UMA FAMÍLIA DE LÓGICAS PARACONSISTENTES E/OU PARACOMPLETAS COM SEMÂNTICAS RECURSIVAS[1]

Arthur Buchsbaum[2] & Tarcísio Pequeno
Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação
Campus do Pici – Bloco 910
60455-760 – Fortaleza/CE – Brasil
emails: arthur@lia.ufc.br – tarcisio@lia.ufc.br

---

[1]Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e FINEP.

[2]Doutorando em Informática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

RESUMO

Apresentamos uma família de cálculos paraconsistentes e/ou paracompletos com semânticas recursivas. As famílias de cálculos **CI**, **PC** e **NAL** são re-elaborações dos cálculos $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{N_1}$ de da Costa. Elas foram desenvolvidas para permitir recursividade e formas mais naturais de explicação da negação paraconsistente e/ou paracompleta.

O cálculo paraconsistente **CIE** é uma base monotônica adequada para o raciocínio por defaults.

Palavras-chave: lógica paraconsistente, lógica paracompleta, lógica não alética, semântica recursiva, semântica de valorações, semântica matricial, semântica de maximização, semântica de minimização, inconsistência epistêmica, inconsistência ontológica.

ABSTRACT

A family of paraconsistent and/or paracomplete calculi with recursive semantics is presented. The families of calculi **CI**, **PC** and **NAL** are reconstructions of the calculi $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{P_1}$ and $\mathbf{N_1}$ of da Costa. They have been developed to allow recursivity and more natural forms for explaining the paraconsistent and/or paracomplete negation. The paraconsistent calculus **CEI** is a monotonic basis suitable for the reasoning by defaults.

Keywords: paraconsistent logic, paracomplete logic, non-alethic logic, recursive semantics, semantics of valuations, semantics of matrices, semantics of maximization, semantics of minimization, epistemic inconsistency, ontological inconsistency.

SUMÁRIO

1. Introdução

Em [20] advoga-se a indissociabilidade e a complementaridade dos papéis desempenhados pela não-monotonicidade e paraconsistência na modelagem de certos esquemas de raciocínio exibidos pelo senso comum e/ou requeridos na confecção de artefatos ditos inteligentes. Em linhas gerais, o argumento é construído a partir das considerações que seguem.

As lógicas não monotônicas formam uma classe especial de métodos indutivos de raciocínio. Elas promovem uma expansão da dedução de modo a permitir a efetuação de inferências com base em evidências não conclusivas, à luz de um conhecimento incompleto dos fatos. Naturalmente disso resultam inferências não válidas. Podem ocorrer situações em que as premissas sejam verdadeiras mas não as conclusões. Resulta também daí a não monotonicidade do raciocínio: o surgimento de novas evidências pode revogar conclusões anteriormente estabelecidas. Em decorrência, esse tipo de raciocínio deve ser capaz de administrar conflitos em situações nas quais considerações parciais levam a conclusões contraditórias, e resolvê-los sempre que a evidência total disponível o permitir.

O seguinte exemplo (vide Morris [19]) ilustra esse ponto:

- Pássaros geralmente são capazes de voar;
- Animais geralmente não são capazes de voar;
- Tweety é um pássaro (regras como as duas primeiras poderiam ser expressas numa lógica de defaults, por exemplo na seguinte forma: dado que alguém é pássaro pode-se concluir que ele é capaz de voar − salvo alguma indicação explícita em contrário).

O conflito surge na aplicação das duas primeiras regras com Tweety considerado como pássaro na primeira e visto na sua condição de animal na segunda. Isso levaria à conclusão de que existem evidências de que Tweety é capaz de voar da mesma forma que existem evidências em contrário. Esse conflito é apenas aparente e poderia ser resolvido apelando-se a um critério de especificidade, pelo qual a regra a respeito de pássaros deveria prevalecer sobre a regra a respeito da classe mais ampla dos animais, sempre que suas conclusões conduzam a uma contradição.

Esse exemplo põe em destaque uma das características mais marcantes do raciocínio não monotônico – o seu caráter holístico. Embora as regras de inferência não monotônicas, como as regras de default, por exemplo (vide Reiter [24] e [25]), possam parecer semelhantes às regras dos sistemas dedutivos, elas diferem destas com respeito a um aspecto essencial: a sua não localidade. Regras não monotônicas são *sensíveis ao contexto*.

Sua aplicação requer o exame de propriedades globais da teoria. A análise dessas propriedades globais e a capacidade de compor o total das evidências disponíveis de forma a resolver conflitos locais são basicamente as funções de uma lógica não monotônica.

No entanto ocorrem muito naturalmente situações em que não há critérios disponíveis que permitam a resolução de tais conflitos e de onde resultam inevitavelmente inconsistências, caso se mantenha o compromisso com a caracterização dicotômica (verdadeiro/falso) das conclusões. Esse é um compromisso básico da abordagem não monotônica e qualitativa do raciocínio, e não pode ser relaxado sob pena de descaracterizá-la.

O seguinte é um exemplo clássico na literatura não monotônica a ilustrar esse tipo de situação:

- Quackers em geral são pacifistas;
- Membros do Partido Republicano são geralmente não pacifistas;
- Nixon é Quacker;
- Nixon é republicano.

Não há qualquer critério, à luz do conhecimento fornecido, capaz de resolver as conclusões contraditórias a respeito de Nixon, a que as regras acima conduzem.

Essa inevitabilidade da aquisição de inconsistências associada a métodos indutivos de raciocínio já era reconhecida mesmo antes do advento da literatura sobre lógicas não monotônicas. Hempel, em [16], por exemplo, detecta esse fenômeno com respeito a certas regras tidas, segundo ele, como representando "the most basic types of inductive reasoning". Na realidade, a administração de contradições dessa natureza é parte da prática científica corrente. Elas demandam uma revisão da teoria científica, de modo a que a consistência possa ser restabelecida.

A situação difere de forma significativa quando se trata do raciocínio do senso comum. Aqui já se reconhece de antemão a inacurácia e insuficiência do conhecimento a suportar as conclusões. Diante da ocorrência de contradições não há revisão a ser feita, mas sim que prover os meios para que a situação possa ser convenientemente tratada, pelo menos até que a aquisição de novos conhecimentos ou a ocorrência de um fato novo possam eventualmente remover o conflito. A lógica de defaults de Reiter [24] trata do problema abrindo as conclusões divergentes em múltiplas extensões, cada uma delas internamente consistente.

Em [20] é sugerido um reconhecimento realista das contradições, abrigando-as em uma mesma teoria, de modo a que o raciocínio possa de fato ser tratado de forma intra-lógica, sem apelo a procedimentos e mecanismos externos para a manipulação de extensões, por exemplo. Obviamente, uma lógica que permitisse a convivência de contradições em uma teoria deve ser paraconsistente. Essa é a forma pela qual se é naturalmente levado à adoção de uma lógica paraconsistente, em conseqüência de um raciocinar não monotônico. Por outro lado, a não monotonicidade confere uma dinâmica ao raciocínio paraconsistente, fazendo com que o ingresso de novas informações ao conhecimento disponível possa recompor consistências e/ou introduzir novas divergências. Emerge dessa correlação um quadro que faz lembrar "O Jardim dos Caminhos Bifurcantes", de Borges [4], onde o curso das conclusões se abre em alternativas contraditórias, que por sua vez podem voltar a se abrir ou eventualmente colapsar, e assim por diante, conforme o conhecimento se enriquece.

A construção de uma lógica, tal como a lógica **IDL** (vide [20]), capaz de combinar essas características, se dá da seguinte maneira. As regras não monotônicas são utilizadas para expandir uma lógica dedutiva, a qual denominamos *base monotônica* da lógica.
Essa base monotônica seria constituída por um cálculo paraconsistente. Na realidade por um cálculo que se comporte de forma paraconsistente para conclusões das regras não monotônicas e classicamente para as demais.

O cálculo **CIE** aqui apresentado foi desenhado exatamente para servir de base monotônica à lógica **IDL**. Ele constitui um refinamento do cálculo apresentado em [20], com vistas a refletir melhor nossas intuições a respeito do raciocínio naquelas circunstâncias. Seu projeto beneficiou-se da elaboração de um esquema semântico idealizado para capturar essas mesmas intuições. Na realidade variações desse esquema nos permitiram obter uma família de semânticas paraconsistentes, paracompletas e não aléticas. Examinando os cálculos $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{N_1}$ de da Costa (vide [8], [13] e [15]) à luz dessas semânticas, logramos construir os cálculos $\mathbf{CI_1}$, $\mathbf{CI_2}$, $\mathbf{CI_3}$ e $\mathbf{CI_4}$, paraconsistentes, $\mathbf{PC_1}$ e $\mathbf{PC_2}$, paracompletos, e $\mathbf{NAL_1}$, $\mathbf{NAL_2}$, $\mathbf{NAL_3}$ e $\mathbf{NAL_4}$, não aléticos. Esses cálculos apresentam algumas vantagens com respeito aos cálculos nos quais se inspiraram. Além de serem, via de regra, mais fortes que aqueles, admitem semânticas recursivas, como é o caso das semânticas aqui exibidas. A cada um desses cálculos corresponde uma semântica, recursiva, com respeito à qual ele pode ser mostrado correto e completo.

O tipo de inconsistência que iremos tratar decorre não de um comportamento incoerente do mundo sob exame, ou mais precisamente deste com respeito à família de conceitos que utilizamos para descrevê-lo, mas, mesmo sob a hipótese de coerência da realidade, da insuficiência e imprecisão do nosso conhecimento a respeito deste. Por isso a denominamos *inconsistência epistêmica*, para ressaltar a oposição com *inconsistência ontológica*, diretamente decorrente do comportamento da realidade. Estes termos, com sentido semelhante, foram anteriormente empregados por Rescher & Brandom em [26].

A intuição refletida nas semânticas a serem apresentadas é a verdade relativa a múltiplos observadores (ou múltiplos referenciais) quando, por deliberação ou impossibilidade, não levamos em conta a informação a respeito das diferentes condições de cada observação. Pode acontecer, por exemplo, uma variação de condições incontrolável mas suficiente para afetar um experimento a um nível detectável pelos nossos instrumentos. Isso reflete novamente uma situação de conhecimento imperfeito, nesse caso a respeito das condições de observação, ou mesmo, num fenômeno mais profundo, da falta de recursos na linguagem para expressão das distinções.

Suponha um objeto percebido como vermelho por um observador, mas como verde por um outro que se mova com velocidade diferente com respeito ao objeto, sem que tenhamos qualquer informação a respeito dessas velocidades. Para um quadro mais nítido da situação, suponha que nem mesmo sabemos que a observação da cor poderia ser afetada pela velocidade relativa ao objeto. As lógicas paraconsistentes que projetamos destinam-se exatamente a tratar situações como essa: serem capazes de construir raciocínios a partir de informações provindas de observações divergentes, sem que tenhamos qualquer informação sobre os observadores que as fizeram.

Essa situação tem paralelos com a nossa motivação inicial, a respeito de múltiplas extensões geradas por uma teoria com defaults. Estamos aí novamente diante de um quadro de incompletude de informação que não nos permite controlar ou privilegiar alternativas igualmente plausíveis.

Ocorre-nos ainda um terceiro tipo de situação a guardar paralelos com as duas primeiras, sendo também plausível a um tratamento com as semânticas a serem apresentadas. É o caso de processos que têm um comportamento irregular ao longo do tempo, sobre o qual dispomos de informações obtidas em diferentes momentos. Esse tipo de situação é muito freqüente no conhecimento e no discurso do senso comum. Suponha, por exemplo, um indivíduo capaz de comportar-se de forma violenta em certas circunstâncias, porém de comportamento absolutamente pacato em outras, ou seja, um indivíduo que nem se comporta de forma consistentemente violenta nem pacata. Sobre tal indivíduo poderia-se dizer tanto que ele é violento como que ele é pacato, ou talvez, mais prudentemente, nem uma coisa nem outra.

Na consideração de situações como essa, bem como das outras duas descritas acima, temos duas alternativas radicais.

Em uma *atitude crédula* ou *tolerante* aceitamos algo como verdadeiro se ele o é em alguma versão. Assim aceitamos um objeto como sendo verde se algum observador o perceber como tal ou se assim se concluir em alguma extensão. Da mesma forma consideraríamos um indivíduo como violento se em alguma ocasião ele se comportar como tal. Essa atitude nos levaria a aceitar versões contraditórias, nos conduzindo portanto a semânticas paraconsistentes.

A outra alternativa seria uma *atitude cética*: aceitamos algo como verdadeiro se todas versões o confirmarem como tal. Essa atitude levaria a semânticas paracompletas – conforme o exemplo visto acima, nem aceitaríamos a cor do objeto como verde, nem como não verde. Uma combinação judiciosa dessas atitudes nos permitiria divisar semânticas não aléticas, que exibem ao mesmo tempo paraconsistência e paracompletude.

Um quadro geral para a definição dessas semânticas pode ser construído da seguinte maneira. Uma valoração **V** para uma propriedade atômica **P** é constituída por uma coleção não vazia de valorações clássicas **v** para **P** (cada uma expressando a opinião de um observador sobre **P**). Nas semânticas paraconsistentes, que denominamos *semânticas de maximização*, **P** será *verdadeiro* se o valor máximo que as valorações **v** conferem a **P** é 1. Da mesma forma, $\neg$ **P** será o caso se o valor mínimo de **P** em **V** for 0.

As semânticas paracompletas, que denominamos *semânticas de minimização*, são obtidas tomando-se **P** como *verdadeiro* se, e somente se, o valor mínimo atribuído por um **v** de **V** a **P** for 1. $\neg$ **P** será então o caso se o valor máximo de **P** em **V** for 0.

Por sua vez, as semânticas não aléticas são construídas minimizando-se sobre famílias de valorações paraconsistentes, ou, alternativamente, maximizando-se sobre famílias de valorações paracompletas.

Definições completas dessas diversas alternativas semânticas serão dadas juntamente com a apresentação dos cálculos correspondentes. Veremos aqui variações nas definições dessas semânticas, dentro do quadro geral aqui apresentado: as que correspondem aos cálculos paraconsistentes $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_3}$ ($\mathbf{CI_2}$ e $\mathbf{CI_4}$ diferem de $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_3}$ apenas por conterem a negação clássica), aos cálculos paracompletos $\mathbf{PC_1}$ e $\mathbf{PC_2}$ e aos cálculos não aléticos $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_3}$ ($\mathbf{NAL_2}$ e $\mathbf{NAL_4}$ também diferem de $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_3}$ por conterem a negação clássica).

A semântica do cálculo **CIE** apresenta também algumas peculiaridades, para que possa refletir a coexistência de fórmulas *irrevogáveis* (clássicas) com fórmulas *estritamente plausíveis*, oriundas das regras não monotônicas. Essas últimas são distinguidas no cálculo **CIE** (assim como em $\mathbf{NAL_4}$) pela ocorrência de um ponto de interrogação (?). A paraconsistência em **CIE** restringe-se a esse tipo de fórmulas.

2. Convenções, Notação e Terminologia

Uma lógica (relativa a uma linguagem) é um par $\langle \mathsf{L}, \vdash \rangle$, onde L é uma coleção de fórmulas, e $\vdash$ uma relação de dedução, definida em $2^{\mathsf{L}} \times \mathsf{L}$. Uma lógica particular relativa α uma linguagem é portanto definida pela especificação de uma linguagem e de uma relação de dedução. Dadas uma coleção de fórmulas Γ e uma fórmula α de L tais que $\Gamma \vdash \alpha$, dizemos que de Γ *deduz-se* α ou que α é *teorema* de Γ. Caso $\varnothing \vdash \alpha$ (o que notamos simplesmente por "$\vdash \alpha$"), dizemos que α é um teorema da lógica. A um conjunto de fórmulas fechado com respeito a Γ denominamos uma teoria. Em particular, ao fecho de Γ denominamos a teoria de Γ. Γ é então dito ser uma apresentação em um conjunto de axiomas para uma teoria. Se $\mathbb{L}$ é uma lógica, denotaremos a sua relação de dedução por "$\vdash_{\mathbb{L}}$" e, caso não houver dúvida quanto à lógica referida, a sua relação de dedução será denotada simplesmente por "$\vdash$".

Um cálculo (relativo a uma linguagem L) é um par $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, onde $\mathcal{A}$ é uma coleção de fórmulas de uma dada linguagem L, ditas axiomas do cálculo, e $\mathcal{R}$ é uma coleção de regras de inferência. Dado um cálculo lógico C, consideraremos a sua relação de dedução "$\vdash$" definida da maneira usual (como é feito em [3], por exemplo) a partir dos axiomas e regras de inferência de C. Temos daí que todo cálculo define uma lógica. Uma coleção de fórmulas Γ de um cálculo C é dita *trivial* em C se $\Gamma \vdash \mathbf{A}$, para toda fórmula $\mathbf{A}$ de C.

Em todo este trabalho, as expressões "**ent**" e "**sss**" serão usadas respectivamente para indicar a implicação e a equivalência na metalinguagem.

O conceito de fórmula de uma linguagem formal será considerado da maneira usual (como em [3]), a não ser nas partes deste trabalho em que este seja eventualmente definido de outra forma.

Uma *semântica de valorações* para uma linguagem proposicional é uma coleção de funções definidas nesta linguagem, com valores em uma coleção de *valores veritativos* possuindo alguns *valores distingüidos*. A coleção usual de valores veritativos é $\{0,1\}$, com o valor distinguido 1. Todo sistema lógico possui uma semântica de valorações bivalente (vide [17]). Dizemos que uma fórmula é *verdadeira* com respeito a uma dada valoração se esta atribuir α aquela um valor distingüido, caso contrário chamamos esta fórmula de *falsa*. Uma valoração *satisfaz* uma fórmula dada se ela associar a esta fórmula um valor distingüido. Uma fórmula é *satisfatível* em uma semântica de valorações se existir uma valoração desta semântica que a satisfizer, e é *válida* se todas as valorações desta semântica a satisfizerem. Dizemos que uma valoração *satisfaz* uma coleção de fórmulas se ela satisfizer todas as fórmulas desta coleção. Uma coleção de fórmulas é dita *satisfatível* em uma semântica de valorações se existir uma valoração desta semântica que satisfizer todos os seus elementos, caso contrário a coleção é dita *insatisfatível*.

Dizemos que uma função $\mathbf{v}$ definida em uma linguagem proposicional L é *recursiva* se, para cada conectivo # de L há numa função $\mathbf{f}_{\#}:\mathbf{O}^{\mathbf{n}} \to \mathbf{O}$ tal que

$\mathbf{v}(\#(\mathbf{B_1},\ldots,\mathbf{B_n})) = \mathbf{f_\#}(\mathbf{v}(\mathbf{B_1}),\ldots,\mathbf{v}(\mathbf{B_n}))$, onde **n** é a aridade de #, **O** é o contradomínio de **v** e $\mathbf{B_1},\ldots,\mathbf{B_n}$ são fórmulas arbitrárias de **L**.

Sejam **M** uma semântica de valorações para uma linguagem proposicional L e O a coleção de valores veritativos de **M**. Dizemos que **M** é uma *semântica matricial* se, para cada conectivo # de L há uma função $\mathbf{f_\#}:\mathbf{O^n} \to \mathbf{O}$ tal que, para cada valoração $\mathbf{v} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{v}(\#(\mathbf{B_1},\ldots,\mathbf{B_n})) = \mathbf{f_\#}(\mathbf{v}(\mathbf{B_1}),\ldots,\mathbf{v}(\mathbf{B_n}))$, onde **n** é a aridade de # e $\mathbf{B_1},\ldots,\mathbf{B_n} \in$ **L**. Para cada conectivo #, α função correspondente $\mathbf{f_\#}$ é dita a *tabela* ou *matriz de valores veritativos* para #. Observe que, se **M** é uma semântica matricial, então todas as suas valorações são recursivas, mas a recíproca não é verdadeira.

Dizemos que uma semântica **S** de valorações para uma linguagem proposicional **L** é *recursiva* se há uma coleção **S'** de funções definidas em **L** e uma sobrejeção de **S'** em **S** tal que todas as funções de **S'** são recursivas. Todas as semânticas que mostramos neste trabalho são recursivas no sentido que acabamos de definir. Com a única exceção da semântica para o cálculo **CIE**, em todas as demais semânticas as sobrejeções requeridas são também injeções, e daí bijeções. Uma função de **S'** é recursiva e descreve exaustivamente os *significados* que ela atribui para as fórmulas de **L**, enquanto que uma função de **S** não é necessariamente recursiva e descreve os *valores veritativos* que ela atribui para as fórmulas de **L**. Não exigimos que, na definição de semântica recursiva, a sobrejeção requerida fosse uma bijeção porque uma atribuição de valores veritativos para as fórmulas de uma linguagem não determina necessariamente uma atribuição de significados.

Toda semântica matricial é recursiva, mas a recíproca não é verdadeira. Temos também que, se todas as valorações de uma semântica são recursivas, então a semântica é recursiva, porém também aqui não vale a recíproca.

Dizemos que uma função $\mathbf{V}:\mathbf{L} \to \{0,1\}$, onde **L** é uma linguagem formal possuindo os conectivos "$\to$", "$\wedge$" e "$\vee$", é *bem comportada* (com respeito a "$\to$", "$\wedge$" e "$\vee$") se **V** respeitar as seguintes condições:

- $\mathbf{V}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{V}(\mathbf{B}) = 1$;
- $\mathbf{V}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{V}(\mathbf{B}) = 1$;
- $\mathbf{V}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{V}(\mathbf{B}) = 1$.

Por exemplo, uma valoração para o cálculo $\mathbf{C_1}$ (veja [14]) é bem comportada.

Todas as valorações das semânticas definidas neste trabalho são bem comportadas, já que tencionamos pesquisar formas não clássicas de negação, na presença da implicação, conjunção e disjunção clássicas.

Seja **L** uma linguagem formal contendo os conectivos lógicos "$\to$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$". Dizemos que **v** é uma *valoração clássica (proposicional)* se **v** é uma função de **L** em {0,1} tal que **v** é bem comportada e, para toda fórmula $\mathbf{A} \in$ **L**, $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$ **sss** $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$.

Seja **S** uma semântica de valorações para uma dada linguagem, Γ uma coleção de fórmulas desta linguagem e **A** uma fórmula desta linguagem. Se cada valoração que satisfaz Γ

satisfaz **A**, dizemos que **A** é uma *conseqüência lógica* de Γ com respeito a **S**, e notamos isto por $\Gamma \models_{S} \mathbf{A}$. Se $\Gamma = \varnothing$, então podemos notar $\Gamma \models_{S} \mathbf{A}$ por $\models_{S} \mathbf{A}$. Se não houver nenhuma dúvida quanto à semântica considerada, podemos notar $\Gamma \models_{S} \mathbf{A}$ simplesmente por $\Gamma \models \mathbf{A}$.

Dizemos que um cálculo **C** é *correto* com respeito α uma semântica **S** se, para toda coleção Γ de fórmulas deste cálculo e para toda fórmula **A** deste cálculo, $\Gamma \vdash_{C} \mathbf{A}$ implica em $\Gamma \models_{S} \mathbf{A}$. Reciprocamente, dizemos que **C** é *completo* com respeito α **S** se, para toda coleção Γ de fórmulas deste cálculo e para toda fórmula **A** deste cálculo, $\Gamma \models_{S} \mathbf{A}$ implica em $\Gamma \vdash_{C} \mathbf{A}$.

Sejam **L** e **L'** linguagens formais dos cálculos **C** e **C'** tais que toda fórmula de **L** é fórmula de **L'**. Dizemos que **C'** é uma *extensão conservativa* de **C** se, para toda coleção de fórmulas Γ de **L** e para toda fórmula **A** de **L**, $\Gamma \vdash_{C} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \vdash_{C'} \mathbf{A}$.

Seja **C** um cálculo e consideremos definidos os *literais* de **C**. Dizemos que uma fórmula de **C** está na *forma conjuntiva normal* se ela é uma conjunção de disjunções de literais de **C**. Dizemos também que uma fórmula de **C** está na *forma disjuntiva normal* se ela é uma disjunção de conjunções de literais de **C**.

A partir de agora, em todo este trabalho, consideraremos **L** uma linguagem proposicional possuindo uma infinidade de letras sentenciais e os conectivos lógicos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", **L'** uma linguagem proposicional possuindo todos os sinais de **L**, mais o sinal "~". Usamos o sinal $\neg$ para representar a negação não clássica específica de cada cálculo, e o sinal "~" (como sinal primitivo) para representar a negação clássica dos cálculos $\mathbf{CI_2}$, $\mathbf{CI_4}$, $\mathbf{NAL_2}$ e $\mathbf{NAL_4}$. Nos cálculos $\mathbf{PC_1}$, $\mathbf{PC_2}$ e **CIE** o sinal "~" é usado como sinal definido (onde expressões da forma "$\sim\alpha$" são definidas de um modo diferente em cada cálculo), também para representar a negação clássica.

Se α e β são fórmulas arbitrárias, usaremos em todo este artigo as seguintes abreviaturas:

$$\alpha^{\circ} \rightleftharpoons \sim(\alpha \wedge \neg\alpha);$$
$$\alpha^{*} \rightleftharpoons \alpha \vee \neg\alpha;$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \rightleftharpoons (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha);$$
$$\alpha \Rightarrow \beta \rightleftharpoons (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha);$$
$$\alpha \Leftrightarrow \beta \rightleftharpoons (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha).$$

O sinal definido "$\Rightarrow$" é chamado de *implicação forte*, e o sinal definido "$\Leftrightarrow$" de *equivalência forte*.

Usaremos as letras latinas maiúsculas **P**, **Q**, **R** para representar letras sentenciais do alfabeto de **L**; as letras latinas maiúsculas **A**, **B**, **C** para representar fórmulas de **L** ou **L'**, dependendo do contexto; as letras gregas minúsculas α, β e γ para representar fórmulas de $\mathbf{L} \cup \{?\}$; e as letras gregas maiúsculas Γ e Ψ para representar coleções de fórmulas de **L**, **L'** ou $\mathbf{L} \cup \{?\}$, dependendo do contexto.

Se **f** é uma função definida em uma linguagem **L** e se Γ é uma coleção de fórmulas de **L**, então, por abuso de linguagem, usaremos $\mathbf{f}(\Gamma)$ para denotar a coleção $\{\mathbf{f}(\mathbf{A}) \mathbin{/} \mathbf{A} \in \Gamma\}$.

Os conectivos "$\neg$" e "~" (primitivo ou definido) são escritos em notação pré-fixada. O conectivo "?", usado no cálculo **CIE**, é escrito em notação pós-fixada. Os conectivos primitivos restantes são binários, e escritos em notação infixada.

Adotamos as seguintes convenções para a colocação de parênteses:

- a ordem de precedência entre os grupos de conectivos é dada pela seqüência $\{\neg, \sim, ?\}$, $\{\wedge, \vee\}$, $\{\rightarrow\}$, $\{\leftrightarrow\}$;
- em uma expressão possuindo duas ou mais ocorrências consecutivas do mesmo conectivo binário, a parentetização é realizada do lado direito para o lado esquerdo.

Por exemplo, a expressão $\neg\mathbf{A} \rightarrow \sim\mathbf{B} \vee \mathbf{C} \rightarrow \neg\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{E}? \vee \neg\mathbf{F}$ representa a fórmula $((\neg\mathbf{A}) \rightarrow (((\sim\mathbf{B}) \vee \mathbf{C}) \rightarrow (\neg\mathbf{D}))) \leftrightarrow ((\mathbf{E}?) \vee (\neg\mathbf{F}))$.

Dizemos que uma lógica é *paraconsistente* se não é verdade, em geral, que qualquer fórmula é conseqüência, nesta lógica, de duas fórmulas contraditórias **A** e $\neg$**A**. Uma lógica diz-se *paracompleta* se nela não for válido o princípio do terceiro excluído, isto é, não se tem em geral que $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ é um teorema da lógica, dada uma fórmula **A**. Uma lógica que é simultaneamente paraconsistente e paracompleta é dita *não alética*.

3. Os Cálculos Paraconsistentes CI_1, CI_2, CI_3 e CI_4

Os cálculos paraconsistentes da família **CI** (a sigla **CI** é uma abreviatura da expressão "cálculo para inconsistência") foram construídos para corresponder à alternativa semântica que qualificamos como *crédula*: num quadro de verdades relativas divergentes para um mesmo fato, o aceitamos como verdadeiro se ele o for para algum ponto de vista. O cálculo $\mathbf{CI_3}$ difere do cálculo $\mathbf{CI_1}$ de forma a refletir uma variação quanto a um aspecto na definição de sua semântica, a ser precisado quando da apresentação dessas semânticas. $\mathbf{CI_2}$ e $\mathbf{CI_4}$ diferem respectivamente de $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_3}$ pelo fato de incluirem a negação clássica (representada pelo conectivo "~", em adição ao símbolo "¬", utilizado neste capítulo para a negação paraconsistente). Semanticamente, a negação clássica corresponde à seguinte definição: $\sim\mathbf{A}$ é o caso se, e somente se, **A** não o for. $\mathbf{CI_2}$ e $\mathbf{CI_4}$ são na realidade extensões conservativas de $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_3}$ respectivamente. Para maiores detalhes quanto ás motivações da lógica paraconsistente, veja [1], [2], [5], [10], [11], [12], [20], [21], [22] e [23].

Os seguintes princípios foram adotados na confecção desses cálculos:

1º) não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula a partir de duas fórmulas contraditórias **A** e $\neg\mathbf{A}$;

2º) o princípio da não-contradição não vigora, isto é, duas fórmulas contraditórias **A** e $\neg\mathbf{A}$ podem ser ambas verdadeiras;

3º) todos os teoremas são justificáveis à luz da intuição semântica que lhes corresponde;

4º) esses cálculos devem buscar ser uma aproximação maximal da lógica clássica, respeitando os princípios acima.

Esses princípios são semelhantes aos adotados em da Costa [8] na construção dos cálculos $\mathbf{C_n}$, os quais foram tomados como paradigma e como ponto de partida no projeto dos cálculos que são aqui apresentados. Acreditamos no entanto termos sido melhor sucedidos no 4º princípio. Os cálculos $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_2}$, por exemplo, possuem como teoremas a lei da dupla negação (a qual só vale parcialmente em $\mathbf{C_1}$), as leis de de Morgan (as quais não valem em $\mathbf{C_1}$) e a lei para decompor a negação da implicação em uma conjunção (a qual também não vale em $\mathbf{C_1}$).

Uma outra propriedade a distinguir esses cálculos daqueles da família $\mathbf{C_n}$, de uma certa forma decorrente das propriedades citadas acima, é a existência de semânticas recursivas para os primeiros. Embora semânticas tenham sido dadas para os cálculos $\mathbf{C_n}$ em [9] e [14], tais semânticas não são recursivas. Essa tem sido uma das críticas levantadas contra os cálculos $\mathbf{C_n}$ (em [22] e [23], por exemplo).

Um fato curioso ocorre com o princípio da não-contradição. Esse princípio, conforme a formulação dada acima, assevera que duas fórmulas contraditórias **A** e $\neg\mathbf{A}$ não podem ser ambas verdadeiras. Nestes cálculos, embora a expressão $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$ seja um teorema, ao contrário do que ocorre no cálculo $\mathbf{C_1}$, temos que, ainda assim, apesar das aparências, o princípio da não-contradição não vigora, pois a interpretação semântica de $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$ vista aqui para os cálculos **CI** difere daquela dada para esta expressão no cálculo $\mathbf{C_1}$.

A linguagem de $\mathbf{CI_1}$ é L. Os postulados de $\mathbf{CI_1}$ (axiomas ou regras de inferência) são dados abaixo:

(i) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$;

(ii) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathsf{C})$;

(iii) $\dfrac{\mathbf{A}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;

(iv) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$;

(v) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$;

(vi) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$;

(vii) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(viii) $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(ix) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathsf{C}) \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C}) \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C})$;

(x) $((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$;

(xi) $\neg(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;

(xiii) $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xiv) $\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$;

(xv) $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$.

A linguagem de $\mathbf{CI_2}$ é L', e os postulados de $\mathbf{CI_2}$ são todos os postulados de $\mathbf{CI_1}$, expressos em L', menos o postulado (x), o qual em $\mathbf{CI_2}$ é um teorema, mais os seguintes esquemas, que introduzem o símbolo "~":

(i) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow {\sim}\mathbf{B}) \rightarrow {\sim}\mathbf{A}$;

(ii) ${\sim\sim}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$;

(iii) $\neg{\sim}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$.

<u>Teorema 3.1</u>: Em $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_2}$ valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$" e "$\vee$", ou seja:

- $\Gamma, \mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ **ent** $\Gamma \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$; $\quad \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \vdash \mathbf{B}$; $\quad \mathbf{A} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A}, \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$; $\quad \mathbf{B} \vdash \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$; $\quad \mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \mathbf{A} \rightarrow \mathsf{C}, \mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C} \vdash \mathsf{C}$.

<u>Teorema 3.2</u>: O sinal "~" funciona como a negação clássica em $\mathbf{CI_2}$, isto é:

- $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{A} \rightarrow {\sim}\mathbf{B} \vdash {\sim}\mathbf{A}$; $\quad {\sim\sim}\mathbf{A} \vdash \mathbf{A}$.

<u>Teorema 3.3</u>: $\mathbf{CI_2}$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{CI_1}$.

Teorema 3.4: Entre outros, os seguintes esquemas são teoremas de $\mathbf{CI_2}$:

- $\sim\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{A}$;
- $\neg\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^o \leftrightarrow \sim\mathbf{A} \vee \sim\neg\mathbf{A}$;
- $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$;
- $\mathbf{A}^{oo}$;
- $(\sim\mathbf{A})^o$;
- $\mathbf{B}^o \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}$;
- $\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^o$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$;
- $\mathbf{A}^o \leftrightarrow (\neg\mathbf{A})^o$;
- $\mathbf{B}^o \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^o$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^o \rightarrow \mathbf{A}^o \vee \mathbf{B}^o$;
- $\mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o \rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^o$;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^o \rightarrow \mathbf{A}^o \vee \mathbf{B}^o$;
- $\mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^o$;
- $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^o \rightarrow \mathbf{A}^o \vee \mathbf{B}^o$.

Teorema 3.5: Entre outros, os seguintes esquemas não são teoremas de $\mathbf{CI_2}$:

- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A})$;
- $\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$;
- $(\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{B}$;
- $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$;
- $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{B})$;
- $\neg\mathbf{A} \rightarrow \sim\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^o$;
- $(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})^o$;
- $\mathbf{A}^o \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^o$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^o \rightarrow \mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^o \rightarrow \mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^o \rightarrow \mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o$.

O teorema seguinte estabelece que a equivalência forte é preservada pela composição de fórmulas.

Teorema 3.6: Seja $\mathbf{A'}$ uma fórmula obtida de $\mathbf{A}$ substituindo algumas ocorrências de $\mathbf{B}$ (não necessariamente todas) por $\mathbf{B'}$. Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B'}$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A'}$.

Definição 3.7: Dizemos que $\mathbf{A}$ é um literal de $\mathbf{CI_2}$ se $\mathbf{A}$ é de uma das formas $\mathbf{P}$, $\sim\mathbf{P}$, $\neg\mathbf{P}$ ou $\sim\neg\mathbf{P}$.

Teorema 3.8: Toda fórmula de $\mathbf{CI_2}$ pode ser colocada em forma conjuntiva normal, isto é, dada uma fórmula $\mathbf{A}$ de $\mathbf{CI_2}$, existe uma fórmula $\mathbf{A'}$ de $\mathbf{CI_2}$ em forma conjuntiva normal tal que $\vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A'}$.

O teorema 3.8, juntamente com os teoremas 3.1 e 3.2, indica a existência de um método de resolução clausal para o cálculo $\mathbf{CI_2}$. Sobre o método de resolução aplicado à lógica clássica, veja [7] e [18].

Teorema 3.9: Toda fórmula de $\mathbf{CI_2}$ pode ser colocada em forma disjuntiva normal.

O teorema 3.9, juntamente com os teoremas 3.1 e 3.2, indica a existência de um sistema de tableaux para o cálculo $\mathbf{CI_2}$, no qual as fórmulas excluídas são precisamente os literais de $\mathbf{CI_2}$, e onde o critério de fechamento só depende das fórmulas excluídas. Sobre o método dos tableaux, veja [3], [5] e [6].

O teorema abaixo diz que, num certo sentido o cálculo $\mathbf{CI_2}$ é estritamente mais forte que o cálculo $\mathbf{C_1}$.

<u>Teorema 3.10</u>: Seja **f** uma função com argumentos na coleção das fórmulas de $\mathbf{C_1}$, e com valores na coleção das fórmulas de $\mathbf{CI_2}$, definida pelas seguintes condições:

- $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$;
- $\mathbf{f}(\mathbf{A} \# \mathbf{B}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}) \# \mathbf{f}(\mathbf{B})$, onde $\# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$;
- $\mathbf{f}(\neg\mathbf{A}) = \neg\mathbf{f}(\mathbf{A})$, se **A** não é da forma $\mathbf{B} \wedge \neg\mathbf{B}$;
- $\mathbf{f}(\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})) = {\sim}\mathbf{f}(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$.

Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C_1}} \mathbf{A}$ implica em $\mathbf{f}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{f}(\mathbf{A})$.

<u>Teorema 3.11</u>: $\mathbf{CI_2}$ é decidível pelas seguintes matrizes de três valores, onde 1 e 2 são os valores distingüidos:

A \ B	0	1	2
	A → B		
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

A \ B	0	1	2
	A ∧ B		
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

A \ B	0	1	2
	A ∨ B		
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

A	**¬A**
0	2
1	1
2	0

A	**~A**
0	2
1	0
2	0

Como $\mathbf{CI_2}$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{CI_1}$, temos naturalmente que $\mathbf{CI_1}$ também é decidível por estas matrizes.

Na confecção das tabelas acima, usamos a heurística de associar a cada atribuição de uma fórmula componente uma certa fórmula, de modo a determinar a atribuição correspondente da fórmula composta considerada.

No caso presente utilizamos as seguintes associações:

A	fórmula associada
0	**~A**
1	$\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}$
2	**~¬A**

Assim, por exemplo, se **A** tiver o valor 1 e **B** tiver o valor 2, então $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ deverá ter o valor 1, já que $\vdash_{\mathbf{CI_2}} (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}) \wedge {\sim}\neg\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$.

Definição 3.12: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{CI_1}$ se $\mathbf{V}$ é uma função de L em $\{0,1\}$ e há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações clássicas e duas funções $\mathbf{V_{max}}$ e $\mathbf{V_{min}}$ de L em $\{0,1\}$, onde $\mathbf{V} = \mathbf{V_{max}}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(3.12.1) $\mathbf{V_{max}(p)} = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v(p)} = 1$;

(3.12.2) $\mathbf{V_{min}(p)} = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v(p)} = 1$;

(3.12.3) $\mathbf{V_{max}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;

(3.12.4) $\mathbf{V_{min}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;

(3.12.5) $\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(3.12.6) $\mathbf{V_{min}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(3.12.7) $\mathbf{V_{max}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(3.12.8) $\mathbf{V_{min}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(3.12.9) $\mathbf{V_{max}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(3.12.10) $\mathbf{V_{min}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$.

Note que, na definição acima, como $\mathbf{V} = \mathbf{V_{max}}$, temos que $\mathbf{V_{max}}$ é uma função que deve ser bem comportada, o que nem sempre coincide com a busca da maximização. Tal coincidência se dá de fato com conjunções e disjunções, mas não com implicações. Por exemplo, se quiséssemos realmente maximizar a fórmula $\mathbf{A \to B}$, então deveríamos substituir a cláusula (3.12.15) da definição por

$$\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1 \textbf{ sss } \mathbf{V_{min}(A)} = 0 \text{ ou } \mathbf{V_{max}(B)} = 1.$$

Porém, se fizéssemos isto, a implicação, segundo tal semântica, não gozaria mais da propriedade $\mathbf{A, A \to B \vdash B}$.

A função $\mathbf{V_{min}}$, conforme a definição 3.12, de fato minimiza em todas as situações, e é tal diferença que gera a assimetria entre as cláusulas (3.12.5) e (3.12.6).

Teorema 3.13: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CI_1}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{CI_1}} \mathbf{A}$.

Definição 3.14: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{CI_2}$ se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V_{max}}$ definidas em $\mathsf{L'}$, mais as seguintes condições adicionais:

(3.14.1) $\mathbf{V_{max}(\sim A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;

(3.14.2) $\mathbf{V_{min}(\sim A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$.

Observe que, segundo as duas últimas definições, temos sempre que $\mathbf{V_{min}(A)} \leq \mathbf{V_{max}(A)}$.

Descrevemos a seguir a heurística usada para determinar as condições da última definição. Podemos considerar **~A** como uma abreviatura para $\mathbf{A} \rightarrow \perp$, onde $\perp$ é um conectivo de aridade zero que é sempre falso, isto é, se **v** é uma valoração clássica, então $\mathbf{v}(\perp) = 0$. Portanto, se **V** for uma valoração para $\mathbf{CI_2}$, então $\mathbf{V}(\perp) = 0$.

Temos que $\mathbf{V_{max}}(\sim\mathbf{A}) = 1$

sss

$\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A} \rightarrow \perp) = 1$

sss

$\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{V_{max}}(\perp) = 1$

sss

$\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 0.$

Temos também que $\mathbf{V_{min}}(\sim\mathbf{A}) = 1$

sss

$\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A} \rightarrow \perp) = 1$

sss

$\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{V_{min}}(\perp) = 1$

sss

$\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 0.$

<u>Teorema 3.15</u>: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{A}$.

Mostramos a seguir que o cálculo $\mathbf{CI_2}$ (e portanto o cálculo $\mathbf{CI_1}$) admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem.

Para cada letra sentencial **P** associamos um sinal predicativo **p** de aridade 1. Seja **LC** um cálculo para a lógica de predicados clássica cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

<u>Teorema 3.16</u>: Sejam **g**, $\mathbf{g_{max}}$ e $\mathbf{g_{min}}$ funções com argumentos em $\mathbf{L'}$ e com valores na coleção das fórmulas de **LC**, onde $\mathbf{g} = \mathbf{g_{max}}$,definidas pelas seguintes condições:

- $\mathbf{g_{max}}(\mathbf{P}) = \exists x\ \mathbf{p}x$; $\quad$ $\mathbf{g_{min}}(\sim\mathbf{A}) = \neg\mathbf{g_{max}}(\mathbf{A})$;
- $\mathbf{g_{min}}(\mathbf{P}) = \forall x\ \mathbf{p}x$; $\quad$ $\mathbf{g_{max}}(\mathbf{A} \# \mathbf{B}) = \mathbf{g_{max}}(\mathbf{A}) \# \mathbf{g_{max}}(\mathbf{B})$, onde $\# \in \{\rightarrow,\wedge,\vee\}$;
- $\mathbf{g_{max}}(\neg\mathbf{A}) = \neg\mathbf{g_{min}}(\mathbf{A})$; $\quad$ $\mathbf{g_{min}}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{g_{max}}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{g_{min}}(\mathbf{B})$;
- $\mathbf{g_{min}}(\neg\mathbf{A}) = \neg\mathbf{g_{max}}(\mathbf{A})$; $\quad$ $\mathbf{g_{min}}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{g_{min}}(\mathbf{A}) \wedge \mathbf{g_{min}}(\mathbf{B})$;
- $\mathbf{g_{max}}(\sim\mathbf{A}) = \neg\mathbf{g_{max}}(\mathbf{A})$; $\quad$ $\mathbf{g_{min}}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \mathbf{g_{min}}(\mathbf{A}) \vee \mathbf{g_{min}}(\mathbf{B})$.

Então, para qualquer fórmula **A** de $\mathbf{CI_2}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{A}$ **sss** $\mathbf{g}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{LC}} \mathbf{g}(\mathbf{A})$.

Devido à assimetria entre as cláusulas (3.12.5) e (3.12.6), e pelo fato da função $\mathbf{V_{max}}$ da definição 3.12 não maximizar realmente em todos os casos, imaginamos uma semântica alternativa que possua internamente uma função maximizadora $\mathbf{V_{max}}$, e externamente, em sua definição formal, uma função $\mathbf{V}$ que seja bem comportada. Chamamos tal semântica de *semântica de maximização com interface*. Na realidade definiremos abaixo duas semânticas desta espécie, respectivamente para os cálculos $\mathbf{CI_3}$ e $\mathbf{CI_4}$.

<u>Definição 3.17</u>: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{CI_3}$ se há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações clássicas e duas funções $\mathbf{V_{max}}$ e $\mathbf{V_{min}}$ tal que $\mathbf{V}$, $\mathbf{V_{max}}$ e $\mathbf{V_{min}}$ são funções de $\mathcal{L}$ em $\{0,1\}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(3.17.1) $\mathbf{V(P) = V_{max}(P)}$;

(3.17.2) $\mathbf{V_{max}(p)} = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v(P)} = 1$;

(3.17.3) $\mathbf{V_{min}(p)} = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v(P)} = 1$;

(3.17.4) $\mathbf{V(\neg A) = V_{max}(\neg A)}$;

(3.17.5) $\mathbf{V_{max}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;

(3.17.6) $\mathbf{V_{min}}(\neg \mathrm{A}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;

(3.17.7) $\mathbf{V(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 0$ ou $\mathbf{V(B)} = 1$;

(3.17.8) $\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(3.17.9) $\mathbf{V_{min}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(3.17.10) $\mathbf{V(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 1$ e $\mathbf{V(B)} = 1$;

(3.17.11) $\mathbf{V_{max}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(3.17.12) $\mathbf{V_{min}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(3.17.13) $\mathbf{V(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 1$ ou $\mathbf{V(B)} = 1$;

(3.17.14) $\mathbf{V_{max}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(3.17.15) $\mathbf{V_{min}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$.

<u>Definição 3.18</u>: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{CI_4}$ se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com $\mathbf{V}$, $\mathbf{V_{max}}$ e $\mathbf{V_{min}}$ definidas em $\mathcal{L}'$, mais as seguintes condições adicionais:

(3.18.1) $\mathbf{V(\sim A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 0$;

(3.18.2) $\mathbf{V_{max}(\sim A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;

(3.18.3) $\mathbf{V_{min}(\sim A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$.

Observe que, segundo as duas ∨ltimas definições, temos sempre que $\mathbf{V_{min}(A) \leq V(A) \leq V_{max}(A)}$.

A linguagem de $\mathbf{CI_3}$ é L. Os postulados de $\mathbf{CI_3}$ são dados abaixo:

(i) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(ii) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathsf{C})$;

(iii) $\dfrac{\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;

(iv) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(v) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

(vi) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$;

(vii) $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(viii) $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(ix) $(\mathbf{A} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathsf{C})$;

(x) $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$;

(xi) $\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;

(xiii) $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xiv) $\mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}$;

(xv) $\neg\neg\neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}$;

(xvi) $\neg\neg\mathbf{P} \to \mathbf{P}$;

(xvii) $\neg\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$;

(xviii) $\neg\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\neg\mathbf{B}$;

(xix) $\neg\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$;

(xx) $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$.

Note que os postulados de $\mathbf{CI_3}$ diferem dos postulados de $\mathbf{CI_1}$ quanto ao tratamento de negações de fórmulas compostas e da dupla negação. Enquanto que no cálculo $\mathbf{C_1}$ é postulado $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$, no cálculo $\mathbf{CI_3}$ é postulado $\mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}$. A razão semântica disto é que $\mathbf{V}(\mathbf{A}) \le \mathbf{V_{max}}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{V}(\neg\neg\mathbf{A}) = \mathbf{V_{max}}(\mathbf{A})$.

A linguagem de $\mathbf{CI_4}$ é L', e os postulados de $\mathbf{CI_4}$ são todos os postulados de $\mathbf{CI_3}$, expressos em L', menos o postulado (x), o qual em $\mathbf{CI_4}$ é um teorema, mais os seguintes esquemas:

(i) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to {\sim}\mathbf{B}) \to {\sim}\mathbf{A}$;

(ii) ${\sim}{\sim}\mathbf{A} \to \mathbf{A}$;

(iii) $\neg{\sim}\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A}$.

1. Os Cálculos Paracompletos PC_1 e PC_2

Os cálculos paracompletos da família **PC** (esta sigla é uma abreviatura da palavra "paracompleto") foram construídos para corresponder à alternativa semântica que qualificamos como cética. Num quadro de verdades relativas divergentes para um mesmo fato, o aceitamos como verdadeiro se ele o for para todos os pontos de vista. O cálculo $\mathbf{PC_2}$ difere do cálculo $\mathbf{PC_1}$ de forma a refletir uma variação quanto a um aspecto na definição de sua semântica, a ser precisado quando da apresentação das semânticas. Um outro contexto onde tais lógicas se aplicam diz respeito a questões de percepção, conhecimento ou crença. Definimos mais adiante uma semântica de matrizes finitas que reflete mais fielmente esta última aplicação. Para outros detalhes quanto às motivações da lógica paracompleta, veja [15].

Os seguintes princípios foram adotados na confecção desses cálculos:

1º) o princípio do terceiro excluído não vigora;

2º) todos os teoremas são justificáveis à luz da intuição semântica que lhes corresponde;

3º) esses cálculos devem buscar ser uma aproximação maximal da lógica clássica, respeitando os princípios acima.

O cálculo $\mathbf{P_1}$ de da Costa (vide [15]) foi um ponto de partida para o projeto dos cálculos paracompletos apresentados neste capítulo. Estes cálculos cumprem melhor o terceiro princípio citado acima que o cálculo $\mathbf{P_1}$. Por exemplo, o cálculo $\mathbf{PC_1}$ possui também como teoremas a lei da dupla negação (a qual só vale parcialmente em $\mathbf{P_1}$), as leis de De Morgan (as quais não valem em $\mathbf{P_1}$) e a lei para decompor a negação da implicação em uma conjunção (α qual também não vale em $\mathbf{P_1}$). Uma outra propriedade a distinguir os cálculos **PC** do cálculo $\mathbf{P_1}$ é a existência de semânticas recursivas para os primeiros. Embora $\mathbf{P_1}$ possua uma semântica de valorações, esta não é recursiva.

A linguagem de $\mathbf{PC_1}$ é L. Os postulados de $\mathbf{PC_1}$ são dados abaixo:

(i) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(ii) $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathsf{C})$;

(iii) $\dfrac{\mathbf{A},\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;

(iv) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(v) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

(vi) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$;

(vii) $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(viii) $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(ix) $(\mathbf{A} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathsf{C})$;

(x) $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$;

(xi) $\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;

(xiii) $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xiv) $\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$;

(xv) $\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Note que os postulados (i) a (xiv) de $\mathbf{PC_1}$ e $\mathbf{CI_1}$ são idênticos. $\mathbf{PC_1}$ e $\mathbf{CI_1}$ diferem apenas com respeito ao esquema (xv).

Teorema 4.1: Em $\mathbf{PC_1}$ valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$" e "$\vee$".

Adotaremos, neste capítulo, para qualquer fórmula $\mathbf{A}$ de L, a abreviatura $\sim\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{A} \rightarrow \neg A$.

Teorema 4.2: O sinal definido "~" funciona como a negação clássica em $\mathbf{PC_1}$.

Teorema 4.3: Entre outros, os seguintes esquemas são teoremas de $\mathbf{PC_1}$:

- $\neg\mathbf{A} \rightarrow \sim\mathbf{A}$;
- $\neg\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$;
- $\sim(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$;
- $(\sim\mathbf{A})^*$;
- $\mathbf{A}^* \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \sim\mathbf{A}$;
- $\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \sim(\mathbf{A}^*)$;
- $\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \sim\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^*$;

$\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$;
$(\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$;
$\mathbf{A}^* \leftrightarrow (\neg\mathbf{A})^*$;
$\mathbf{B}^* \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^*$;
$\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^* \rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^*$;
$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^* \rightarrow \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$;
$\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^* \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^*$;
$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \rightarrow \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$.

Teorema 4.4: Entre outros, os seguintes esquemas não são teoremas de $\mathbf{PC_1}$:

- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A})$;
- $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{B})$;
- $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\sim\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$;

$\mathbf{A}^{**}$;
$\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$;
$\mathbf{A}^* \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^*$;
$(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})^* \rightarrow \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$;
$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^* \rightarrow \mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^*$;
$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \rightarrow \mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^*$.

O teorema seguinte estabelece que a equivalência forte é preservada pela composição de fórmulas.

Teorema 4.5: Se $\mathbf{A'}$ é uma fórmula obtida de $\mathbf{A}$ substituindo algumas ocorrências de $\mathbf{B}$ (não necessariamente todas) por $\mathbf{B'}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B'}$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A'}$.

Definição 4.6: Dizemos que $\mathbf{A}$ é um literal de $\mathbf{PC_1}$ se $\mathbf{A}$ é de uma das formas $\mathbf{P}$, $\sim\mathbf{P}$, $\neg\mathbf{P}$ ou $\sim\neg\mathbf{P}$.

Teorema 4.7: Toda fórmula de $\mathbf{PC_1}$ pode ser colocada em forma conjuntiva normal.

O teorema 4.7, juntamente com os teoremas 4.1 e 4.2, indica a existência de um método de resolução clausal para o cálculo $\mathbf{PC_1}$.

Teorema 4.8: Toda fórmula de $\mathbf{PC_1}$ pode ser colocada em forma disjuntiva normal.

O teorema 4.8, juntamente com os teoremas 4.1 e 4.2, indica a existência de um sistema de tableaux para o cálculo $\mathbf{PC_1}$, no qual as fórmulas excluídas são precisamente os literais de $\mathbf{PC_1}$, e onde o critério de fechamento só depende das fórmulas excluídas. O teorema seguinte esclarece a relação entre os cálculos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{PC_1}$.

Teorema 4.9: O cálculo $\mathbf{PC_1}$ é estritamente mais forte que o cálculo $\mathbf{P_1}$, isto é, dados Γ e $\mathbf{A}$, se $\Gamma \vdash_{\mathbf{P_1}} \mathbf{A}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{A}$, mas não vale a recíproca.

Teorema 4.10: $\mathbf{PC_1}$ é decidível pelas seguintes matrizes de três valores, onde 2 é o único valor distinguido:

	$\mathbf{A \to B}$		
A \ B	0	1	2
0	2	2	2
1	2	2	2
2	0	1	2

	$\mathbf{A \wedge B}$		
A \ B	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

	$\mathbf{A \vee B}$		
A \ B	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\mathbf{A}$	$\mathbf{\neg A}$
0	2
1	1
2	0

Na confecção das tabelas acima, usamos uma heurística análoga à utilizada para $\mathbf{CI_2}$. No caso presente, adotamos as seguintes associações:

$\mathbf{A}$	fórmula associada
0	$\mathbf{\neg A}$
1	$\mathbf{\sim A \wedge \sim\neg A}$
2	$\mathbf{A}$

Assim, por exemplo, se $\mathbf{A}$ tiver o valor 2 e $\mathbf{B}$ tiver o valor 1, então $\mathbf{A \to B}$ deverá ter o valor 1, já que $\vdash_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{A} \wedge (\mathbf{\sim B} \wedge \mathbf{\sim\neg B}) \to \mathbf{\sim(A \to B)} \wedge \mathbf{\sim\neg(A \to B)}$.

A semântica de matrizes para $\mathbf{PC_1}$ também conecta este cálculo a um outro tipo de aplicação, relacionado a questões de percepção, conhecimento ou crença. Por exemplo, considere o enunciado “Deus existe”, com respeito a um sujeito que contempla o universo. Se este sujeito crê em Deus, poderíamos atribuir ao enunciado dado o valor veritativo 2;
se o sujeito não tem nenhuma opinião acerca de Deus, o enunciado teria o valor veritativo 1; finalmente, se o sujeito é ateu, então o enunciado teria o valor veritativo 0.

Definição 4.11: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{PC_1}$ se há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações clássicas e duas funções $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ de $\mathbf{L}$ em {0,1}, onde $\mathbf{V} = \mathbf{V_{min}}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(4.11.1) $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{P}) = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v}(\mathbf{P}) = 1$;

(4.11.2) $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{P}) = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v}(\mathbf{P}) = 1$;

(4.11.3) $\mathbf{V_{min}}(\neg\mathbf{A}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 0$;

(4.11.4) $\mathbf{V_{max}}(\neg\mathbf{A}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) = 0$;

(4.11.5) $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{B}) = 1$;

(4.11.6) $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{B}) = 1$;

(4.11.7) $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{B}) = 1$;

(4.11.8) $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 1$ e $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{B}) = 1$;

(4.11.9) $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{B}) = 1$;

(4.11.10) $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 1$ ou $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{B}) = 1$.

Observe que, segundo a definição acima, $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{V_{max}}(\mathbf{A})$.

Note que, nesta definição, como $\mathbf{V} = \mathbf{V_{min}}$, temos que $\mathbf{V_{min}}$ é uma função que deve ser bem comportada, o que nem sempre coincide com a busca da minimização. Tal coincidência se dá de fato com conjunções e disjunções, mas não com implicações.
Por exemplo, se quiséssemos realmente minimizar a fórmula $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$,
então deveríamos substituir a cláusula (4.11.5) da definição por $V_{min}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}}(\mathbf{A}) = 0$ ou $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{B}) = 1$.

Porém, se fizéssemos isto, a implicação não seria mais clássica, contrariando o compromisso que assumimos neste trabalho.

A função $\mathbf{V_{max}}$, conforme a definição 4.11, de fato maximiza em todas as situações, e é tal diferença que gera a assimetria entre as cláusulas (4.11.5) e (4.11.6).

Teorema 4.12: $\Gamma \vdash_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{A}$.

Mostramos a seguir que o cálculo $\mathbf{PC_1}$ admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem.

Para cada letra sentencial $\mathbf{P}$ associamos um sinal predicativo $\mathbf{p}$ de aridade 1. Seja **LC** um cálculo para a lógica de predicados clássica cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 4.13: Sejam $\mathbf{h}$, $\mathbf{h_{min}}$ e $\mathbf{h_{max}}$ funções com argumentos na coleção das fórmulas de $\mathbf{PC_1}$, e com valores na coleção das fórmulas de $\mathbf{LC}$, onde $\mathbf{h} = \mathbf{h_{min}}$, definidas pelas seguintes condições:

- $\mathbf{h_{min}(P)} = \forall x\ \mathbf{p}x$; $\mathbf{h_{min}(A \# B) = h_{min}(A) \# h_{min}(B)}$, onde $\# \in \{\to,\wedge,\vee\}$;
- $\mathbf{h_{max}(P)} = \exists x\ \mathbf{p}x$; $\mathbf{h_{max}(A \to B) = h_{min}(A) \to h_{max}(B)}$;
- $\mathbf{h_{min}(\neg A) = \neg h_{max}(A)}$; $\mathbf{h_{max}(A \wedge B) = h_{max}(A) \wedge h_{max}(B)}$;
- $\mathbf{h_{max}(\neg A) = \neg h_{min}(A)}$; $\mathbf{h_{max}(A \vee B) = h_{max}(A) \vee h_{max}(B)}$.

Então, para qualquer fórmula $\mathbf{A}$ de $\mathbf{PC_1}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{PC_1}} \mathbf{A}$ **sss** $\mathbf{h}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{LC}} \mathbf{h(A)}$.

Devido à assimetria entre as cláusulas (4.11.5) e (4.11.6), e pelo fato da função $\mathbf{V_{min}}$ da definição 4.11 não minimizar realmente em todos os casos, imaginamos uma semântica alternativa que possua internamente uma função minimizadora $\mathbf{V_{min}}$, e externamente, em sua definição formal, uma função $\mathbf{V}$ que seja bem comportada. Chamamos tal semântica de *semântica de minimização com interface*.

Definição 4.14: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{PC_2}$ se há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações clássicas e duas funções $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ tal que $\mathbf{V}$, $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ são funções de L em $\{0,1\}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(4.14.1) $\mathbf{V(P) = V_{min}(P)}$;
(4.14.2) $\mathbf{V_{min}(P)} = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v(P)} = 1$;
(4.14.3) $\mathbf{V_{max}(P)} = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v(P)} = 1$;
(4.14.4) $\mathbf{V(\neg A) = V_{min}(\neg A)}$;
(4.14.5) $\mathbf{V_{min}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;
(4.14.6) $\mathbf{V_{max}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;
(4.14.7) $\mathbf{V(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 0$ ou $\mathbf{V(B)} = 1$;
(4.14.8) $\mathbf{V_{min}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(4.14.9) $\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(4.14.10) $\mathbf{V(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 1$ e $\mathbf{V(B)} = 1$;
(4.14.11) $\mathbf{V_{min}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(4.14.12) $\mathbf{V_{max}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(4.14.13) $\mathbf{V(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 1$ ou $\mathbf{V(B)} = 1$;
(4.14.14) $\mathbf{V_{min}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(4.14.15) $\mathbf{V_{max}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$.

Observe que, segundo α definição acima, temos sempre que $V_{min}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{V(A)} \leq V_{max}(\mathbf{A})$.

A linguagem de $\mathbf{PC_2}$ é L. Os postulados de $\mathbf{PC_2}$ são dados abaixo:

(i) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(ii) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathsf{C})$;

(iii) $\dfrac{\mathbf{A},\ \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;

(iv) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(v) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

(vi) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$;

(vii) $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(viii) $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(ix) $(\mathbf{A} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathsf{C})$;

(x) $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$;

(xi) $\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;

(xiii) $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xiv) $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$;

(xv) $\neg\mathbf{A} \to \neg\neg\neg\mathbf{A}$;

(xvi) $\mathbf{P} \to \neg\neg\mathbf{P}$;

(xvii) $\neg\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$;

(xviii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\neg\mathbf{B}$;

(xix) $\neg\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$;

(xx) $\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Note que os postulados de $\mathbf{PC_2}$ diferem dos postulados de $\mathbf{PC_1}$ quanto ao tratamento de negações de fórmulas compostas e da dupla negação. Enquanto que no cálculo $\mathbf{P_1}$ é postulado $\mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}$, no cálculo $\mathbf{PC_2}$ é postulado $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$. A razão semântica disto é que $\mathbf{V_{min}}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{V}(\mathbf{A})$ e $\mathbf{V}(\neg\neg\mathbf{A}) = \mathbf{V_{min}}(\mathbf{A})$.

2. Os Cálculos Não Aléticos NAL_1, NAL_2, NAL_3 e NAL_4

Os cálculos não aléticos da família **NAL** (esta sigla é uma abreviatura da expressão "não alético") correspondem a uma combinação das duas alternativas semânticas que qualificamos como crédula e como cética. Num quadro de verdades relativas $\mathbf{v}_{i,j}$, onde i varia ao longo de uma determinada dimensão e j varia ao longo de outra dimensão, podemos combinar as duas alternativas acima de duas maneiras distintas (estamos aqui contando o número de alternativas segundo a ordem em que usamos os metaquantificadores universal e existencial, não importando nesta classificação a troca de i por j e vice-versa):

1ª) um fato é verdadeiro se, e somente se, para todo i da primeira dimensão, existe um j da segunda dimensão tal que o fato é verdadeiro na situação $\mathbf{v}_{i,j}$;

2ª) um fato é verdadeiro se, e somente se, existe um i da primeira dimensão tal que, para todo j da segunda dimensão, o fato é verdadeiro na situação $\mathbf{v}_{i,j}$.

Exemplificamos a seguir um *ambiente não alético*, tal como este poderia ocorrer na vida real. Consideremos a história de um objeto multifacetado e multicolorido tal que, a partir de cada lugar e em um instante dado, só e possível observar no máximo uma cor. Podemos considerar que, para cada instante i e para cada lugar ℓ, há uma valoração clássica $v_{i,\ell}$ que descreve o meio ambiente no instante i e a partir do lugar ℓ. Conforme a primeira alternativa descrita acima, dizemos que o objeto considerado é azul se, e somente se, para todo instante i, existe um lugar ℓ tal que $v_{i,\ell}$(o objeto é azul) = 1, ou seja, em qualquer instante há um ponto de vista a partir do qual a cor observada do objeto é azul.

Um outro tipo de ambiente não alético é aquele que combina questões de relatividade dos pontos de referência com problemas de percepção, conhecimento ou crença. Por exemplo, imagine um observador em movimento com uma percepção imperfeita. Se em certos intervalos de tempo a sua percepção fosse perfeita, então ele poderia observar, em instantes distintos, qualidades contraditórias nos mesmos objetos e, se em certos intervalos de tempo este observador estivesse em repouso, então, se a sua percepção fosse falha, ele poderia não conseguir observações conclusivas com respeito a certos objetos. Uma semântica refletindo tal ambiente pode ser construída compondo-se uma semântica de maximização paraconsistente com uma semântica matricial paracompleta.

Os seguintes princípios foram adotados na confecção destes cálculos:

1º) não é possível, em geral, deduzir qualquer fórmula a partir de duas fórmulas contraditórias **A** e ¬**A**;

2º) o princípio da não contradição não vigora, isto é, duas fórmulas contraditórias **A** e ¬**A** podem ser ambas verdadeiras;

3º) o princípio do terceiro excluído não vale;

4º) todos os teoremas são justificáveis à luz da intuição semântica que lhes corresponde (todos os cálculos vistos neste capítulo são contrapartes sintáticas de suas alternativas semânticas correspondentes);

5º) esses cálculos devem buscar ser uma aproximação maximal da lógica clássica, respeitando os princípios acima.

O cálculo $\mathbf{N_1}$ de da Costa (vide [13]) foi um ponto de partida para o projeto dos cálculos não aléticos apresentados neste capítulo. Estes cálculos cumprem melhor o quinto princípio citado acima que o cálculo $\mathbf{N_1}$. Os cálculos $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_2}$, por exemplo, possuem como teoremas a lei da dupla negação, as leis de De Morgan e a lei para decompor a negação da implicação em uma conjunção, e nenhuma dessas leis é teorema em $\mathbf{N_1}$. Uma outra propriedade a distinguir os cálculos **NAL** do cálculo $\mathbf{N_1}$ é a existência de semânticas recursivas para os primeiros. O cálculo $\mathbf{N_1}$ possui uma semântica de valorações, mas esta não é recursiva.

A linguagem de $\mathbf{NAL_1}$ é L. Os postulados de $\mathbf{NAL_1}$ são dados abaixo:

(i) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(ii) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \to \mathsf{C})$;

(iii) $\dfrac{\mathbf{A}, \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;

(iv) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(v) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;

(vi) $\mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$;

(vii) $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(viii) $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(ix) $(\mathbf{A} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{B} \to \mathsf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathsf{C})$;

(x) $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$;

(xi) $\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;

(xiii) $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xiv) $\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$.

Observe que os postulados de $\mathbf{NAL_1}$ são os postulados (i) a (xiv) de $\mathbf{CI_1}$ (ou de $\mathbf{PC_1}$).

A linguagem de $\mathbf{NAL_2}$ é L', e os postulados de $\mathbf{NAL_2}$ são todos os postulados de $\mathbf{NAL_1}$, expressos em L', menos o postulado (x), o qual em $\mathbf{NAL_2}$ é um teorema, mais os seguintes esquemas:

(i) $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \sim\mathbf{B}) \to \sim\mathbf{A}$;

(ii) $\sim\sim\mathbf{A} \to \mathbf{A}$;

(iii) $\neg\sim\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$.

<u>Teorema 5.1</u>: Em $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_2}$ valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos "$\to$", "$\wedge$" e "$\vee$".

Teorema 5.2: O sinal "~" funciona como a negação clássica em $\mathbf{NAL_2}$.

Teorema 5.3: $\mathbf{NAL_2}$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{NAL_1}$.

Teorema 5.4: Entre outros, os seguintes esquemas são teoremas de $\mathbf{NAL_2}$:

- $\mathbf{A}^* \to \sim\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^o \to \neg\mathbf{A} \to \sim\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^o \leftrightarrow \sim\mathbf{A} \vee \sim\neg\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^o \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^{o^o}$;
- $(\sim\mathbf{A})^o$;
- $(\sim\mathbf{A})^*$;
- $\mathbf{A}^o \vee \mathbf{A}^*$;
- $\mathbf{B}^o \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^o$;
- $\mathbf{B}^* \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^*$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})^o \to \mathbf{A}^o \vee \mathbf{B}^o$;
- $\mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o \to (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^o$;
- $\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^* \to (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^*$;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^o \to \mathbf{A}^o \vee \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^* \to \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$;
- $\mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^o$;
- $\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^* \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^*$;
- $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^o \to \mathbf{A}^o \vee \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \to \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$.

Teorema 5.5: Entre outros, os seguintes esquemas não são teoremas de $\mathbf{NAL_2}$:

- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A})$;
- $\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}$;
- $(\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A}) \to \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$;
- $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \to (\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{B})$;
- $\neg\mathbf{A} \to \sim\mathbf{A}$;
- $\sim\mathbf{A} \to \neg\mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^o$;
- $\mathbf{A}^*$;
- $\mathbf{A}^{*^*}$;
- $\mathbf{A}^o \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^o$;
- $\mathbf{A}^* \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^*$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})^* \to \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B})^o \to \mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^o \to \mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^* \to \mathbf{A}^* \vee \mathbf{B}^*$;
- $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^o \to \mathbf{A}^o \wedge \mathbf{B}^o$;
- $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^* \to \mathbf{A}^* \wedge \mathbf{B}^*$.

O teorema seguinte assevera que a composição de fórmulas preserva a equivalência forte.

Teorema 5.6: Se **A'** é uma fórmula obtida de **A** substituindo algumas ocorrências de **B** (não necessariamente todas) por **B'**, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B'}$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A'}$.

Definição 5.7: Dizemos que **A** é um literal de $\mathbf{NAL_2}$ se **A** é de uma das formas **P**, **~P**, **¬P** ou **~¬P**.

Teorema 5.8: Toda fórmula de $\mathbf{NAL_2}$ pode ser colocada em forma conjuntiva normal.

O teorema 5.8, juntamente com os teoremas 5.1 e 5.2, indica a existência de um método de resolução clausal para o cálculo $\mathbf{NAL_2}$.

Teorema 5.9: Toda fórmula de $\mathbf{NAL_2}$ pode ser colocada em forma disjuntiva normal.

O teorema 5.9, juntamente com os teoremas 5.1 e 5.2, indica a existência de um sistema de tableaux para o cálculo $\mathbf{NAL_2}$, no qual as fórmulas excluídas são precisamente os literais de $\mathbf{NAL_2}$, e onde o critério de fechamento só depende de tais fórmulas.

O teorema abaixo diz que, num certo sentido, o cálculo $\mathbf{NAL_2}$ é estritamente mais forte que o cálculo $\mathbf{N_1}$.

Teorema 5.10: Se **f** é a função definida no enunciado do teorema 3.10, então, para qualquer fórmula **A** de L, $\Gamma \vdash_{\mathbf{N_1}} \mathbf{A}$ implica em $\mathbf{f}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{f}(\mathbf{A})$.

Teorema 5.11: $\mathbf{NAL_2}$ é decidível pelas seguintes matrizes com quatro valores, onde 2 e 3 são os valores distinguidos:

A \ B	$\mathbf{A \to B}$: 0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	3	3
2	0	1	2	3
3	0	1	2	3

A \ B	$\mathbf{A \wedge B}$: 0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

A \ B	$\mathbf{A \vee B}$: 0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

A	$\mathbf{\neg A}$
0	3
1	1
2	2
3	0

A	$\mathbf{\sim A}$
0	3
1	3
2	0
3	0

Como $\mathbf{NAL_2}$ é uma extensão conservativa de $\mathbf{NAL_1}$, temos que $\mathbf{NAL_1}$ também é decidível por estas matrizes. Utilizamos a mesma heurística adotada anteriormente, com a seguinte correspondência:

A	fórmula associada
0	$\mathbf{\sim A \wedge \neg A}$
1	$\mathbf{\sim A \wedge \sim\neg A}$
2	$\mathbf{A \wedge \neg A}$
3	$\mathbf{A \wedge \sim\neg A}$

Assim, por exemplo, se **A** tiver o valor 2 e **B** tiver o valor 3, então **A v B** deverá ter o valor 3, já que $\vdash_{\mathbf{NAL_2}} (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \sim\neg\mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \sim\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$.

Definição 5.12: Dizemos que **V** é uma valoração para **NAL_1** se há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações para **CI_1** e duas funções $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ de L em {0,1}, onde $\mathbf{V} = \mathbf{V_{min}}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(5.12.1) $\mathbf{V_{min}(P)} = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v_{max}(P)} = 1$;
(5.12.2) $\mathbf{V_{max}(P)} = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v_{min}(P)} = 1$;
(5.12.3) $\mathbf{V_{min}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;
(5.12.4) $\mathbf{V_{max}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;
(5.12.5) $\mathbf{V_{min}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(5.12.6) $\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(5.12.7) $\mathbf{V_{min}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(5.12.8) $\mathbf{V_{max}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(5.12.9) $\mathbf{V_{min}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(5.12.10) $\mathbf{V_{max}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$.

Na definição acima, nem sempre $\mathbf{V_{min}(A)} \leq \mathbf{V_{max}(A)}$, dada uma fórmula **A** de L. Por exemplo, sejam $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_4}$, $\mathbf{v_5}$ e $\mathbf{v_6}$ valorações clássicas tais que $\mathbf{v_1(P)} = \mathbf{v_2(P)} = \mathbf{v_4(P)} = 0$, $\mathbf{v_3(P)} = \mathbf{v_5(P)} = \mathbf{v_6(P)} = 1$, $\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\mathbf{v_4},\mathbf{v_5},\mathbf{v_6}\}$, $\mathbf{V_1}$ a valoração para **CI_1** determinada por $\mathcal{C}_1$, $\mathbf{V_2}$ a valoração para **CI_1** determinada por $\mathcal{C}_2$, e finalmente **V** a valoração para **NAL_1** determinada por $\{\mathbf{V_1},\mathbf{V_2}\}$. Então $\mathbf{V_{max}(P)} = 0$ e $\mathbf{V_{min}(P)} = 1$, logo $\mathbf{V_{max}(p)} < \mathbf{V_{min}(p)}$.

O teorema abaixo diz que uma valoração para **NAL_1** também pode ser determinada maximizando-se sobre coleções de valorações para **PC_1**.

Teorema 5.13: **V** é uma valoração para **NAL_1** se, e somente se, há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações para **PC_1** e duas funções $\mathbf{V_{max}}$ e $\mathbf{V_{min}}$ de L em {0,1}, onde $\mathbf{V} = \mathbf{V_{max}}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(5.13.1) $\mathbf{V_{max}(P)} = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathsf{C}$ tal que $\mathbf{v_{min}(P)} = 1$;
(5.13.2) $\mathbf{V_{min}(P)} = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathsf{C}$, $\mathbf{v_{max}(P)} = 1$;
(5.13.3) $\mathbf{V_{max}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;
(5.13.4) $\mathbf{V_{min}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;
(5.13.5) $\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(5.13.6) $\mathbf{V_{min}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(5.13.7) $\mathbf{V_{max}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(5.13.8) $\mathbf{V_{min}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;
(5.13.9) $\mathbf{V_{max}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;
(5.13.10) $\mathbf{V_{min}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$.

Teorema 5.14: $\Gamma \vdash_{\mathbf{NAL_1}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{NAL_1}} \mathbf{A}$.

Definição 5.15: Dizemos que **V** é uma valoração para $\mathbf{NAL_2}$ se forem cumpridas todas as condições da definição 5.12, com $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ definidas em $\mathbf{L'}$, mais as seguintes condições adicionais:

(5.15.1) $\mathbf{V_{min}(\sim A) = 1}$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;

(5.15.2) $\mathbf{V_{max}(\sim A) = 1}$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$.

Teorema 5.16: $\Gamma \vdash_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{A}$

O teorema seguinte afirma que o cálculo $\mathbf{NAL_2}$ (e portanto o cálculo $\mathbf{NAL_1}$) admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem. Associamos a cada letra sentencial **P** um sinal predicativo **p** de aridade 2. Seja **LC** um cálculo para a lógica de predicados clássica cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 5.17: Sejam **j**, $\mathbf{j_{min}}$ e $\mathbf{j_{max}}$ funções com argumentos na coleção das fórmulas de $\mathbf{NAL_2}$, e com valores na coleção das fórmulas de **LC**, onde $\mathbf{j} = \mathbf{j_{min}}$, definidas pelas seguintes condições:

- $\mathbf{j_{min}(P)} = \forall x\, \exists y\, \mathbf{p}(x,y)$; $\mathbf{j_{max}(\sim A) = \neg j_{min}(A)}$;
- $\mathbf{j_{max}(P)} = \exists x\, \forall y\, \mathbf{p}(x,y)$; $\mathbf{j_{min}(A \# B) = j_{min}(A) \# j_{min}(B)}$, onde $\# \in \{\to,\wedge,\vee\}$;
- $\mathbf{j_{min}(\neg A) = \neg j_{max}(A)}$; $\mathbf{j_{max}(A \to B) = j_{min}(A) \to j_{max}(B)}$;
- $\mathbf{j_{max}(\neg A) = \neg j_{min}(A)}$; $\mathbf{j_{max}(A \wedge B) = j_{max}(A) \wedge j_{max}(B)}$;
- $\mathbf{j_{min}(\sim A) = \neg j_{min}(A)}$; $\mathbf{j_{max}(A \vee B) = j_{max}(A) \vee j_{max}(B)}$.

Então, para qualquer fórmula **A** de $\mathbf{NAL_2}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{A}$ **sss** $\mathbf{j}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{LC}} \mathbf{j(A)}$.

O teorema 5.18 diz que o cálculo $\mathbf{NAL_2}$ (e portanto o cálculo $\mathbf{NAL_1}$) admite ainda uma outra interpretação alternativa na lógica clássica de primeira ordem.

Teorema 5.18: Sejam **k**, $\mathbf{k_{max}}$ e $\mathbf{k_{min}}$ funções com argumentos na coleção das fórmulas de $\mathbf{NAL_2}$, e com valores na coleção das fórmulas de **LC**, onde $\mathbf{k} = \mathbf{k_{max}}$, definidas pelas seguintes condições:

- $\mathbf{k_{max}(P)} = \exists x\, \forall y\, \mathbf{p}(x,y)$; $\mathbf{k_{min}(\sim A) = \neg k_{max}(A)}$;
- $\mathbf{k_{min}(P)} = \forall x\, \exists y\, \mathbf{p}(x,y)$; $\mathbf{k_{max}(A \# B) = k_{max}(A) \# k_{max}(B)}$, onde $\# \in \{\to,\wedge,\vee\}$;
- $\mathbf{k_{max}(\neg A) = \neg k_{min}(A)}$; $\mathbf{k_{min}(A \to B) = k_{max}(A) \to k_{min}(B)}$;
- $\mathbf{k_{min}(\neg A) = \neg k_{max}(A)}$; $\mathbf{k_{min}(A \wedge B) = k_{min}(A) \wedge k_{min}(B)}$;
- $\mathbf{k_{max}(\sim A) = \neg k_{max}(A)}$; $\mathbf{k_{min}(A \vee B) = k_{min}(A) \vee k_{min}(B)}$.

Então, para qualquer fórmula **A** de $\mathbf{NAL_2}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{NAL_2}} \mathbf{A}$ **sss** $\mathbf{k}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{LC}} \mathbf{k(A)}$.

Definimos a seguir uma semântica com interface para a lógica não alética, tendo uma motivação análoga à adotada na construção das semânticas para os cálculos $\mathbf{CI_3}$, $\mathbf{CI_4}$ e $\mathbf{PC_2}$.

<u>Definição 5.19</u>: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{NAL_3}$ se há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações para $\mathbf{CI_1}$ e duas funções $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ tal que $\mathbf{V}$, $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ são funções de L em $\{0,1\}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(5.19.1) $\mathbf{V(P) = V_{min}(P)}$;

(5.19.2) $\mathbf{V_{min}(P)} = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v_{max}(P)} = 1$;

(5.19.3) $\mathbf{V_{max}(P)} = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v_{min}(P)} = 1$;

(5.19.4) $\mathbf{V(\neg A) = V_{min}(\neg A)}$;

(5.19.5) $\mathbf{V_{min}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;

(5.19.6) $\mathbf{V_{max}(\neg A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$;

(5.19.7) $\mathbf{V(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 0$ ou $\mathbf{V(B)} = 1$;

(5.19.8) $\mathbf{V_{min}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(5.19.9) $\mathbf{V_{max}(A \to B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(5.19.10) $\mathbf{V(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 1$ e $\mathbf{V(B)} = 1$;

(5.19.11) $\mathbf{V_{min}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(5.19.12) $\mathbf{V_{max}(A \wedge B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ e $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$;

(5.19.13) $\mathbf{V(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 1$ ou $\mathbf{V(B)} = 1$;

(5.19.14) $\mathbf{V_{min}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{min}(B)} = 1$;

(5.19.15) $\mathbf{V_{max}(A \vee B)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 1$ ou $\mathbf{V_{max}(B)} = 1$.

<u>Definição 5.20</u>: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma valoração para $\mathbf{NAL_4}$ se forem cumpridas todas as condições da definição anterior, com $\mathbf{V}$, $\mathbf{V_{min}}$ e $\mathbf{V_{max}}$ definidas em L', mais as seguintes condições adicionais:

(5.20.1) $\mathbf{V({\sim}A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V(A)} = 0$;

(5.20.2) $\mathbf{V_{min}({\sim}A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{max}(A)} = 0$;

(5.20.3) $\mathbf{V_{max}({\sim}A)} = 1$ **sss** $\mathbf{V_{min}(A)} = 0$.

A linguagem de $\mathbf{NAL_3}$ é L. Os postulados de $\mathbf{NAL_3}$ são dados abaixo:

(i) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$;

(ii) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathsf{C})$;

(iii) $\dfrac{\mathbf{A}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;

(iv) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$;

(v) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$;

(vi) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$;

(vii) $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(viii) $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;

(ix) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathsf{C}) \rightarrow (\mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C}) \rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \rightarrow \mathsf{C})$;

(x) $((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{A}$;

(xi) $\neg(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xii) $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;

(xiii) $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;

(xiv) $\neg\neg\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\mathbf{A}$;

(xv) $\neg\neg(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$;

(xvi) $\neg\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \wedge \neg\neg\mathbf{B}$;

(xvii) $\neg\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A} \vee \neg\neg\mathbf{B}$.

A linguagem de $\mathbf{NAL_4}$ é L', e os postulados de $\mathbf{NAL_4}$ são todos os postulados de $\mathbf{NAL_3}$, expressos em L', menos o postulado (x), o qual em $\mathbf{NAL_4}$ é um teorema, mais os seguintes esquemas:

(xviii) $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow {\sim}\mathbf{B}) \rightarrow {\sim}\mathbf{A}$;

(xix) ${\sim}{\sim}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$;

(xx) $\neg{\sim}\mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A}$.

Note que os postulados de $\mathbf{NAL_3}$ e $\mathbf{NAL_4}$ divergem dos postulados de $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_2}$ quanto ao tratamento de negações de fórmulas compostas e da dupla negação.

3. O Cálculo CIE

O cálculo **CIE** (esta sigla abrevia a expressão “cálculo para a inconsistência epistêmica”) foi obtido por um refinamento da base monotônica da lógica **IDL**, apresentada em [20]. Ele é paraconsistente e se destina a dar suporte a formas de raciocínio combinando certeza e plausibilidade. O conhecimento supostamente seguro e irrevogável, representando a certeza, possui dados não contestáveis, obtidos em geral a partir de teorias científicas consagradas, de percepções incontestáveis ou do conhecimento tradicional aceito universalmente. O conhecimento plausível provém de informações apresentando em geral um forte grau de evidência, mas que podem estar sujeitas a falhas e até a serem explicitamente contestadas.

A questão que abordamos no presente capítulo é a seguinte: dada uma base de conhecimento contendo tanto dados seguros como dados apenas plausíveis, como devemos fazer para derivar de forma simples mais conhecimento, tanto seguro como plausível?

Um obstáculo que parece surgir no tratamento desta questão é que o conhecimento apenas plausível mas não seguro está aberto a contradições. Tal fato é freqüente na própria evolução do conhecimento científico. A partir de dados obtidos de observações rigorosas os cientistas imaginam diversos tipos de explicações, as quais, depois de passarem por muitas elaborações, acabam se transformando em um corpo de doutrinas ou teorias científicas. Muitas vezes tais teorias se contradizem entre si ou com uma parte do conhecimento empírico. Em raciocínios refletindo o senso comum a ocorrência de contradições também é muito freqüente, conforme já vimos no primeiro capítulo.

Uma solução para evitar tais contradições consiste em trabalhar com um n∨mero freqüentemente indefinido de extensões consistentes, obtidas a partir da parte segura da base de conhecimento, aplicando regras de defaults (veja [24] e [25]).

Em [20] Pequeno sugere rotular o conhecimento apenas plausível com uma nova modalidade, separando-o assim operacionalmente do conhecimento seguro. Tal prática permite uma abordagem unificada de todo o conhecimento, tanto seguro quanto plausível. Com a nova notação, expressamos, por exemplo, que “**B** é plausível” escrevendo-se “**B?**”, e as regras de defaults surgem, por exemplo, pela forma “$\frac{\mathbf{A}\ :\ \mathbf{B}}{\mathbf{B?}}$”. As possíveis contradições obtidas ficam assim restritas à forma “$\mathbf{B?} \wedge \neg(\mathbf{B?})$”, ficando assim encapsuladas e não podendo se propagar, conforme veremos adiante. Uma apresentação mais detalhada acerca da importância de **CIE** para o raciocínio por defaults é dada em [21].

Não abordaremos neste trabalho a parte não monotônica do raciocínio. Tratamos aqui da questão de como obter a maior quantidade possível de informação usando apenas formas de raciocínio monotônico, partindo tanto de dados irrevogáveis como de dados plausíveis. Também não abordaremos aqui o tratamento dos quantificadores, já que este não apresenta nenhuma dificuldade adicional, pois as extensões para a lógica de primeira ordem de todos os cálculos apresentados neste trabalho são naturais.

A linguagem de **CIE** é $\mathsf{L} \cup \{?\}$.

As letras gregas minúsculas α, β, e γ representam fórmulas arbitrárias (com ou sem "?") de **CIE**, e, no restante deste capítulo, as letras maiúsculas latinas **A**, **B**, **C** representam fórmulas de **CIE** não contendo "?". Lembramos que todas as convenções, já estabelecidas no segundo capítulo deste trabalho, continuam valendo.

Sendo a uma fórmula arbitrária de **CIE** e **P** uma letra sentencial de L escolhida arbitrariamente, abreviaremos, no resto deste capítulo, "$\alpha \to \mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{P}$" por "$\sim\alpha$".

Abaixo damos os postulados de **CIE**:

(i) $\alpha \to \beta \to \alpha$;

(ii) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$;

(iii) $\dfrac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$;

(iv) $\alpha \wedge \beta \to \alpha$;

(v) $\alpha \wedge \beta \to \beta$;

(vi) $\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$;

(vii) $\alpha \to \alpha \vee \beta$;

(viii) $\beta \to \alpha \vee \beta$;

(ix) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$;

(x) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$;

(xi) $(\alpha \to \mathbf{B}) \to (\alpha \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\alpha$;

(xii) $\neg(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$;

(xiii) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$;

(xiv) $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$;

(xv) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$;

(xvi) $(\alpha? \to \beta?)? \to (\alpha? \to \beta?)$;

(xvii) $(\alpha \vee \beta)? \to \alpha? \vee \beta?$;

(xviii) $(\neg\alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)$;

(xix) $\alpha \to \alpha?$;

(xx) $\alpha?? \to \alpha?$;

(xxi) $\dfrac{\alpha \to \beta}{\overline{\alpha? \to \beta?}}$;

(xxii) $\dfrac{\alpha}{\overline{\sim((\sim\alpha)?)}}$.

Temos que os postulados (iii), (xxi) e (xxii) de **CIE** são regras de inferência. A diferença entre a regra (iii) e as outras duas é que esta também vale em forma de implicação, isto é, "$\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$" é teorema de **CIE**. Conforme veremos abaixo, não podemos reescrever as duas últimas regras do mesmo modo. Para enfatizar este fato, o qual foi muito importante no processo de definição do cálculo, colocamos apenas uma barra para separar a hipótese da conclusão na regra (iii), e duas barras nas demais. Usaremos também esta notação sempre que enunciarmos regras derivadas de **CIE**. Esta distinção é de importância fundamental para indicar se o uso de certas regras, derivadas ou não, afeta eventuais aplicações do teorema da dedução, o qual será enunciado adiante.

Construímos o cálculo **CIE** a partir do cálculo **IDL**, procurando associá-lo a uma semântica recursiva que refletisse a nossa intuição acerca do conhecimento plausível, bem como evitando diversos paradoxos que encontramos em versões iniciais deste cálculo. Consideramos indesejável a derivação de algum dos esquemas ou regras dadas abaixo (citamos estes porque foram os que mais encontramos):

- $\alpha? \rightarrow \alpha$; $\qquad \alpha? \rightarrow (\sim\alpha)? \rightarrow \beta?$;
- $\dfrac{\alpha?}{\alpha}$; $\qquad \dfrac{\alpha?, (\sim\alpha)?}{\beta?}$.

Uma regra da forma "α / β" é mais fraca que um esquema do tipo "$\alpha \rightarrow \beta$". Do ponto de vista do cálculo, tal regra não garante que haja um teorema da dedução que permita usá-la de modo irrestrito no escopo de alguma dedução. Do ponto de vista de uma semântica de valorações, esta regra significa que toda valoração que satisfaz α também satisfaz β; enquanto que o esquema citado significa que toda valoração satisfaz $\alpha \rightarrow \beta$. Conforme a semântica que definimos para **CIE**, o segundo significado acarreta o primeiro significado, mas não vale a recíproca.

A axiomática de **CIE** referente à negação foi feita levando em conta as axiomáticas dos cálculos $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{C_1}$. Os esquemas (xii) a (xv) de **CIE** são análogos aos esquemas (xi) a (xiv) de $\mathbf{CI_1}$, e o esquema (xi) de **CIE** foi inspirado no esquema "$\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{B}) \rightarrow \neg\mathbf{A}$" do cálculo $\mathbf{C_1}$.

Faremos a seguir uma análise da axiomática de **CIE**.

O teorema abaixo diz por que o conectivo "?" não pode ser distributivo em relação à implicação.

<u>Teorema 6.1</u>: Em **CIE**, a regra "$\alpha?, (\alpha \rightarrow \beta)? / \beta?$" acarreta a regra "$\alpha?, (\sim\alpha)? / \beta?$" (em particular, a regra "$\mathbf{A}?, (\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B})? / \mathbf{B}?$" acarreta a regra $\mathbf{A}?, (\neg\mathbf{A})? / \mathbf{B}?$), isto é, se juntarmos a **CIE** a primeira regra, então a segunda regra é derivada no novo cálculo obtido.

O teorema abaixo afirma que o conectivo "?" não pode fatorar com respeito à conjunção.

<u>Teorema 6.2</u>: Em **CIE**, a regra "$\alpha?, \beta? / (\alpha \wedge \beta)?$" acarreta a regra "$\alpha?, (\sim\alpha)? / \beta?$" (em particular, a regra "$\mathbf{A}?, \mathbf{B}? / (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})?$" acarreta a regra "$\mathbf{A}?, (\neg\mathbf{A})? / \mathbf{B}?$)".

Teorema 6.3: Em **CIE**, as regras "$\alpha?, (\alpha \to \beta)? / \beta?$" e "$\alpha?, \beta? / (\alpha \wedge \beta)?$" são equivalentes, isto é, se acrescentarmos uma delas a **CIE**, então a outra regra pode ser derivada no novo cálculo obtido. Da mesma forma, os esquemas "$(\alpha \to \beta)? \to (\alpha? \to \beta?)$" e "$\alpha? \wedge \beta? \to (\alpha \wedge \beta)?$" são equivalentes em **CIE**.

O esquema (xvi) é um caso particular de um teorema mais geral sobre **CIE** que será formulado mais adiante: o conectivo "?" pode ser descartado em fórmulas nas quais todos os componentes estão sob o escopo de "?".

O esquema (xvii) diz que o conectivo "?" é distributivo com respeito à disjunção.

O esquema (xviii) diz que o conectivo "?" fatora e distribui com respeito à negação.

O esquema (xix) diz basicamente que todo conhecimento irrefutável é em particular plausível.

O esquema (xx) destina-se a evitar o acúmulo de sinais de "?", identificando, junto com o esquema (xix), fórmulas das formas "$\alpha?$" e "$\alpha??$".

A regra (xxi) diz que, se tivermos uma implicação da forma "$\alpha \to \beta$", então a plausibilidade de α acarreta a plausibilidade de β. Este tipo de raciocínio é uma das principais formas de propagação do conectivo "?" em uma inferência.

O teorema seguinte diz por que a regra (xxi) não pode ser uma implicação.

Teorema 6.4: Em **CIE**, o esquema "$(\alpha \to \beta) \to (\alpha? \to \beta?)$" acarreta o esquema "$\alpha? \to \alpha$".

A regra (xxii) diz que não podemos simultaneamente estar seguros de uma informação α e considerar que a sua negação clássica é plausível, ou seja, toda teoria baseada em **CIE** que tiver como teoremas tanto α como $(\sim\alpha)?$ é trivial. Em particular, levando-se em conta também os outros esquemas de **CIE**, toda teoria que tiver como teoremas tanto $\mathbf{A}$ como $(\neg\mathbf{A})?$ é trivial. Esta regra diz, em outras palavras, que devemos descartar todo o conhecimento plausível já adquirido na presença de novas informações comprovadas, se estas contradizerem tal conhecimento.

O teorema seguinte diz por que a regra (xxii) não pode ser uma implicação.

Teorema 6.5: Em **CIE**, o esquema $\alpha \to \sim((\sim\alpha)?)$ acarreta o esquema $\alpha? \to \alpha$ (em particular, o esquema $\mathbf{A} \to \sim((\neg\mathbf{A})?)$ acarreta o esquema $\mathbf{A}? \to \mathbf{A}$).

Teorema 6.6: Todos os teoremas clássicos valem para fórmulas que não possuem "?". Em particular, os seguintes esquemas são teoremas de **CIE**:

- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to (\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A}$; $\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

Teorema 6.7: O sinal definido "~" funciona em **CIE** como a negação clássica, isto é, os seguintes esquemas são teoremas de **CIE**:

- $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to {\sim}\beta) \to {\sim}\alpha$; $\qquad {\sim}{\sim}\alpha \to \alpha$.

Teorema 6.8: Em **CIE** valem todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos "$\wedge$" e "$\vee$".

Teorema 6.9: Entre outros, os seguintes esquemas e regras valem em **CIE**:

- $\alpha, \alpha \to \beta \,/\, \beta$; $\qquad \neg\mathbf{A} \leftrightarrow {\sim}\mathbf{A}$;
- $\alpha,\ \beta \,/\, \alpha \wedge \beta$; $\qquad (\neg\mathbf{A})? \leftrightarrow ({\sim}\mathbf{A})?$;
- $\alpha \wedge \beta \,/\, \alpha$; $\qquad (\alpha \vee \beta)? \leftrightarrow \alpha? \vee \beta?$;
- $\alpha \wedge \beta/ \beta$; $\qquad (\neg\alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)$;
- $\alpha \,/\, \alpha \vee \beta$; $\qquad (\alpha? \to \beta?) \to (\alpha \to \beta)?$;
- $\beta \,/\, \alpha \vee \beta$; $\qquad \alpha \,//\, (\alpha \to \beta)? \to \beta?$;
- $\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \,/\, \gamma$; $\qquad (\alpha \wedge \beta)? \to \alpha? \wedge \beta?$;
- $\alpha \vee \neg\alpha$; $\qquad \alpha \,//\, \beta? \to (\alpha \wedge \beta)?$.
- $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$;

Teorema 6.10: Entre outros, os seguintes esquemas e regras não valem em **CIE**:

- $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$; $\qquad (\alpha \to \beta)? \,/\, \alpha \to \beta?$;
- $\alpha?, ({\sim}\alpha)? \,/\, \beta?$; $\qquad (\alpha \to \beta?) \to (\alpha \to \beta)?$;
- $\mathbf{A}?, (\neg\mathbf{A})? \,/\, \mathbf{B}?$; $\qquad \alpha?, \beta? \,/\, (\alpha \wedge \beta)?$;
- $\alpha? \,/\, \alpha$; $\qquad \beta? \,/\, \alpha \to (\alpha \wedge \beta)?$;
- $\alpha?, (\alpha \to \beta)? \,/\, \beta?$;

O teorema abaixo estabelece que a equivalência forte é preservada na composição de fórmulas.

Teorema 6.11: Seja α' uma fórmula obtida de α substituindo algumas ocorrências de β por β'. Temos então que $\Gamma \vdash_{\mathbf{CIE}} \beta \Leftrightarrow \beta'$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{CIE}} \alpha \Leftrightarrow \alpha'$.

Definição 6.12: Dizemos que uma fórmula de **CIE** é ?-*fechada* se esta for de uma das formas "$\alpha?$", "$\neg\beta$", "${\sim}\beta$" ou "$\beta \# \gamma$", onde β e γ são ?-fechadas e $\# \in \{\to, \wedge, \vee\}$.

O teorema seguinte generaliza o que está estabelecido nos esquemas (xvi) e (xx).

Teorema 6.13: Se α é uma fórmula ?-fechada de **CIE**, então $\vdash_{\mathbf{CIE}} \alpha \Leftrightarrow \alpha?$.

A proposição seguinte estabelece um teorema da dedução restrito, levando em conta α existência de regras de inferência fracas, tais como as regras (xxi) e (xxii).

Teorema 6.14: Se existe uma dedução de β em **CIE** a partir de Γ e α,

então $\Gamma \vdash_{\mathbf{CIE}} \alpha \rightarrow \beta$, a menos que α não seja fórmula fechada e as regras (xxi) ou (xxii) sejam usadas depois da primeira ocorrência em que α seja justificada como sendo uma premissa.

O teorema seguinte assevera que as subfórmulas atômicas de uma fórmula de $\mathbf{CI_2}$ (e portanto de $\mathbf{CI_1}$) são tratadas em **CIE** como fórmulas apenas plausíveis.

Teorema 6.15: Seja **f** uma função com argumentos na coleção das fórmulas de $\mathbf{CI_2}$ e com valores na coleção das fórmulas de **CIE**, definida pelas seguintes condições:

$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}?$; $\mathbf{f}(\sim\mathbf{A}) = \sim\mathbf{f}(\mathbf{A})$;

$\mathbf{f}(\neg A) = \neg\mathbf{f}(\mathbf{A})$; $\mathbf{f}(\mathbf{A} \# \mathbf{B}) = \mathbf{f}(\mathbf{A}) \# f(\mathbf{B})$, onde $\# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.

Então, para qualquer fórmula **A** de $\mathbf{CI_2}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{CI_2}} \mathbf{A}$ **sss** $\mathbf{f}(\Gamma) \vdash_{\mathbf{CIE}} \mathbf{f}(\mathbf{A})$.

A semântica que propomos para **CIE** foi inspirada no significado que intuímos para fórmulas de uma das formas **A** ou **A**?. Todas as demais fórmulas de **CIE** podem ser obtidas por construção a partir destes dois tipos básicos. Conforme vimos acima, as fórmulas que não contém "?" devem ser tratadas de modo clássico, e aquelas que estão sob o escopo deste sinal devem ser tratadas de um modo paraconsistente. Existem infinitas combinações destes dois tipos, como por exemplo fórmulas da forma $\mathbf{A}? \wedge \mathbf{B}? \rightarrow \mathbf{D}$; neste caso a fórmula toda não está sob o escopo de uma mesma ocorrência de "?", e apenas as subfórmulas **A** e **B** estão sob o escopo de ocorrências distintas de "?". Uma explicação recursiva das fórmulas da linguagem de **CIE** pode cobrir todos estes casos sem maiores problemas. Uma valoração para **CIE** é definida a partir de uma coleção não vazia de valorações clássicas. Fórmulas que não contém "?" são verdadeiras sob esta valoração se elas o forem para todas as valorações clássicas da coleção dada. Fórmulas da forma "**A**?" são verdadeiras sob esta valoração se **A** o for para alguma valoração da coleção dada. Note que é dado um tratamento global para cada ocorrência de "?", pois com um tratamento local diversos postulados correntes de **CIE** não se verificariam, e o conectivo "?" iria fatorar e distribuir com respeito a todos os conectivos da linguagem, o que já vimos que é bastante inconveniente. Chamamos de tratamento local uma explicação tal como a seguinte (onde **V** é uma valoração para **CIE** definida a partir de uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações clássicas):

$\mathbf{V}((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})?) = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v}(\mathbf{P}) = 1$ e existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v}(\mathbf{Q}) = 1$.

Segundo tal explicação, teríamos "$\mathbf{P}? \wedge \mathbf{Q}? \rightarrow (\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})?$" sendo uma fórmula válida, o que não é desejável, pelas razões que já vimos anteriormente. Em contrapartida, o tratamento global dá a seguinte interpretação para a mesma fórmula:

$\mathbf{V}((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})?) = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v}(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) = 1$.

Verificamos que uma semântica que dá um tratamento global para as fórmulas que estão sob o escopo de "?" satisfaz todos os postulados de **CIE**, bem como evita todas as relações inconvenientes que já vimos acima. Em suma, a semântica que adotamos para **CIE** é uma semântica de maximização, com um tratamento global para fórmulas que estão sob o escopo de "?".

<u>Definição 6.16</u>: Dizemos que **V** é uma valoração para **CIE** se **V** é uma função definida na linguagem de **CIE** tomando como valores 0 ou 1 e há uma coleção $\mathcal{C}$ não vazia de valorações clássicas e uma função que associa a cada $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ um par $\langle \mathbf{v_{max}}, \mathbf{v_{min}} \rangle$, onde $\mathbf{v_{max}}$ e $\mathbf{v_{min}}$ são também duas funções definidas na linguagem de **CIE** tomando como valores 0 ou 1, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(6.16.1) $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 1$;
(6.16.2) $\mathbf{v_{max}}(\mathbf{p}) = \mathbf{v_{min}}(\mathbf{p}) = \mathbf{v}(\mathbf{p})$;
(6.16.3) $\mathbf{v_{max}}(\neg\alpha) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{min}}(\alpha) = 0$;
(6.16.4) $\mathbf{v_{min}}(\neg\alpha) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 0$;
(6.16.5) $\mathbf{v_{max}}(\alpha?) = 1$ **sss** existe $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 1$;
(6.16.6) $\mathbf{v_{min}}(\alpha?) = 1$ **sss** para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$, $\mathbf{v_{min}}(\alpha) = 1$;
(6.16.7) $\mathbf{v_{max}}(\alpha \to \beta) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{v_{min}}(\beta) = 1$;
(6.16.8) $\mathbf{v_{min}}(\alpha \to \beta) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 0$ ou $v_{min}(\beta) = 1$;
(6.16.9) $\mathbf{v_{max}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{v_{max}}(\beta) = 1$;
(6.16.10) $\mathbf{v_{min}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{min}}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{v_{min}}(\beta) = 1$;
(6.16.11) $\mathbf{v_{max}}(\alpha \vee \beta) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{max}}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{v_{max}}(\beta) = 1$;
(6.16.12) $\mathbf{v_{min}}(\alpha \vee \beta) = 1$ **sss** $\mathbf{v_{min}}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{v_{min}}(\beta) = 1$.

Segundo α definição acima, temos que, para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{C}$ e para toda fórmula α de **CIE**, $\mathbf{v_{min}}(\alpha) \leq \mathbf{v_{max}}(\alpha)$.

<u>Teorema 6.17</u>: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CIE}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{CIE}} \mathbf{A}$.

Abaixo estabelecemos que, sob hipóteses razoáveis, não há mais consequências semânticas da parte irrefutável de uma coleção dada de fórmulas de **CIE** além das conseqüências semânticas clássicas. Chamamos uma coleção Γ de fórmulas de **CIE** de *normal* se ela satisfaz certas hipóteses razoáveis. Consideremos **P**, **Q**, **R** letras sentenciais distintas e **LPC** a lógica proposicional clássica. Se $\Gamma = \{\mathbf{P}, (\neg\mathbf{P})?\}$, temos que não é verdade que $\mathbf{P} \models_{\mathbf{LPC}} \mathbf{Q}$, mas $\Gamma \models_{\mathbf{CIE}} \mathbf{Q}$, por isso requeremos que uma coleção normal seja não trivial. Se $\Gamma = \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}?, \mathbf{Q}? \to \mathbf{R}\}$, temos que não é verdade que $\mathbf{P} \models_{\mathbf{LPC}} \mathbf{R}$, mas $\Gamma \models_{\mathbf{CIE}} \mathbf{R}$, por isso não permitimos que, dentre outras fórmulas, aquelas que sejam do tipo "$\mathbf{A}? \to \mathbf{B}$" pertençam a uma coleção normal.

Definição 6.18: Dizemos que uma coleção Γ de fórmulas de **CIE** é *normal* se Γ não é trivial e, para toda fórmula α de Γ, α é de uma das formas "**B**" ou "**B**?".

Teorema 6.19: Sejam **LPC** a lógica proposicional clássica, Γ uma coleção normal de fórmulas de **CIE** e Γ a coleção de todas as fórmulas de Γ não possuindo "?".
Então $\Gamma \models_{\mathbf{CIE}} \mathbf{A}$ **sss** $\Gamma \models_{\mathbf{LPC}} \mathbf{A}$.

O cálculo **CIE** admite uma interpretação na lógica clássica de primeira ordem. Para cada letra sentencial **P** da linguagem de **CIE** associamos um sinal predicativo **p** de aridade 1. Seja **LC** um cálculo para a lógica clássica aberta de predicados (tal como em Shoenfield [27]), cuja linguagem possui os sinais predicativos citados.

Teorema 6.20: Sejam $\mathbf{l}$, $\mathbf{l_{max}}$ e $\mathbf{l_{min}}$ funções com argumentos na linguagem de **CIE** e com valores na linguagem de **LC**, onde $\mathbf{l} = \mathbf{l_{max}}$, definidas pelas seguintes condições:

- $\mathbf{l_{max}}(\mathbf{P}) = \mathrm{l_{min}}(\mathbf{P}) = \mathbf{p}\boldsymbol{x}$; $\mathbf{l_{max}}(\alpha \# \beta) = \mathbf{l_{max}}(\alpha) \# \mathbf{l_{max}}(\beta)$, onde $\# \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$;
- $\mathbf{l_{max}}(\neg\alpha) = \neg\mathbf{l_{min}}(\alpha)$; $\mathbf{l_{min}}(\alpha \rightarrow \beta) = \mathbf{l_{max}}(\alpha) \rightarrow \mathbf{l_{min}}(\beta)$;
- $\mathbf{l_{min}}(\neg\alpha) = \neg\mathbf{l_{max}}(\alpha)$; $\mathbf{l_{min}}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{l_{min}}(\alpha) \wedge \mathbf{l_{min}}(\beta)$;
- $\mathbf{l_{max}}(\alpha?) = \exists \boldsymbol{x}\, \mathrm{l_{max}}(\alpha)$; $\mathbf{l_{min}}(\alpha \vee \beta) = \mathbf{l_{min}}(\alpha) \vee \mathbf{l_{min}}(\beta)$.
- $\mathbf{l_{min}}(\alpha?) = \forall \boldsymbol{x}\, \mathbf{l_{min}}(\alpha)$;

Então, para qualquer fórmula **A** de **CIE**, $\Gamma \models_{\mathbf{CIE}} \mathbf{A}$ **sss** $\mathbf{l}(\Gamma) \models_{\mathbf{LC}} \mathbf{l}(\mathbf{A})$.

4. Conclusões

Definimos uma classe de lógicas paraconsistentes e/ou paracompletas dotadas de semânticas recursivas. As explicações semânticas que adotamos para as lógicas aqui apresentadas são bastante naturais, bem como dão uma idéia razoável para alguns dos possíveis ambientes de aplicação.

Encontramos uma solução para certas críticas feitas aos sistemas paraconsistentes $\mathbf{C_n}$ de da Costa, nas quais é dito que a explicação dos conectivos é muito artificial e presa a particularidades lógico-formais, e que a semântica para estes sistemas não apresenta recursividade (a este respeito, veja [22], pp. 115-121, [23], pp. 162-168, e [12], pp. 18-19).

"The first objection is that condition (4)[1] of da Costa semantics is ill-motivated. (4) appears to follow from (3)[2]. (It does not, since otherwise it would be redundant.) The argument gets by reading '$\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A})=1$' as 'It is not the case that $\neg\mathbf{A}$' and then supposing that the latter means $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A})=0$. This is a fallacy of equivocation since the inference from $\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A})=1$ to $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A})=0$ is invalid even in da Costa's terms.

"Without this argument, the motivation for condition (4) is totally obscure on this approach. If the truth values of $\mathbf{A}$, $\neg\mathbf{A}$, and $\neg\neg\mathbf{A}$ are independent enough to let all be true, why shouldn't they be independent enough to let the first be false and the last be true? Compare this with the next approach we deal with, where the connection in true-value between a sentence and its negation falls, quite naturally, out of the motivating considerations. Of course condition (4) could be dropped from da Costa's semantics. However in that case, negation would have virtually none of the properties traditionally associated with negation. (It has few enough anyway.). This would strengthen our subsequent argument that da Costa's negation is not really negation at all.

"The second objection to da Costa semantics is that they are non-recursive. Now whilst non-recursive semantics may be admirable for many technical purposes, there are good reasons for not being philosophically satisfied with them. The arguments are well known but the crucial point is something like this: since speakers of a language are able to understand sentences they have never heard before, the sense of meaning of a sentence must be determined by the senses of its components. In particular, then, an adequate semantics must specify recursively the meaning of a sentence in terms of the meaning of its components. Thus generally speaking the specification of semantic conditions must be recursive." ([22], pg. 116)

Os cálculos $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_2}$ vistos aqui são uma evolução do cálculo $\mathbf{C_1}$ no sentido de que tratam a paraconsistência de um modo análogo, mas possuem uma semântica recursiva, bem como uma interpretação bem intuitiva com respeito ao significado paraconsistente dos

[1]A condição (4) diz que, se $\mathbf{v}$ é uma valoração para $\mathbf{C_n}$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$ implica em $\mathbf{v}(\neg\neg\mathbf{A}) = 0$.

[2]A condição (3) diz que, se $\mathbf{v}$ é uma valoração para $\mathbf{C_n}$, então $\mathbf{v}(\mathbf{A}) = 0$ implica em $\mathbf{v}(\neg\mathbf{A}) = 1$.

conectivos lógicos, sem violarem os principais pressupostos filosóficos assumidos na sua elaboração. Na realidade, pode-se dizer que implementamos melhor a aproximação maximal com a lógica clássica advogada por da Costa [8]. Os cálculos $\mathbf{CI_3}$ e $\mathbf{CI_4}$ são variantes dos cálculos $\mathbf{CI_1}$ e $\mathbf{CI_2}$, onde é mostrada uma possibilidade semântica alternativa.

Críticas análogas poderiam ser feitas aos cálculos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{N_1}$ de da Costa. Os cálculos $\mathbf{PC_1}$, $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_2}$ também são evoluções dos cálculos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{N_1}$ que superam os problemas já citados. Os cálculos $\mathbf{PC_2}$, $\mathbf{NAL_3}$ e $\mathbf{NAL_4}$ são formas alternativas para os cálculos $\mathbf{PC_1}$, $\mathbf{NAL_1}$ e $\mathbf{NAL_2}$.

O cálculo **CIE**, também dotado de uma semântica recursiva, é uma evolução da parte monotônica da lógica **IDL**, e foi elaborado para representar formas de raciocínio que combinam certeza e plausibilidade.

Referências

[1] Arruda, Ayda I., *A Survey of Paraconsistent Logic*, (em) Arruda, A. I. & da Costa, Newton C. A. & Chuaqui, R. (eds.), Mathematical Logic in Latin America, North-Holland, pp.1-41, 1980.

[2] Arruda, Ayda I., *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*, (em) Priest, Γ. & Routley, R. & Norman, J. (eds.), Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent., Philosophia Verlag, 1989.

[3] Bell, J. L. & Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.

[4] Borges, Jorge Luis, *El Jardim de Senderos que Se Bifurcam*, (em) Obras Completas, EMECE Editores, 1974.

[5] Buchsbaum, Arthur, *Um Método Automático de Prova para a Lógica Paraconsistente*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1988.

[6] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *O Método dos Tableaux Generalizado e sua Aplicação ao Raciocínio Automático em Lógicas Não Clássicas*, Revista "O que nos faz pensar" - Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio, nº 3, setembro de 1990.

[7] Chang, Chin-Liang & Lee, Richard Char-Tung, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, New York, 1973.

[8] da Costa, Newton C. A., *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic 15, pp. 497-510, 1974.

[9] da Costa, Newton C. A., *A Semantical Analysis of the Calculi* C_n, Notre Dame Journal of Formal Logic 18, pp. 621-630, 1977.

[10] da Costa, Newton C. A., *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, Editora Hucitec & Editora da Universidade de São Paulo, 1980.

[11] da Costa, Newton C. A., *The Philosophical Import of Paraconsistent Logic*, The Journal of Non-Classical Logic, vol. I, nº 1, pp. 1-19, 1982.

[12] da Costa, Newton C. A., *An Overview of the Paraconsistent Logic in the 8O's*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática nº 5, 39 pp., 1987.

[13] da Costa, Newton C. A., *Logics that are both Paraconsistent and Paracomplete*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Linzei, vol. 83, pp. 29-32, 1989.

[14] da Costa, Newton C. A. & Alves, Elias H., *Une Semantique pour le Calcul C_1*, C. R. Acad. Sc. Paris 238-A, pp. 729-731, 1977.

[15] da Costa, Newton C. A. & Marconi, Diego, *A Note on Paracomplete Logic*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Linzei, vol. 80, pp. 504-509, 1986.

[16] Hempel, Carl Γ., *Inductive Inconsistencies*, Synthese, vol. 12, pp. 439-469, 1960.

[17] Loparíc, Andréa & da Costa, Newton C. A., *Paraconsistency, Paracompleteness and Valuations*, Logique et Analyse 106, pp. 119-131, 1984.

[18] Loveland, Donald W., *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*, North-Holland, 1978.

[19] Morris, P. H., *The Anomalous Extension Problem in Default Reasoning*, Artificial Intelligence, vol. 35, nº 3, pp. 383-399, 1988.

[20] Pequeno, Tarcísio, *A Logic for Inconsistent Nonmonotonic Reasoning*, Technical Report 90/6, Department of Computing, Imperial College, London, 1990.

[21] Pequeno, Tarcísio & Buchsbaum, Arthur, *The Logic of Epistemic Inconsistency*, Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Second International Conference, editado por James Allen, Richard Fikes e Erik Sandewall, San Mateo, Califórnia, Estados Unidos, Editora: Morgan Kaufmann, pp. 453-460, 1991.

[22] Priest, Γ. & Routley, R., *On Paraconsistency*, Research Papers of the Logic Group, Research School of Social Sciences, nº 13, Australian National University, 1983.

[23] Priest, Γ. & Routley, R. & Norman, J. (eds.), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*. Philosophia Verlag, 1989.

[24] Reiter, Raymond, *A Logic for Default Reasoning* , Artificial Intelligence, vol. 13, nºs 1,2, pp. 81-132, 1980.

[25] Reiter, Raymond, *Nonmonotonic Reasoning* , Annual Reviews of Computer Science, vol. 2: pp. 147–186, 1987.

[26] Rescher, N. & Brandom, R., *The Logic of Inconsistency. A Study in Non-Standard Possible-World Semantics and Ontology*, Basil Blackwell, Oxford, 1980.

[27] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.