

Parte III

Modelos de probabilidade



Parte III

Modelos de probabilidade

- Como usar modelos de probabilidade para entender melhor os fenômenos aleatórios
- Capítulos 7 e 8.

Estatística Aplicada às Ciências Sociais

Sexta Edição

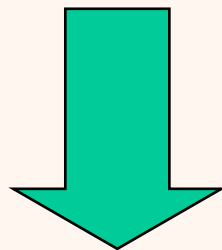
Pedro Alberto Barbetta

Florianópolis: Editora da UFSC, 2006

Cap. 7 – Modelos de probabilidade

Probabilidade

Universo do estudo (população)
Hipóteses, conjecturas, ...



Resultados ou
dados observados

O raciocínio **dedutivo** da probabilidade

Modelos de probabilidade

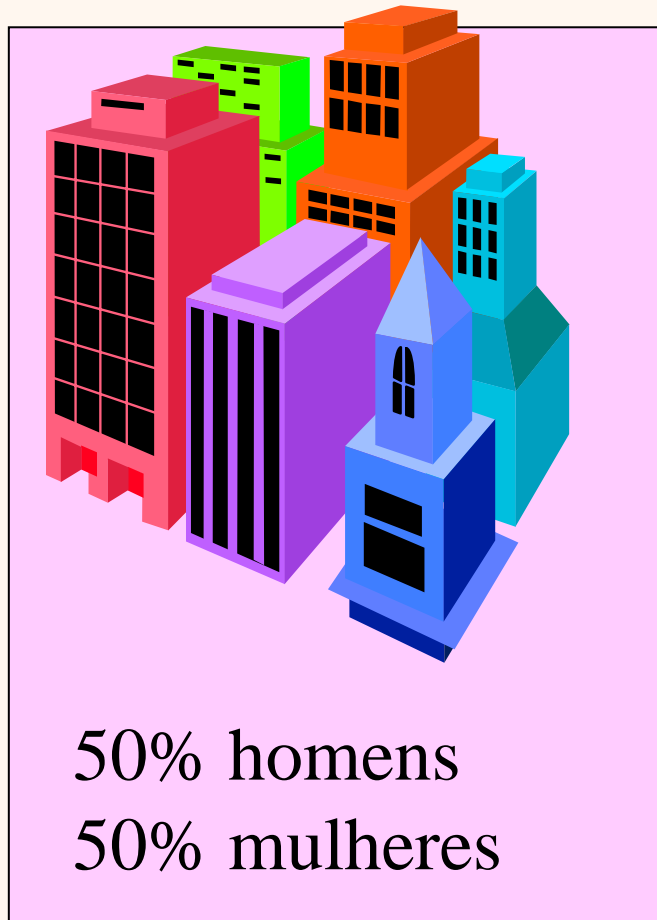
- Os modelos probabilísticos são construídos a partir de certas hipóteses ou conjecturas sobre o problema em questão e constituem-se de duas partes:
 - 1) dos possíveis resultados – o espaço amostral e
 - 2) de uma certa *lei* que nos diz quão provável é cada resultado (ou grupos de resultados) – as probabilidades.

Exemplo de um experimento aleatório



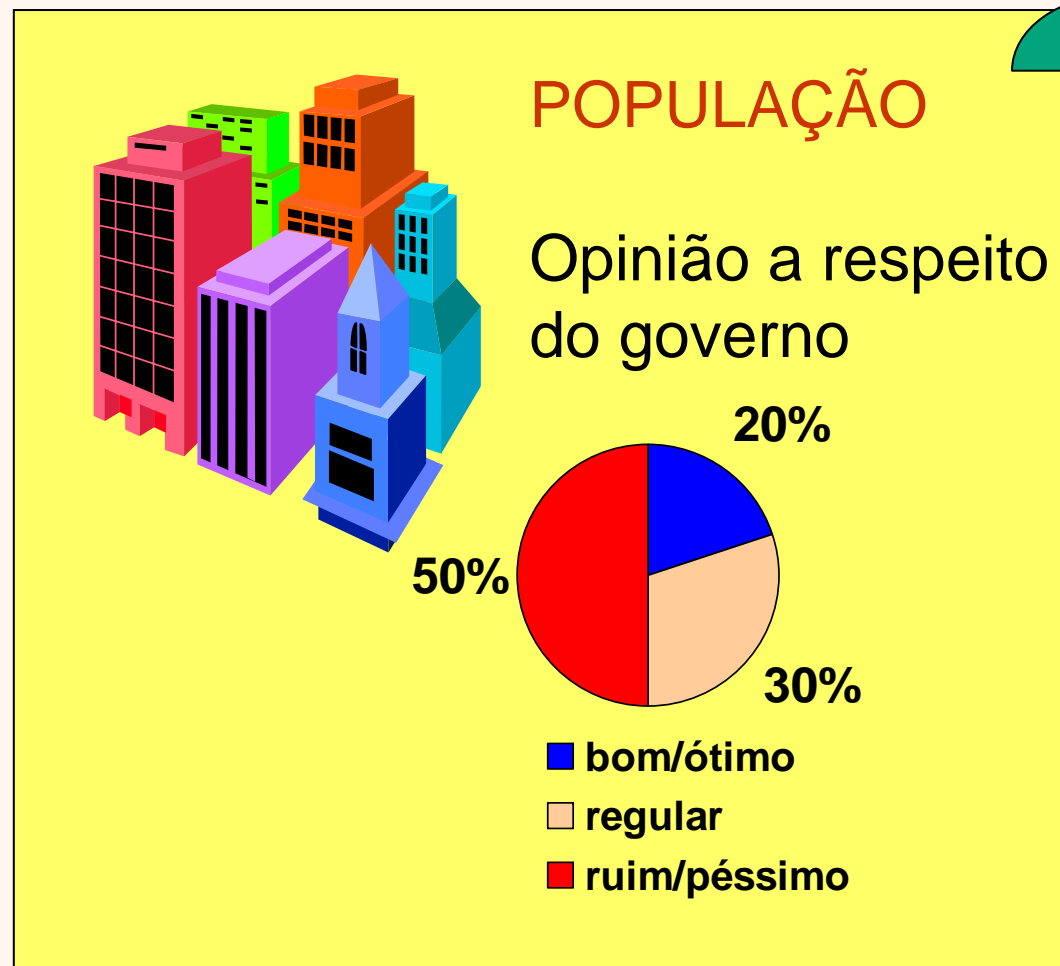
- Selecionar uma pessoa ao acaso e observar se é homem ou mulher.
- Resultados possíveis: homem, mulher
- Espaço amostral = {homem, mulher}

Probabilidade de um resultado



- Qual a probabilidade de homem e de mulher?
- $P(\text{homem}) = 0,5$
- $P(\text{mulher}) = 0,5$
- A **probabilidade** é um número entre 0 e 1, sendo que a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis deve ser 1.

Modelo de probabilidades



AMOSTRA:
uma pessoa observada
ao acaso

Resultado	Probab.
bom/ótimo	0,20
regular	0,30
ruim/péssimo	0,50

Exemplo

- Lançar um dado e observar a face voltada para cima.
Suponha que o dado seja perfeitamente equilibrado e o lançamento imparcial.
- Espaço amostral = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Probabilidades: $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$

Evento

- **Evento** = um conjunto de resultados (um subconjunto do espaço amostral)

Ex.

- Espaço amostral = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Probabilidades: $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$
- Eventos: $A = \text{número par,}$ $B = \text{núm. menor que 3}$
- $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2\}$
- $P(A) = 1/2,$ $P(B) = 2/6 = 1/3$

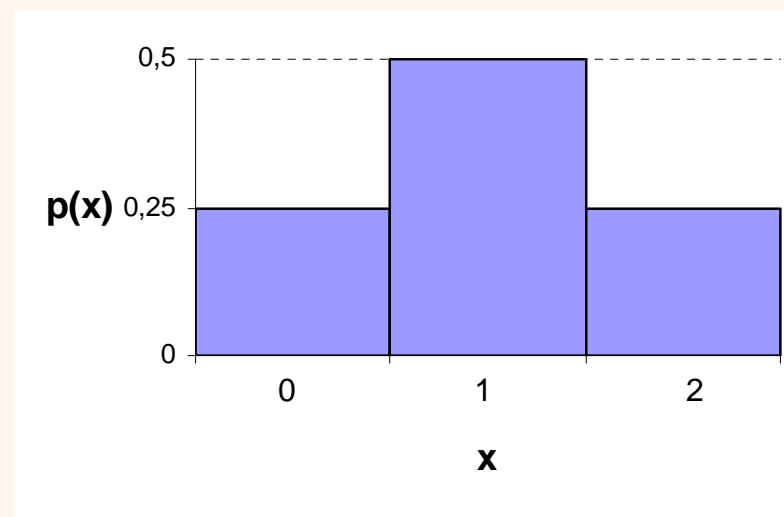
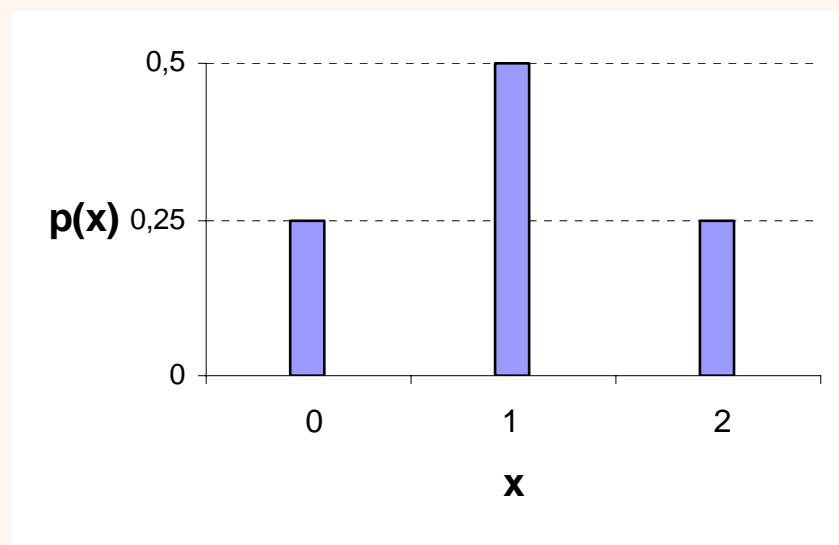
Variável aleatória

- **Variável aleatória** = característica numérica dos resultados de um experimento
- Ex.
 - X = número de caras em 2 lançamentos de uma moeda;
 - Y = percentagem de intenções de voto do candidato AAA numa amostra de 2.000 eleitores a ser extraída aleatoriamente em Santa Catarina.

Exemplo de distribuição de probabilidades

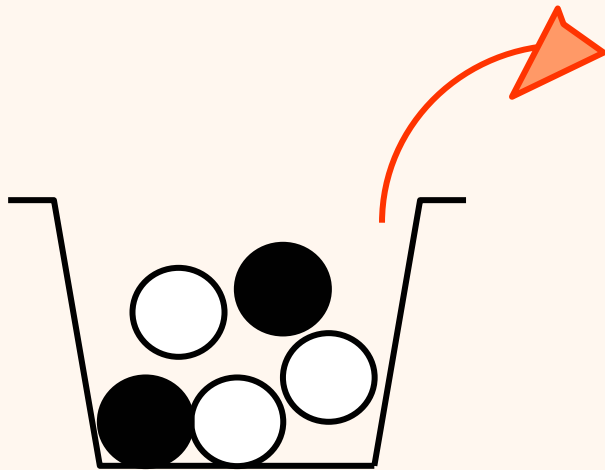
X = número de caras em dois lançamentos de uma moeda;

x	p(x)
0	0,25
1	0,5
2	0,25



Construção de distribuições de probabilidades.

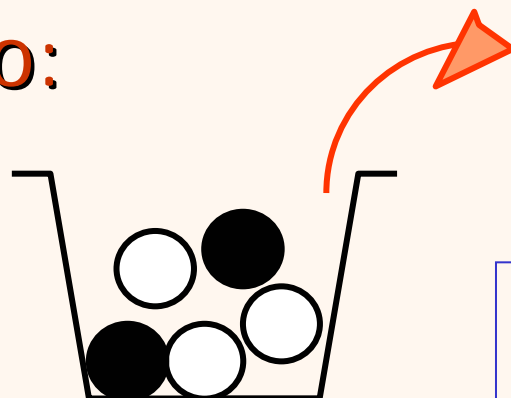
Ex:



Sortear $n = 2$ bolas
com reposição

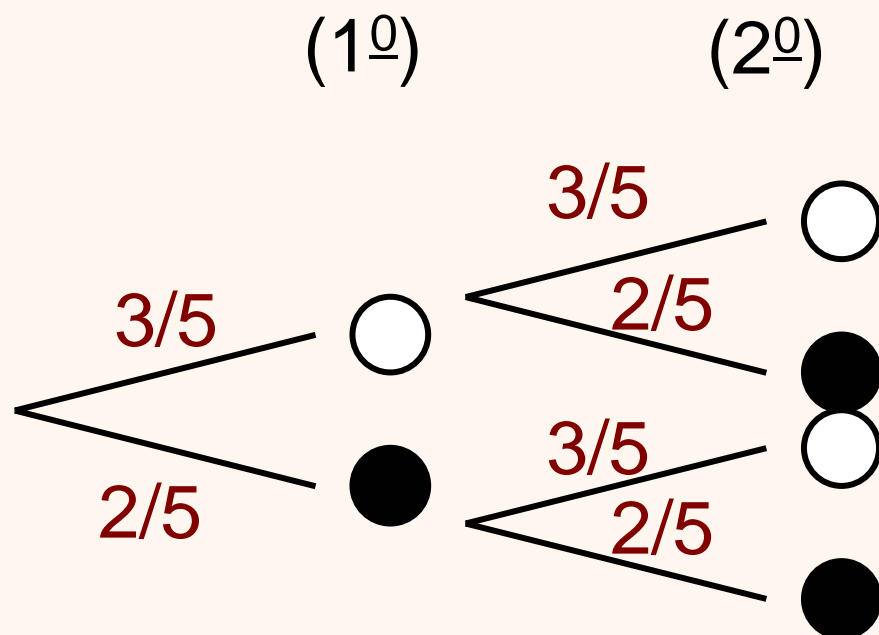
X = número de bolas pretas na amostra

Exemplo:



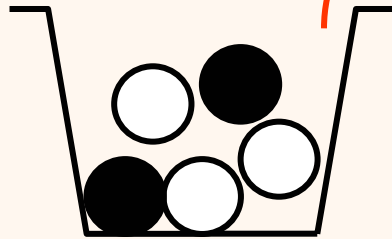
Sortear $n = 2$ bolas
com reposição

X = número de bolas
pretas na amostra



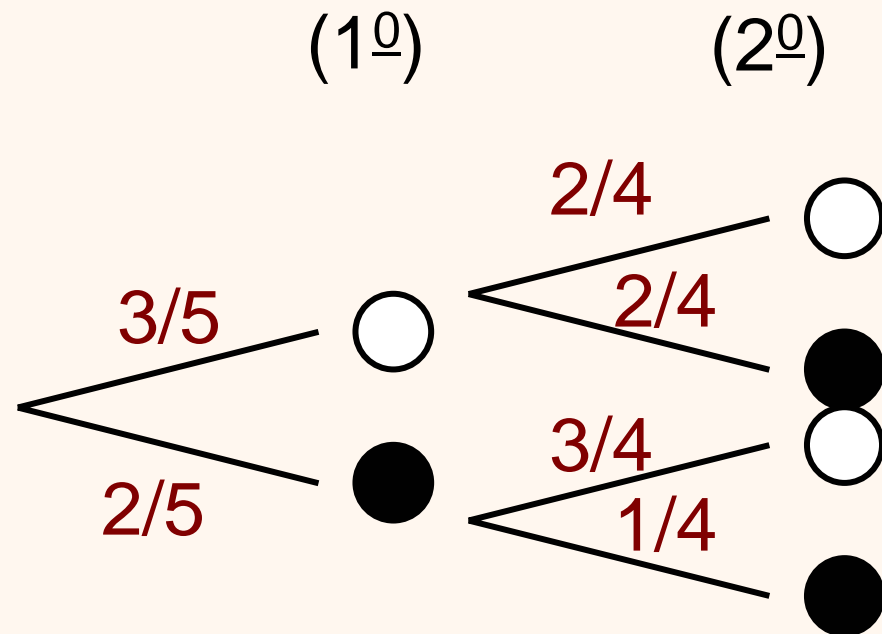
x	$p(x)$
0	$9/25$ (0,36)
1	$12/25$ (0,48)
2	$4/25$ (0,16)

Exemplo:

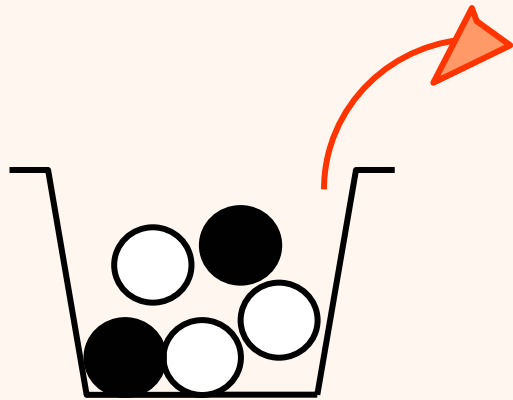


Sortear $n = 2$ bolas
sem reposição

X = número de bolas
pretas na amostra



x	$p(x)$
0	$6/20$ (0,30)
1	$12/20$ (0,60)
2	$2/20$ (0,10)



Sortear $n = 2$ bolas

X = número de bolas
pretas na amostra

Distrib. de X
com reposição

x	$p(x)$
0	0,36
1	0,48
2	0,16

Distrib. de X
sem reposição

x	$p(x)$
0	0,30
1	0,60
2	0,10



independência

Independência

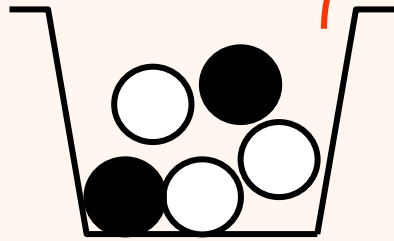
- Dois eventos são **independentes** quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro.
- Tem-se independência:
 - em amostragens aleatórias **com** reposição;
 - em amostragens aleatórias sem reposição, mas quando a população for **muito maior** que a amostra (p. ex., $N > 20n$).

Experimento binomial

- consiste de **n** ensaios;
- cada ensaio tem somente dois resultados: **sim** / **não**;
- os ensaios são independentes, com **P(sim) = π**
($0 < \pi < 1$ constante ao longo dos ensaios).

→ **X** = número de **sim** nos **n** ensaios

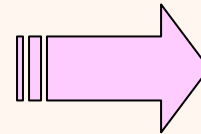
Exemplo:



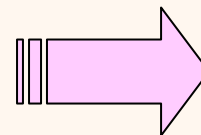
Sortear $n = 2$ bolas
com reposição

X = número de bolas
pretas na amostra

Distrib. de X	
x	$p(x)$
0	0,36
1	0,48
2	0,16



binomial com
 $n = 2$ e $\pi = 0,40$



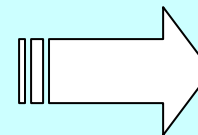
Ver Tabela 2
(apêndice)

Experimento binomial (Exemplo)



AMOSTRA: 10 pessoas observadas ao acaso

X = núm. de favoráveis na amostra



binomial com
 $n = 10$ e $\pi = 0,7$

Experimento binomial (exemplo)

- Qual a probabilidade de exatamente sete indivíduos da amostra serem favoráveis?
- (X é binomial $n = 10$ $\pi = 0,7$)
- $P(X = 7) = p(7) = 0,2668$**

Tabela da binomial

n	x	$\pi = 0,70$
10	0	0,0000
	1	0,0001
	2	0,0014
	3	0,0090
	4	0,0368
	5	0,1029
	6	0,2001
	7	0,2668
	8	0,2335
	9	0,1211
	10	0,0282

Experimento binomial (exemplo)

- Qual a probabilidade de a maioria da amostra ser de favoráveis?
- (X é binomial $n = 10$ $\pi = 0,7$)

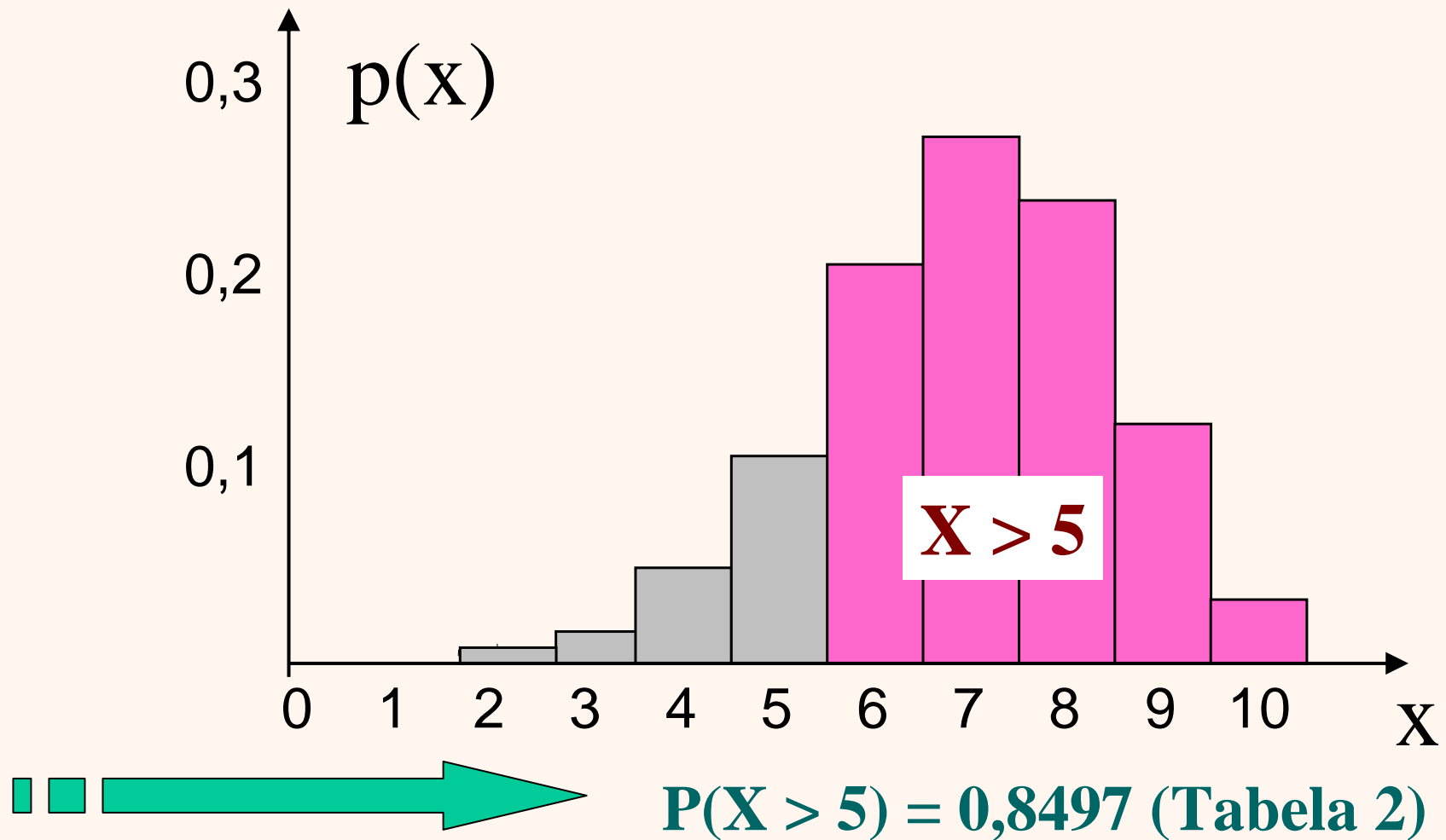
- $P(X > 5) =$
 $= p(6) + p(7) + p(8) + p(9) +$
 $p(10)$

$= 0,8497$

Tabela da binomial

n	x	0,70
10	0	0,0000
	1	0,0001
	2	0,0014
	3	0,0090
	4	0,0368
	5	0,1029
	6	0,2001
	7	0,2668
	8	0,2335
	9	0,1211
	10	0,0282

X é binomial com $n = 10$ $\pi = 0,7$



Média e variância

- **X**: variável aleatória

- possíveis valores:

X_1, X_2, \dots, X_k

- probabilidades:

p_1, p_2, \dots, p_k

- Média:

$$\mu = \sum_i X_i p_i$$

- Variância:

$$\sigma^2 = \sum_i \left\{ (X_i - \mu)^2 p_i \right\}$$

Média e variância na distrib. binomial

- X : binomial n, π . Então:

– Média: $\mu = n\pi$

– Variância: $\sigma^2 = n\pi(1 - \pi)$