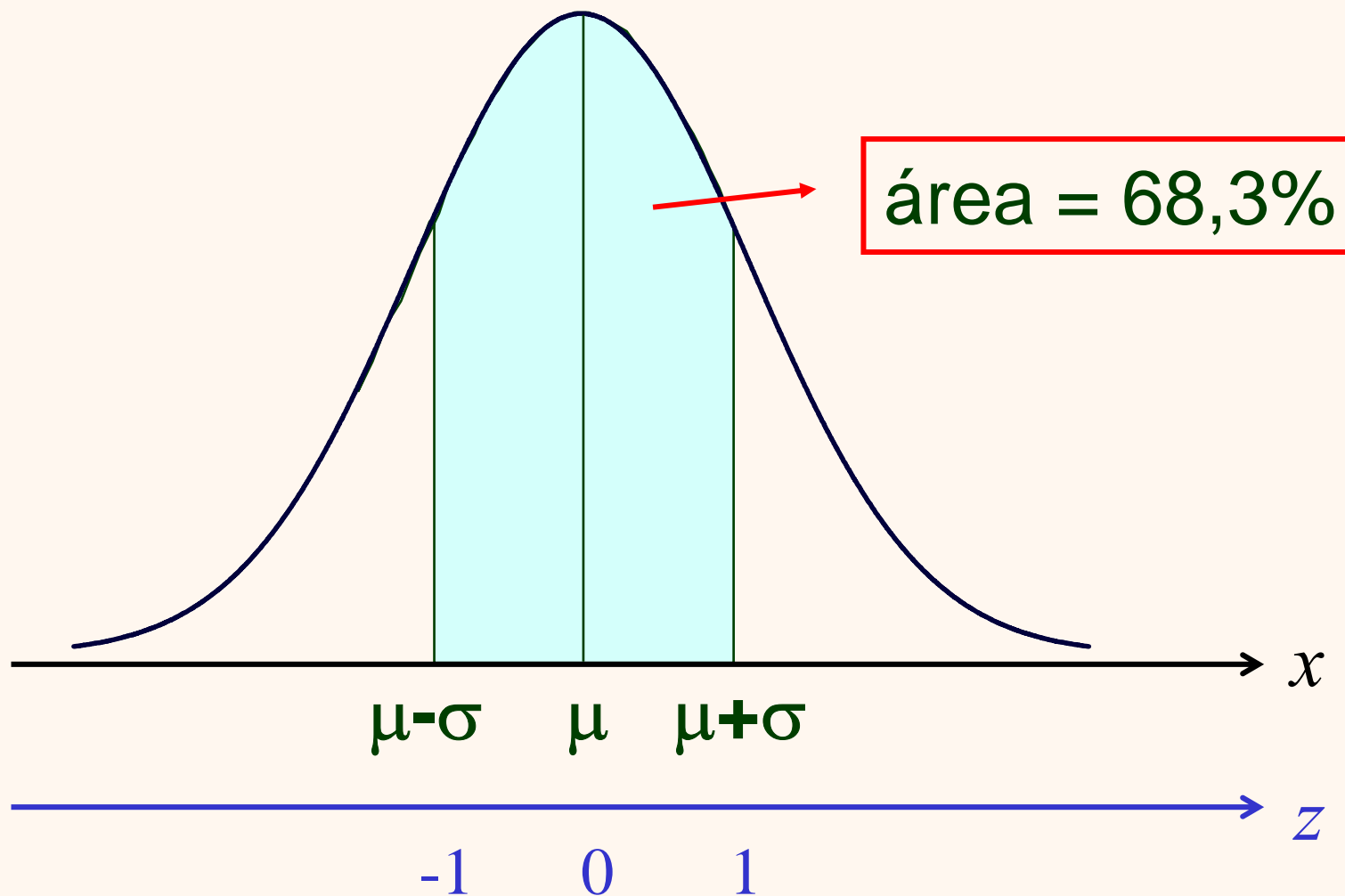
Exemplo 8.2



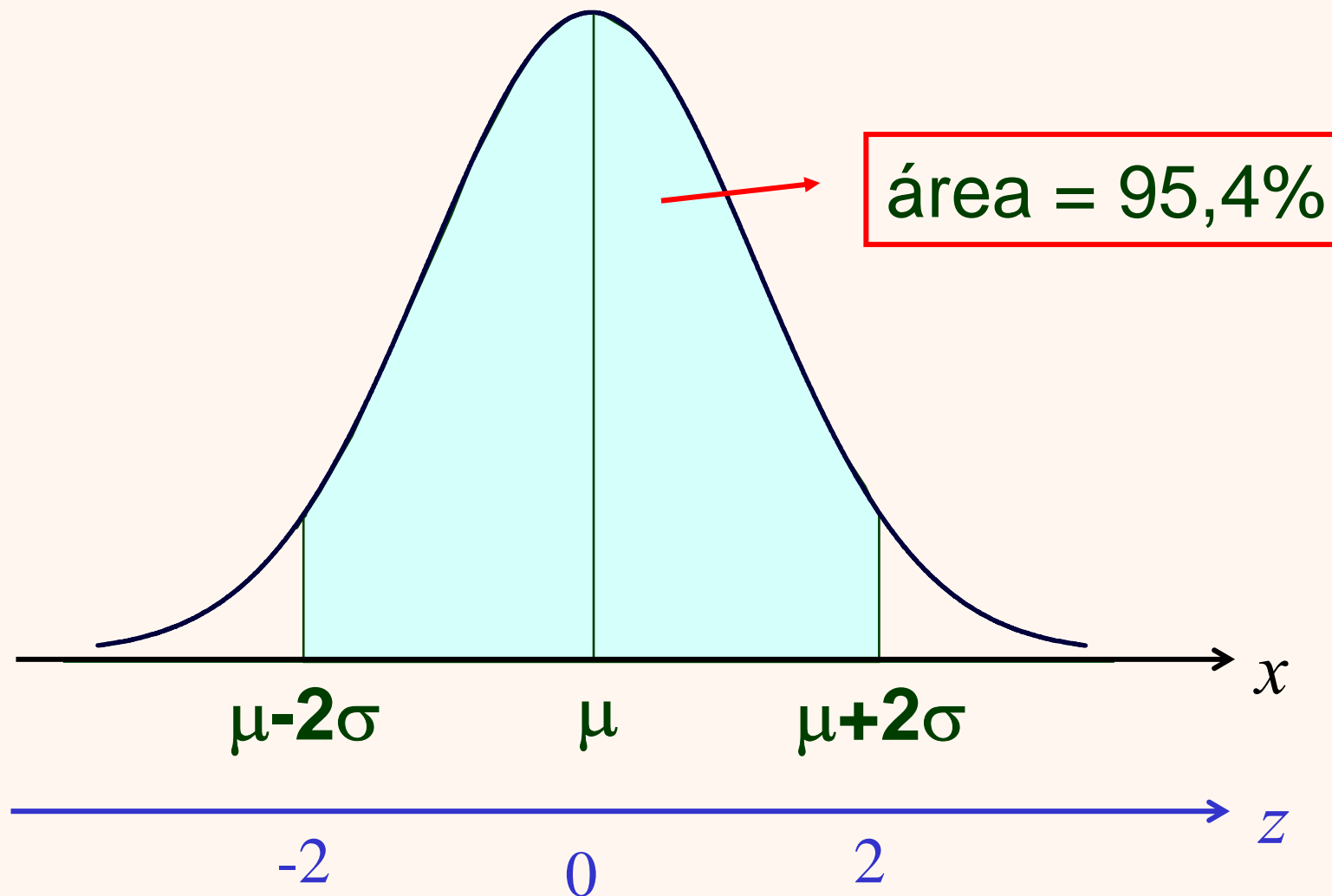
Exemplo 8.2



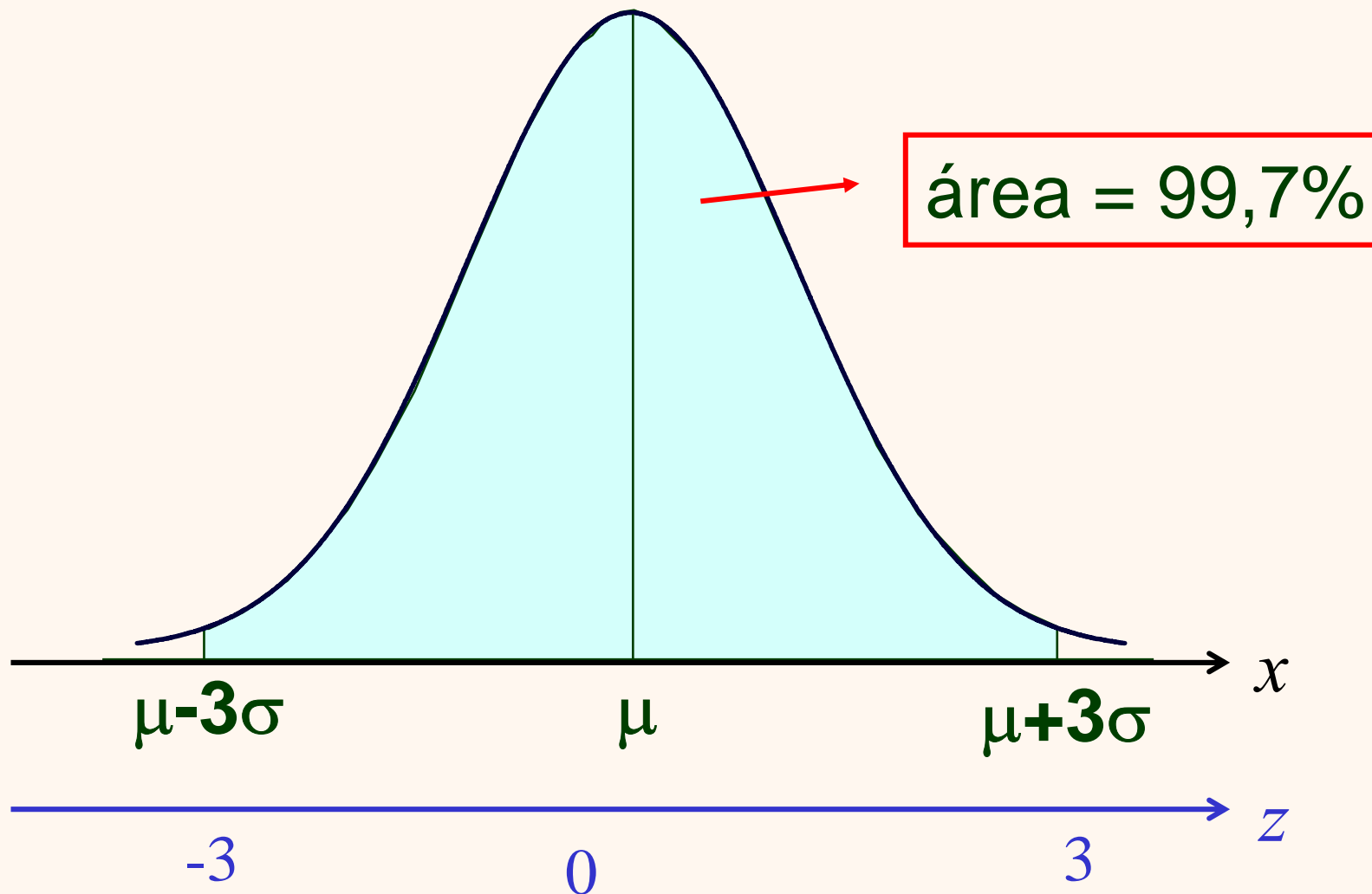
Distribuição normal



Distribuição normal

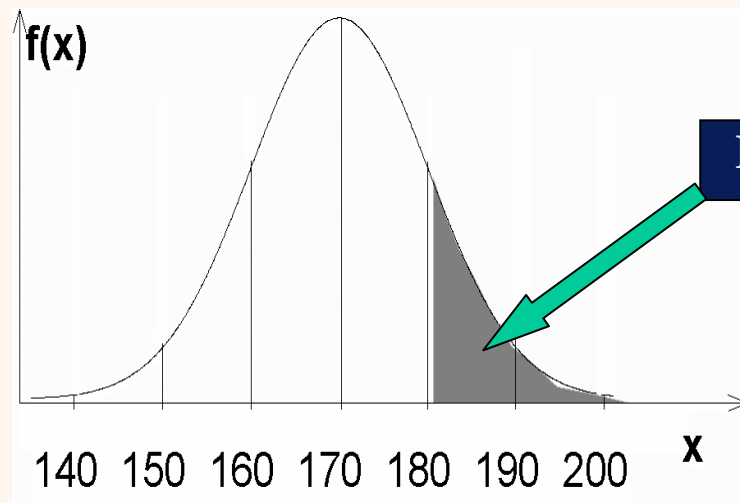


Distribuição normal

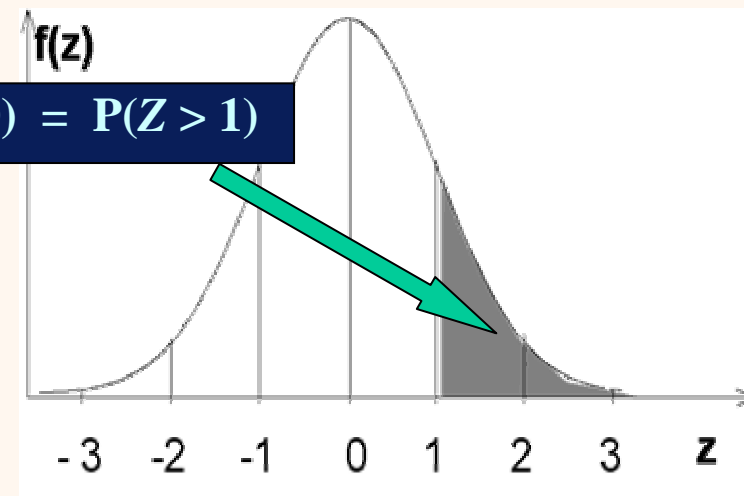


Distribuição normal padrão

Distribuição de X :
normal com $\mu = 170$ e $\sigma = 10$



Distribuição de Z :
normal padrão



$$P(X > 180) = P(Z > 1)$$

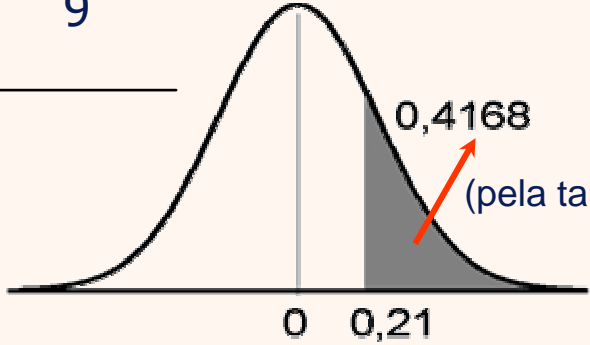
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

Tabela da distribuição normal padrão

Ex. Qual é a área acima de $z = 0,21$?

Z	segunda decimal de z				
	0	1	2	...	9
0,0					
0,1					
0,2		0,4168			
...					

(área na cauda superior)

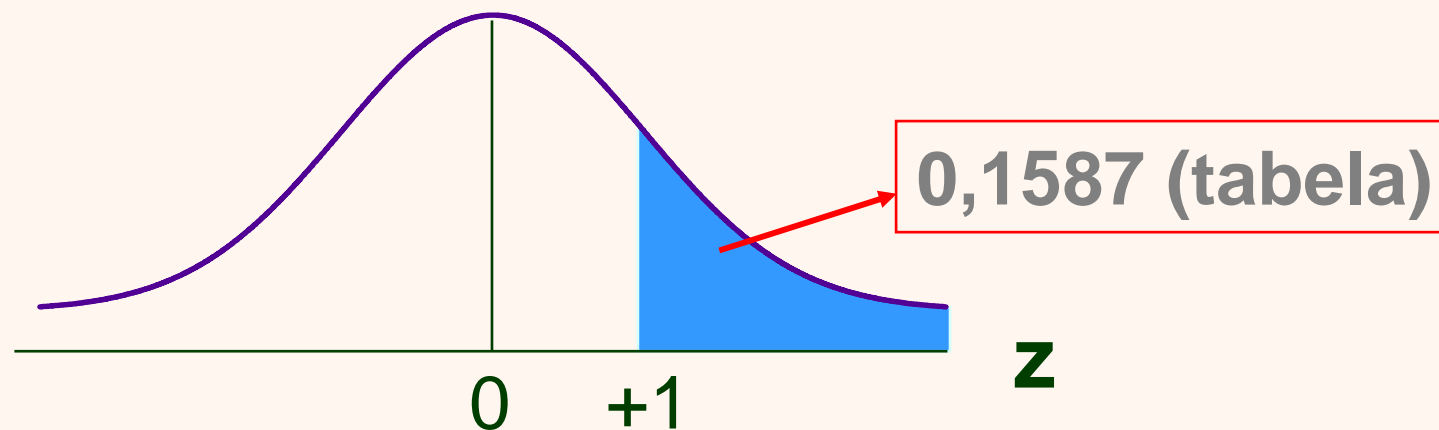


0,4168
(pela tabela)

Exercício: uso da tabela

Com base na tabela da normal padronizada, calcular:

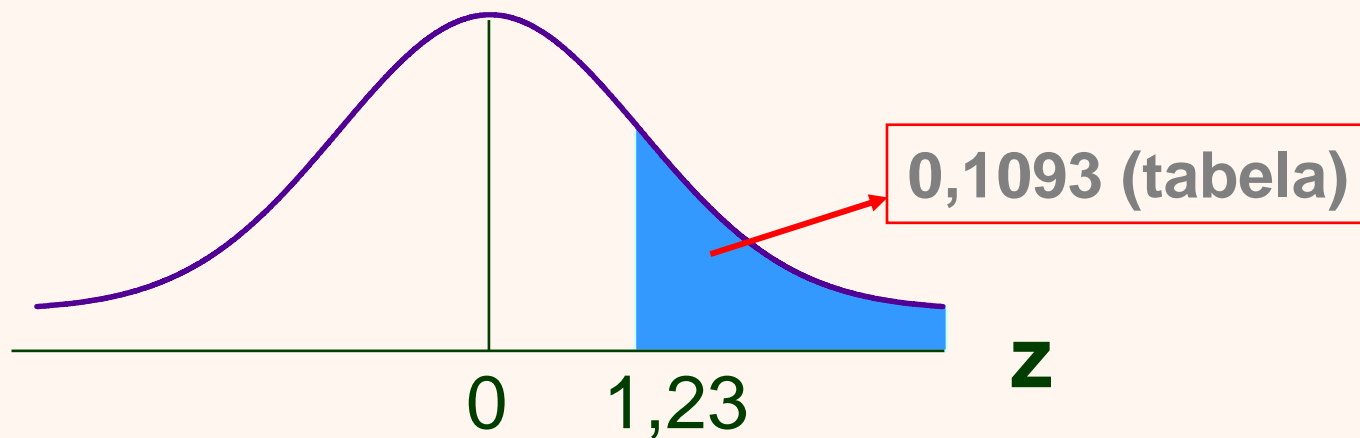
a) $P(Z > 1)$



Exercício

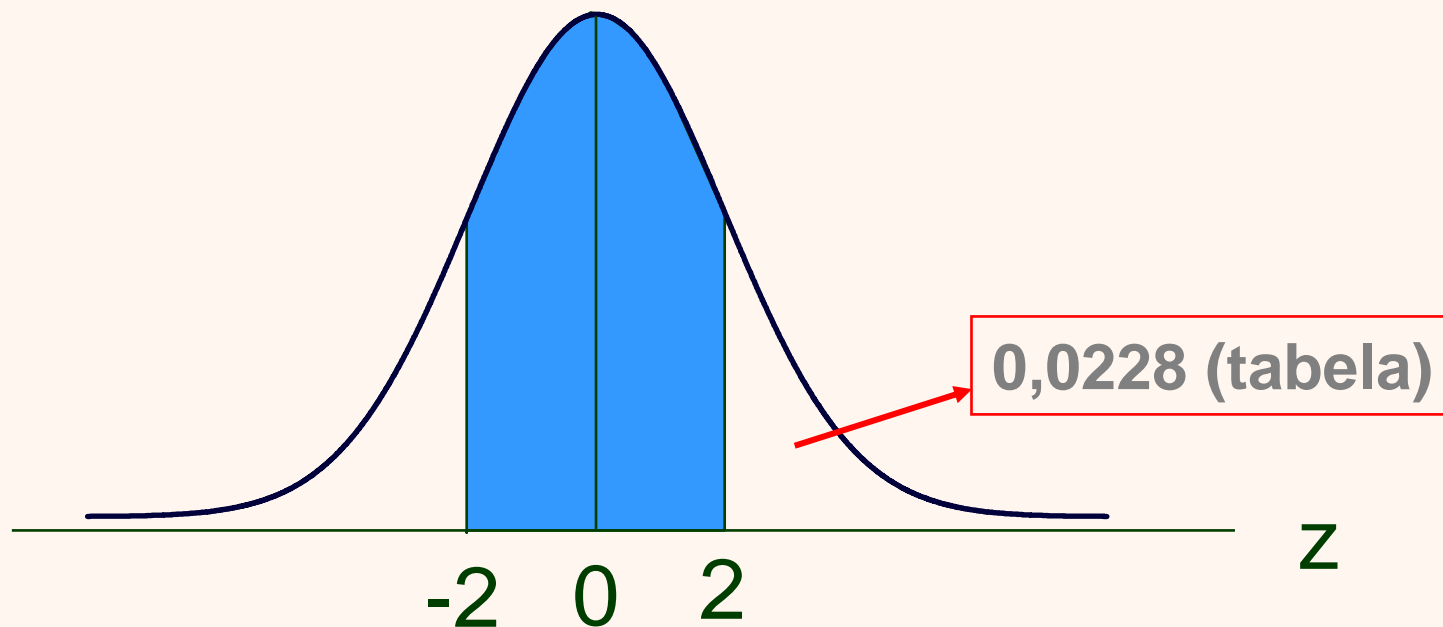
Com base na tabela da normal padronizada, calcular:

b) $P(Z > 1,23)$



Exercício

c) $P(-2 < Z < 2)$



$$P(-2 < Z < 2) = 1 - 2.(0,0228) = 0,9544$$

Exercício

- Selecionar, aleatoriamente, de uma certa universidade, um estudante do sexo masculino. Seja X o valor de sua altura, em centímetros. Admitindo que nesta universidade os estudantes têm altura média de 170 cm com desvio padrão de 10 cm, qual a probabilidade do estudante sorteado ter altura superior a 185 cm?

Resposta

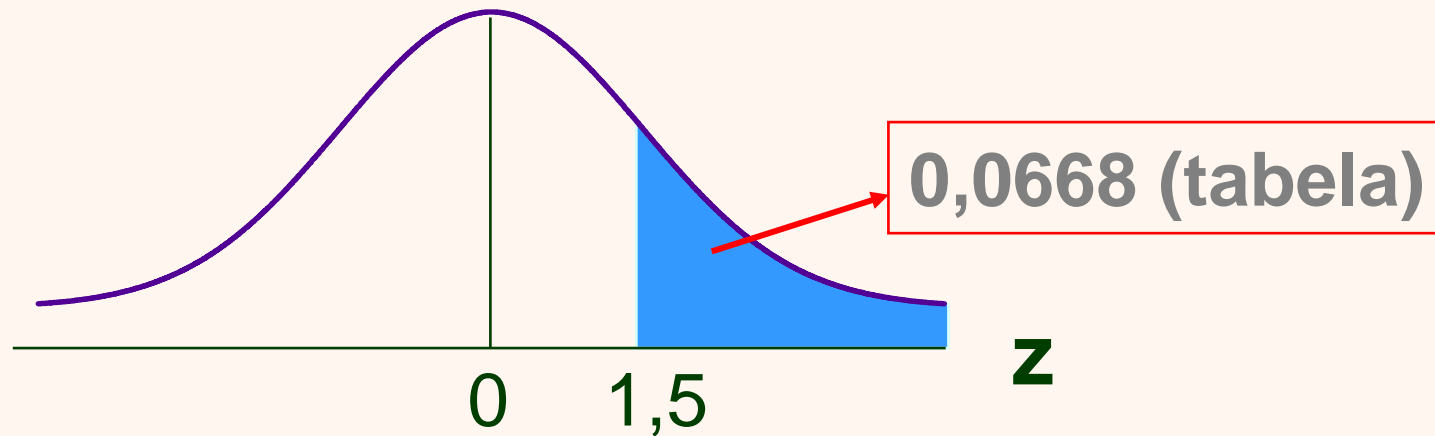
- $x = 185 \text{ cm}$ $(\mu = 170, \sigma = 10)$

$Z = ?$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{185 - 170}{10} = 1,5$$

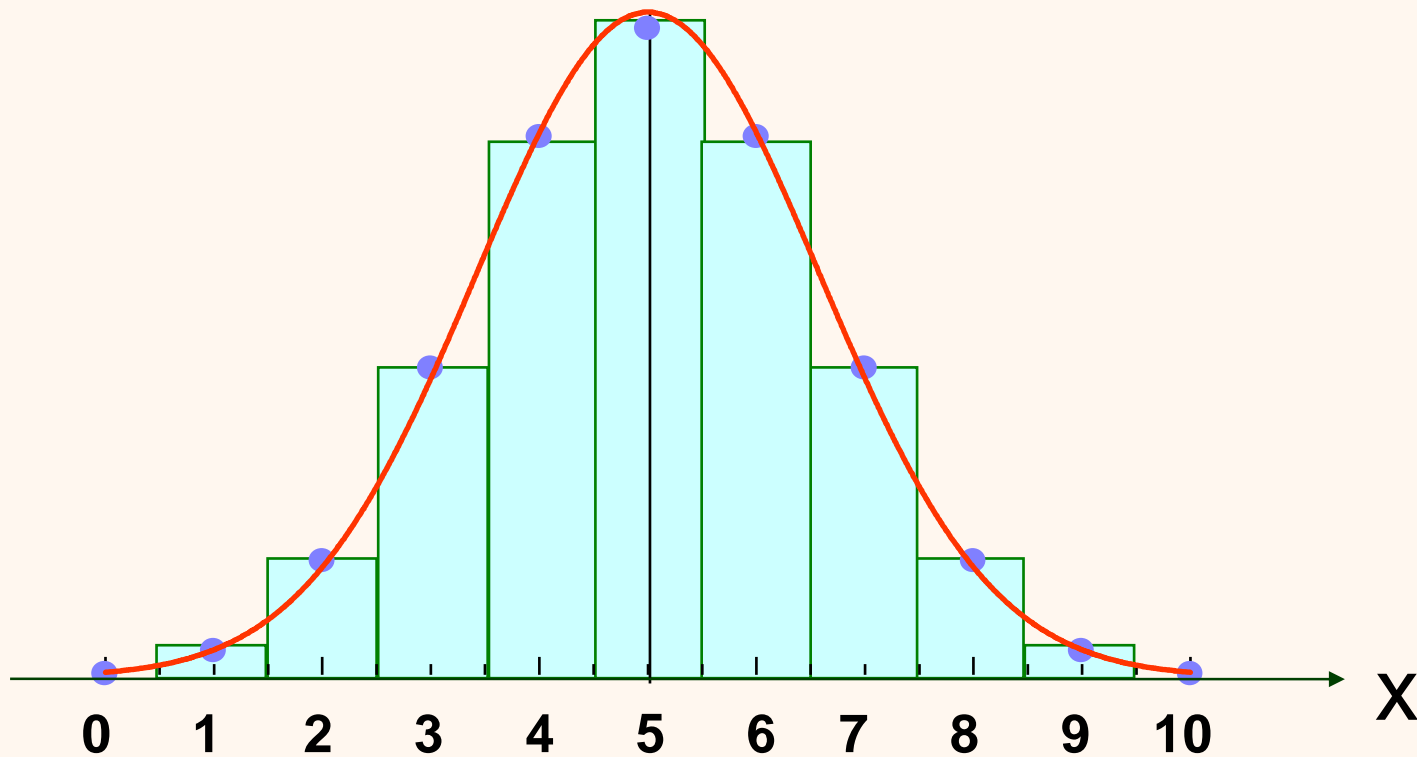
Resposta:

$$P(X > 185) = P(Z > 1,5) =$$



$$\text{Então, } P(X > 185) = P(Z > 1,5) = 0,0668$$

Aproximação da binomial pela normal



Aproximação da binomial pela normal

- Quando o número de ensaios (n) da binomial é grande, a distribuição binomial pode ser aproximada por uma distribuição normal com:

- média

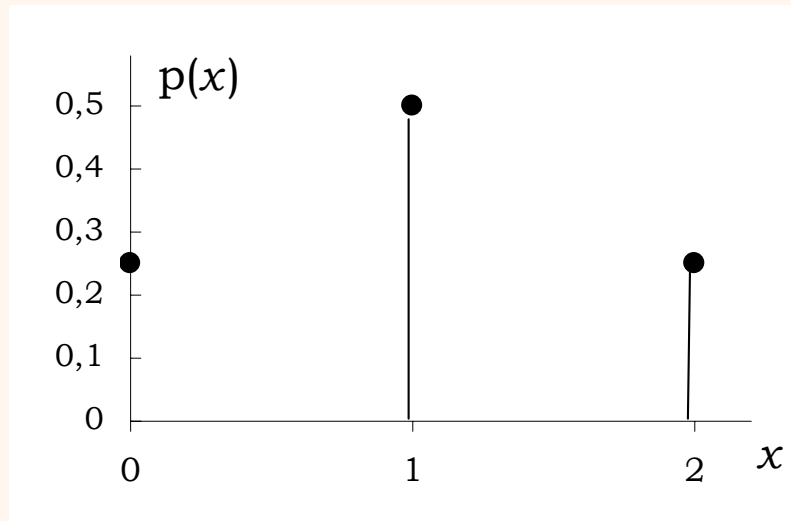
$$\mu = n\pi$$

- desvio padrão:

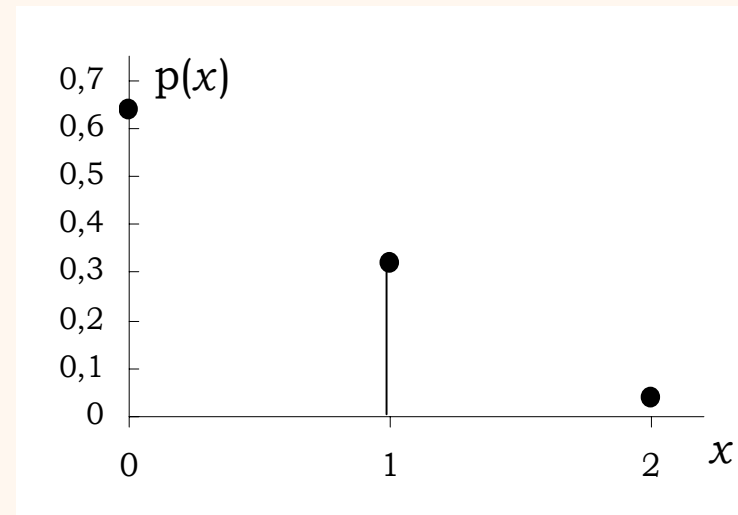
$$\sigma = \sqrt{n\pi(1 - \pi)}$$

Distribuições binomiais para diferentes valores de n e π .

$$n = 2$$
$$\pi = 0,5$$

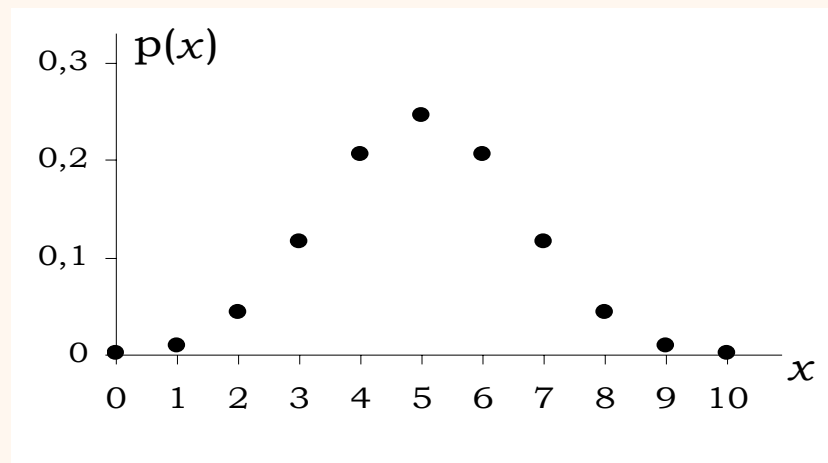


$$n = 2$$
$$\pi = 0,2$$

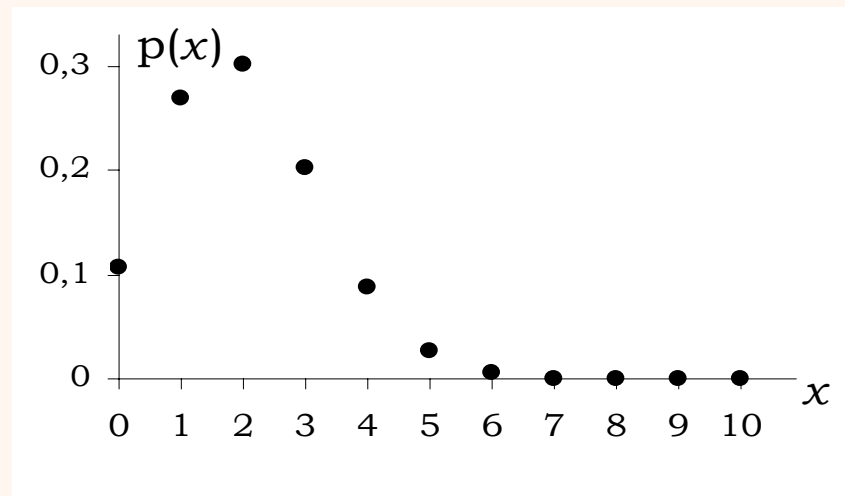


Distribuições binomiais para diferentes valores de n e π .

$$n = 10$$
$$\pi = 0,5$$

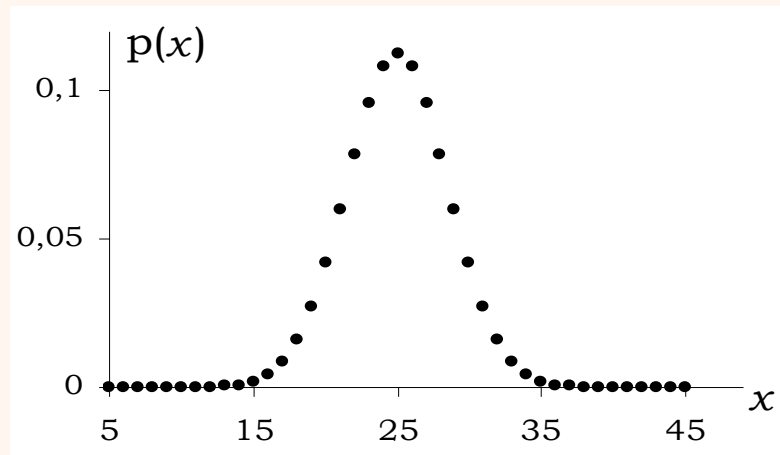


$$n = 10$$
$$\pi = 0,2$$

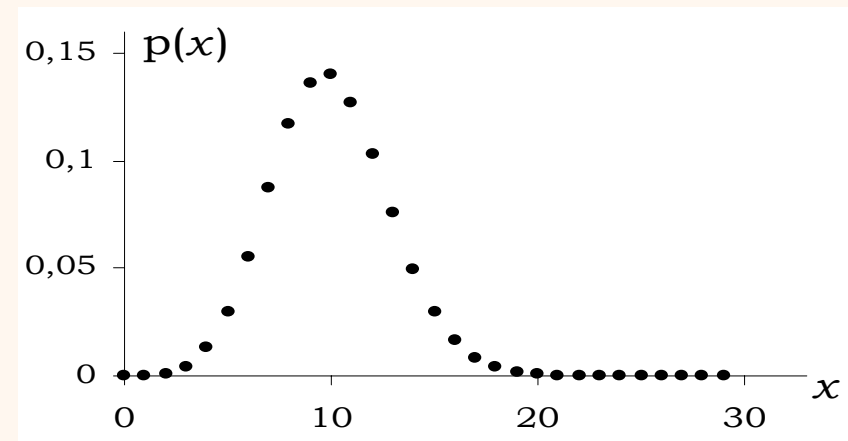


Distribuições binomiais para diferentes valores de n e π .

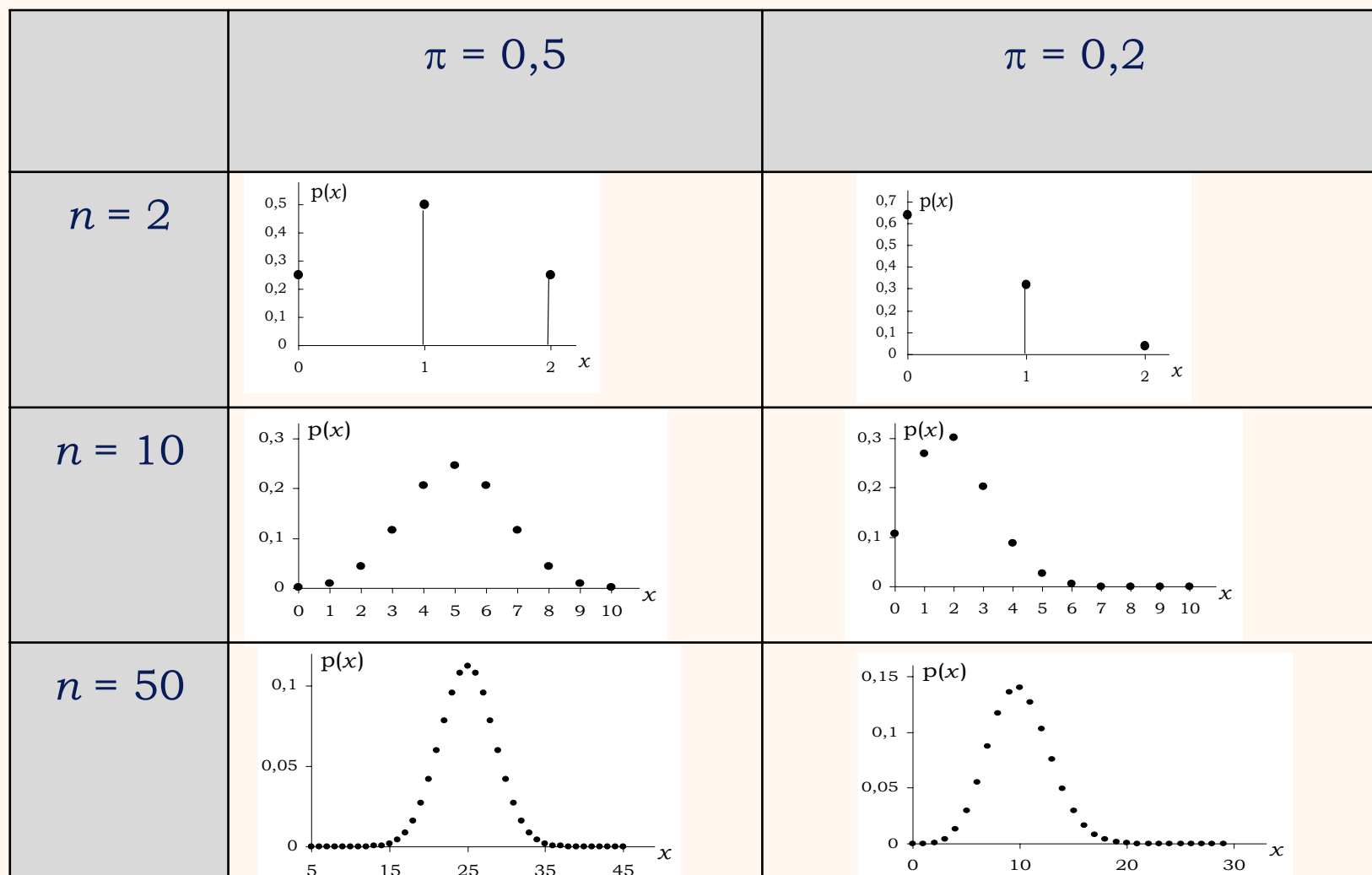
$$n = 50$$
$$\pi = 0,5$$



$$n = 50$$
$$\pi = 0,2$$



Distribuições binomiais para diferentes valores de n e π .



Aproximação da binomial pela normal

- Em geral, a distribuição binomial pode ser aproximada por uma normal quando:
 - $n\pi \geq 5$ e
 - $n(1-\pi) \geq 5$
- Nesse caso,

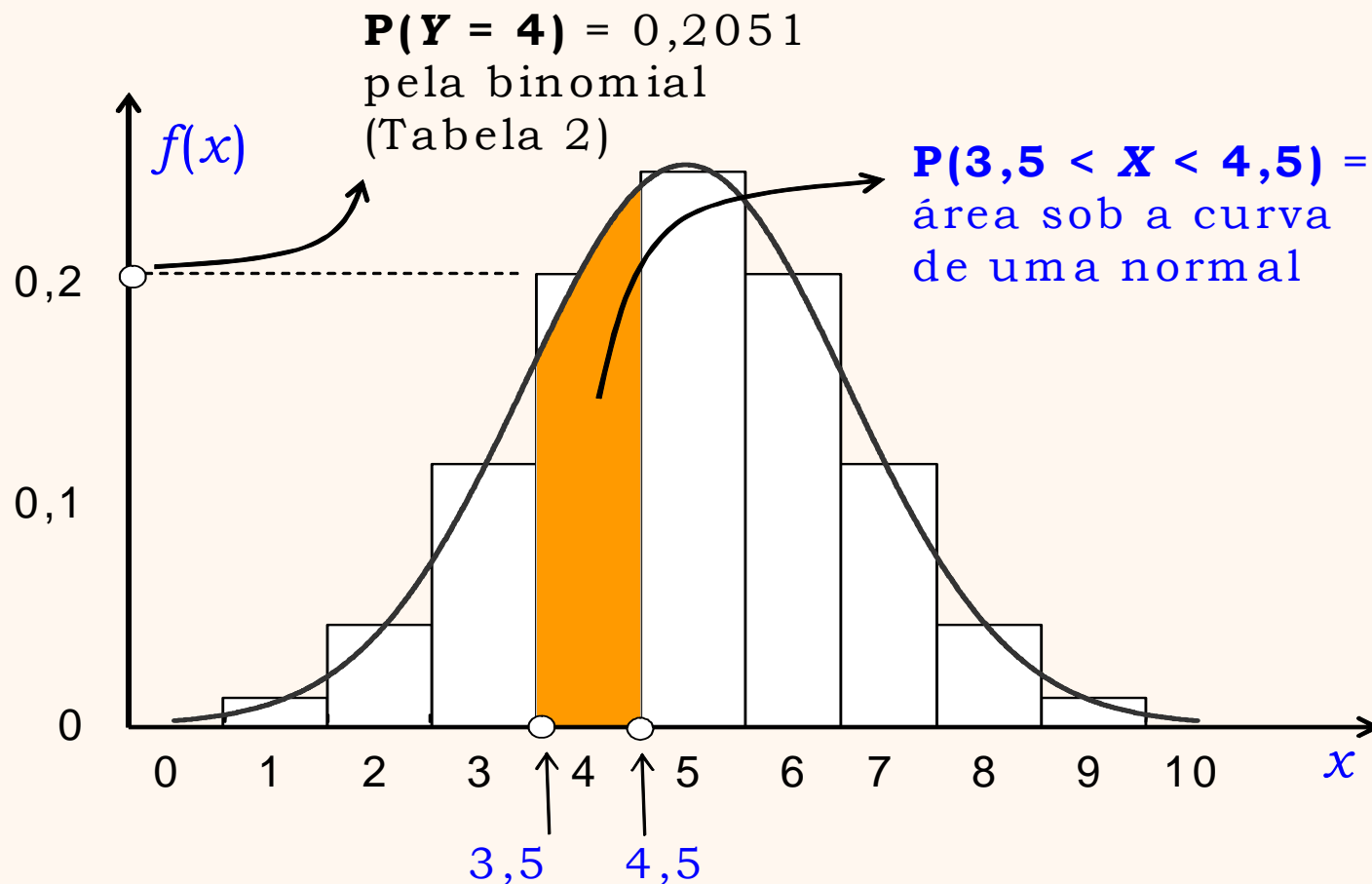
$$\mu = n\pi$$

$$\sigma = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

Exemplo 8.9

- Seja Y o número de caras em 10 lançamentos de uma moeda perfeitamente equilibrada.
 - Então, Y é binomial com $n = 10$ e $\pi = 0,5$.
- Calcular a probabilidade de ocorrer exatamente 4 caras.

Cálculo pela normal e pela binomial

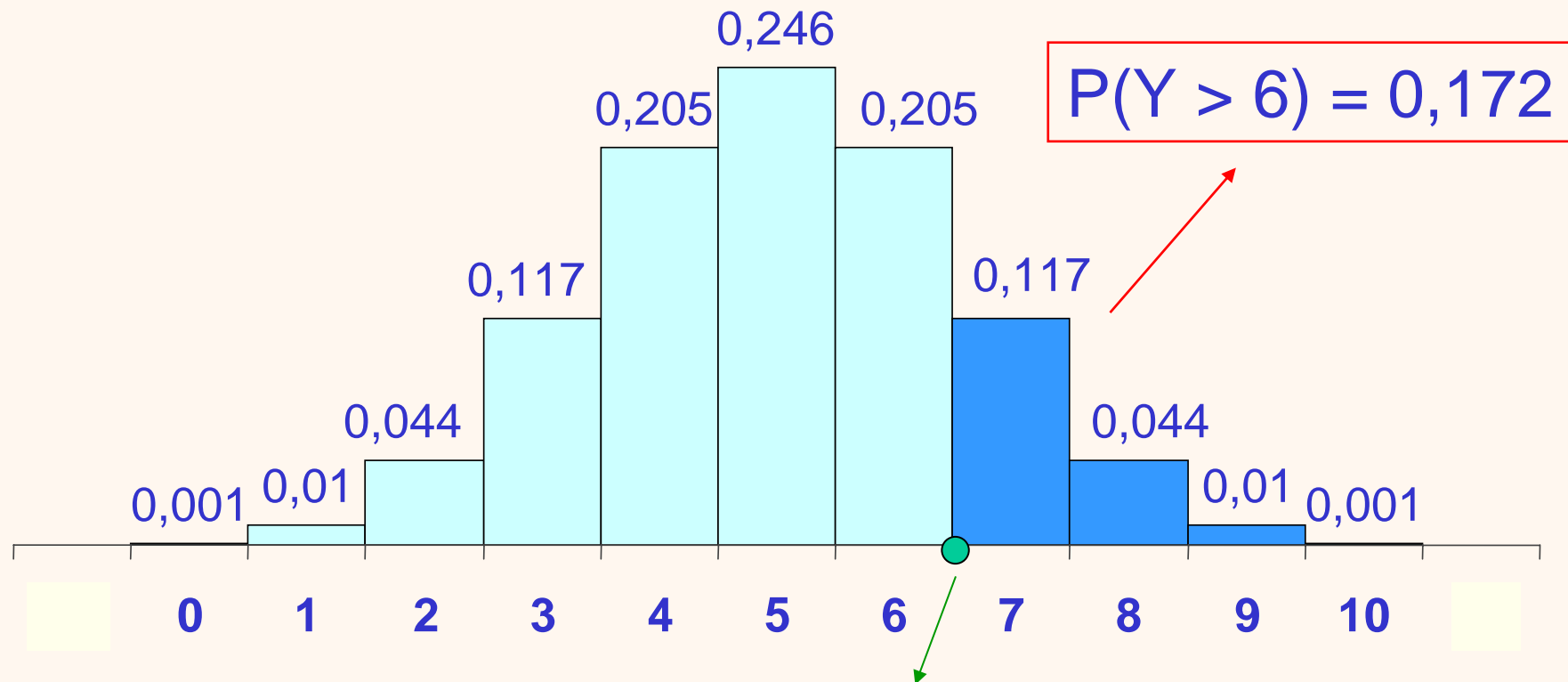


Exercício: fazer o cálculo pela normal (ver solução no livro)

Exemplo

- Em dez lançamentos de uma moeda “honesta”, qual é a probabilidade de ocorrer mais de 6 caras?
- Pela binomial:
- $P(Y > 6) = P(7) + P(8) + P(9) + P(10)$
 $= 0,117 + 0,044 + 0,010 + 0,001$
 $= 0,172$
- E pela normal?

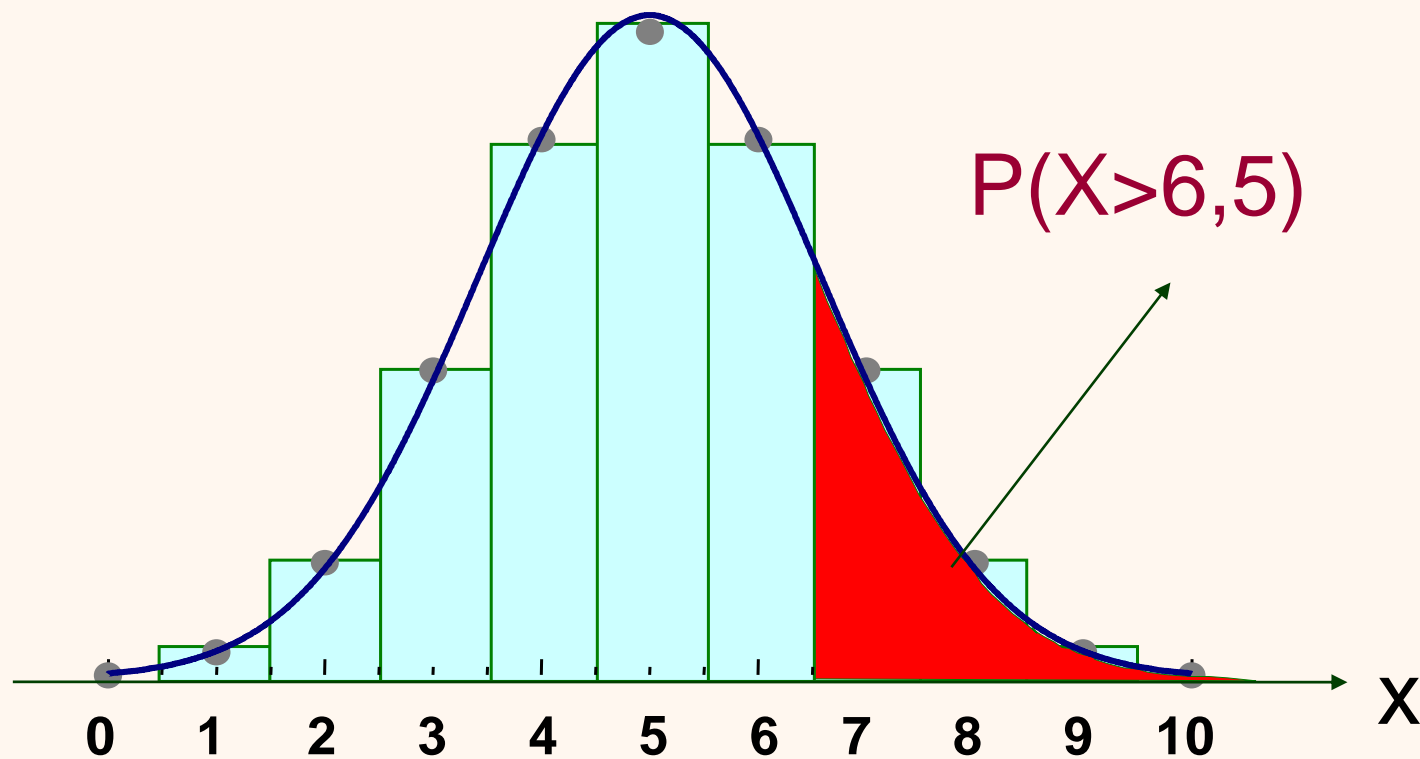
Exemplo



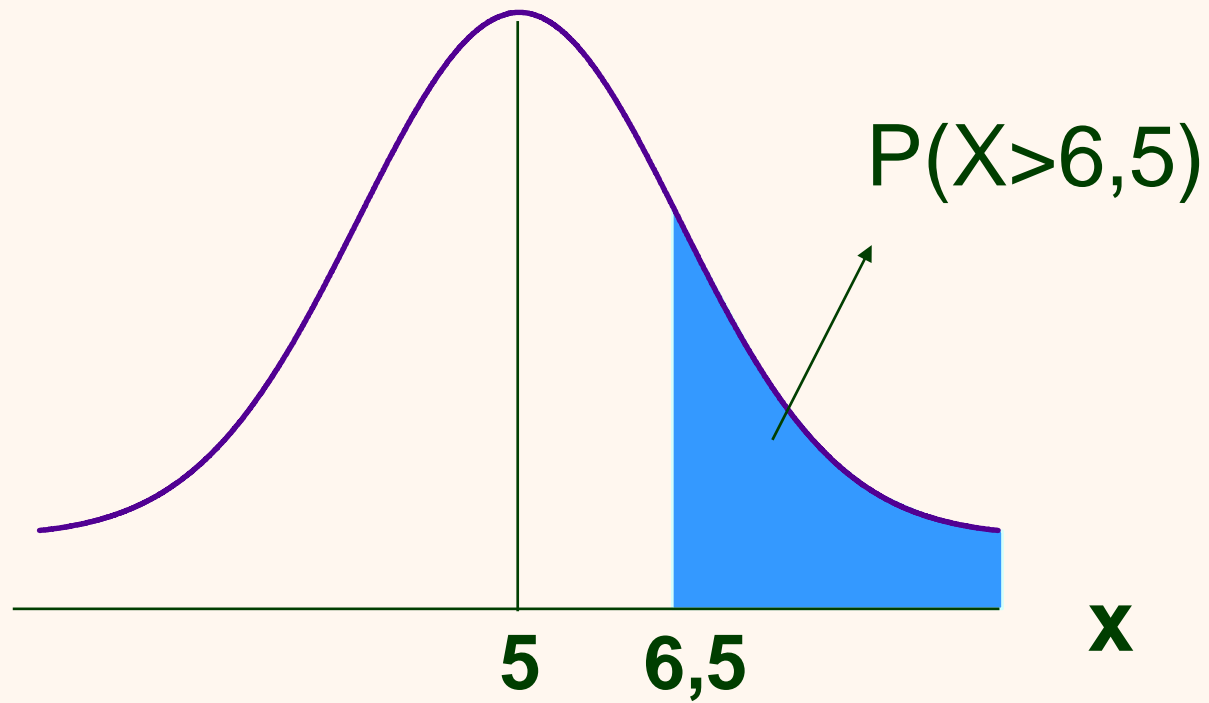
$$P(Y > 6) = 0,172$$

Observe que em termos de área devemos considerar acima de **6,5** (correção de continuidade)

Exemplo



Exemplo



Exemplo

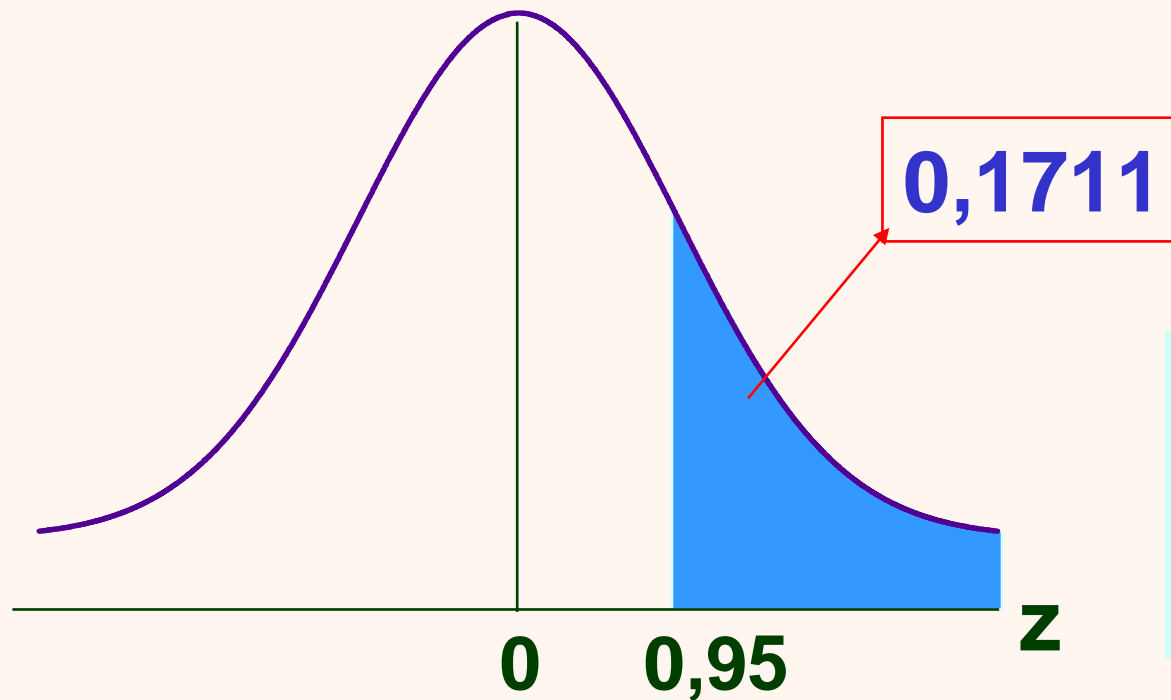
$$\mu = 5$$

$$\sigma = 1,581139$$

$$x = 6,5$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6,5 - 5}{1,581139} = 0,95$$

Exemplo



Lembrando:
a probab. exata
(pela binomial)
é de 0,1720