Uma Lógica para a Referência Ambígua

Arthur Buchsbaum e Andressa Sebben
Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Informática e Estatística,
Florianópolis, SC, Brasil, 88040-900
arthur@inf.ufsc.br, andressa@unics.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta uma lógica descritiva denominada LAR – Lógica da Referência Ambígua – visando formalizar adequadamente situações de ambigüidade e vacuidade presentes nas linguagens naturais e, implicitamente, no discurso matemático. Uma linguagem para a mesma é descrita, juntamente com uma semântica e um cálculo de seqüentes. Alguns resultados sintáticos e um teorema de eliminação das descrições são também apresentados.

Palavras chave: Inteligência Artificial, linguagem formal, lógica, Representação de Conhecimento, descrição, descritor, qualificador, ambíguo, vácuo, unívoco.

Abstract

This work presents a description logic named LAR – Logic of Ambiguous Reference – aiming to formalize suitably situations of ambiguity and vacuity arising in natural languages and, implicitly, in mathematical discourse. A language for it is described, together with a semantics and a sequent calculus. Some syntactic results and a theorem of elimination of descriptions are also provided.

Keywords: Artificial Intelligence, formal language, logic, Knowledge Representation, description, description operator, qualifier, ambiguous, vacuous, univocal.

1 Introdução

Podemos considerar a linguagem como manifestação primária da inteligência humana. Motivado pelo desenvolvimento de máquinas e programas inteligentes, o estudo das linguagens naturais em Ciência da Computação concentra-se no desenvolvimento de modelos computacionais capazes de gerar uma representação interna para o significado de cada sentença processada.

Por volta de 1900, pesquisadores como Russell e Frege, motivados pela investigação dos fundamentos do raciocínio matemático e pelo ideal de reconstruir este raciocínio através da lógica, chegaram à concepção de linguagem como sistema formal, o qual poderia ser submetido a mecanismos de processamento automático [3]. Surgiu então o conceito de referência, cuja teoria tem se desenvolvido através de linguagens formais que aproximam-se cada vez mais das linguagens naturais [17].

As lógicas com descritores, desenvolvidas como extensões da lógica de primeira ordem, surgiram da necessidade de formar termos a partir de fórmulas. Um *descritor* é um operador que, ao ser aplicado a uma variável e uma fórmula, produz um termo, tornando as ocorrências livres da variável na fórmula ligadas. Por exemplo, o operador “τ” produz um termo quando aplicado a uma fórmula P e uma variável x, ligando as ocorrências de x em seu escopo. O termo resultante, “$\tau x\, P$”, é chamado de *descrição*. Descritores são também conhecidos como *vbtos* (*variable-binding term operators*) [11].

Diversas teorias introduzem descritores para simular, em linguagens formais, o artigo definido (o/a) e o artigo indefinido (um/uma) das linguagens naturais. Russell, em sua teoria das descrições, adota o descritor por definição contextual [15, 16]. Outras abordagens, como as de Rosser [14] e Hilbert [12, 10], adotam o descritor como sinal primitivo da linguagem.

A lógica clássica de descrições formulada por Rosser [14] utiliza o descritor “ι” para representar o artigo definido. Assim, o termo $\iota x\, P$ significa, intuitivamente, “o objeto x que satisfaz P”. Se existe um e somente um objeto x satisfazendo P, o termo $\iota x\, P$ denota tal objeto. Caso contrário, se nenhum ou mais de um objeto satisfaz P, o termo

$\iota x\, P$ pode ser considerado destituído de significado, ou então ser associado a um objeto arbitrário do universo de discurso, escolhido para representar todas as descrições deste tipo. No primeiro caso, temos uma descrição *própria*. Já no segundo, a descrição é dita *imprópria* [1]. Baseado nas idéias de Rosser, da Costa [7] desenvolveu cálculos paraconsistentes de descrições.

Por outro lado, o descritor "ε", conhecido como símbolo de Hilbert, é empregado para formalizar o artigo indefinido. Uma descrição da forma $\varepsilon x\, P$ pode ser interpretada como "um objeto x que satisfaz P", e denota um objeto qualquer dentre aqueles que satisfazem a propriedade P (através de uma função-escolha), ou um objeto fixo qualquer, caso nenhum objeto satisfaça tal propriedade. Por este motivo, "ε" é também conhecido como *descritor indefinido*, pois permite referenciar um objeto do domínio sem que saibamos precisamente que objeto é esse [6].

Podemos perceber que as abordagens de Rosser [14] e Hilbert [12, 10] acima citadas não oferecem um tratamento uniforme para todos os termos. As mesmas também não oferecem um tratamento adequado para a ambigüidade, a qual ocorre freqüentemente nas linguagens naturais mais conhecidas, e implicitamente no discurso matemático. É bastante comum encontrarmos situações na matemática e na linguagem natural onde temos mais de um objeto satisfazendo determinada propriedade. Na matemática, por exemplo, denotamos uma primitiva da função $f(x) = 2x$ por $\int 2x\, dx$, apesar de haver mais de uma primitiva para esta função.

Vejamos o caso de uma integral indefinida. Dizemos que a função definida por $g(x) = x^2 + c$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, e denotamos este fato por "$\int 2x\, dx = x^2 + c$", para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Teríamos então, como possíveis exemplares,

$$\int 2x\, dx = x^2 + 1 \quad \text{e} \quad \int 2x\, dx = x^2 + 2$$

Se considerarmos as propriedades de simetria e transitividade da igualdade, temos que $x^2 + 1 = x^2 + 2$, donde chegamos à conclusão absurda de que $1 = 2$. Tal fato ocorre devido ao uso abusivo do sinal de igualdade na matemática. Sendo a igualdade uma relação de equivalência, sabemos que a mesma é simétrica, transitiva e reflexiva. Seria mais conveniente representar a situação acima exposta por uma *semi-igualdade*. Outro exemplo é dado por [18], o qual sustenta que, em matemática, não se pode definir operações com mais de um resultado, uma vez que isso acarreta paradoxos. O autor cita a expressão "$x * y = z$", onde $z > x \wedge z > y$, e "$*$" representa um operador binário. Observa-se que z pode assumir qualquer valor, desde que seja maior do que os valores de x e y. Poderíamos ter, como possíveis valores para a expressão, $2 * 3 = 8$, $2 * 3 = 9$, $2 * 3 = 10$, etc., donde poderia-se inferir que $8 = 9$, por exemplo.

Na matemática tradicional, termos não podem denotar mais de um objeto sem provocar desastres, devido à inexistência da idéia de *igualdade unidirecional*, que permite substituições apenas em um sentido, e não em ambos.

As linguagens naturais, como por exemplo a língua portuguesa, lidam com a ambigüidade de uma forma praticamente ubíqua. Nestas linguagens, em muitos casos, um substantivo precedido por um artigo indefinido é uma referência ambígua para qualquer objeto da coleção correspondente. Por exemplo, a expressão "um inteiro" não denota um número inteiro específico, mas é uma referência ambígua para qualquer número dentre a coleção dos números inteiros. Tal expressão é, portanto, um nome ambíguo para qualquer número inteiro. Ou seja, diferentemente das descrições usualmente empregadas em lógica, onde cada descrição denota um único objeto, nas linguagens informais, uma expressão pode estar associada a um conjunto de objetos. Entretanto, pelo menos quase todas as lógicas, monotônicas ou não, não trabalham com a ambigüidade, ou seja, com termos ou nomes denotando eventualmente mais de um objeto.

Este trabalho apresenta uma lógica denominada LAR (*Logic of Ambiguous Reference*), a fim de lidar com as situações descritas acima. LAR apresenta um modo diferenciado de tratar descrições, através da associação de cada termo a uma coleção de objetos do universo de discurso, em oposição às semânticas usuais, as quais associam cada termo a um único objeto [2, 4]. Dessa forma, pode-se tratar uniformemente descrições unívocas, vácuas ou ambíguas. Outra característica de destaque é o conceito de abrangência, o qual opera como uma igualdade unidirecional. Essas duas características, *descrição* e *abrangência*, permitem uma representação de conhecimento mais próxima da prática lingüística usual.

Na seção 2 deste artigo apresentamos a Lógica da Referência Ambígua, através da definição de uma linguagem, uma semântica e um cálculo de seqüentes, além de alguns resultados sintáticos básicos. Elaboramos também um teorema de eliminação de descrições, o qual permite traduzir adequadamente fórmulas expressas em LAR para a lógica clássica de primeira ordem com igualdade.

2 A Lógica da Referência Ambígua

A Lógica da Referência Ambígua (LAR) baseia-se em duas idéias chave: *descrição* e *abrangência*.

Em LAR, cada termo é associado semanticamente a uma coleção de objetos, do mesmo modo que, nas linguagens naturais, a expressão "uma flor" é associada ao conjunto das flores, apesar de, obviamente, não significar a coleção, mas sim representar ambiguamente uma flor arbitrária. Se tal conjunto for vazio, dizemos que o termo é *vácuo*, ou seja, um nome que não denota nada. Se, ao contrário, o conjunto não for vazio, o termo é dito *existencial*. Um termo *existencial* pode ainda ser *unívoco*, caso o conjunto a ele associado seja um conjunto unitário, e *ambíguo*, caso tal conjunto possua mais de um elemento. O símbolo "Υ" é adotado como operador de descrição. Uma descrição da forma $\Upsilon x\, P$ é lida "um x tal que P". Ressaltamos que um termo em LAR não é a coleção em si, e sim é associado à coleção. Por exemplo, $\Upsilon x(\text{leão}(x))$ não é a coleção de todos os leões, mas a representação ambígua de um leão qualquer. Similarmente, $\Upsilon x(x = x)$ não representa a coleção de todas as coisas, mas apenas um objeto arbitrário.

Dados dois termos em LAR, de modo que o primeiro é uma descrição que compreende mais objetos do que a segunda, representamos a *igualdade unidirecional* entre esses dois termos, ou *abrangência*, pelo símbolo "$\models$". Uma fórmula da forma $\Upsilon x\,(\text{inteiro}(x)) \models \Upsilon x\,(\text{primo}(x))$ é lida "'um x tal que x é um inteiro' *abrange* 'um x tal que x é primo'" (ou, informalmente, "'um primo' é 'um inteiro'"), ou seja, a coleção associada a $\Upsilon x\,(\text{inteiro}(x))$ contém a coleção associada a $\Upsilon x\,(\text{primo}(x))$, mas o inverso não é verdadeiro (não podemos inferir daí que "um inteiro *é* um primo"). Ou seja, abranger, em LAR, é o inverso de "ser", na língua portuguesa.

A igualdade tradicional não é adotada em LAR como conceito primitivo, mas definida a partir da abrangência. Se "$a \models b$" e "$b \models a$", ou seja, quando temos duas descrições que abrangem uma à outra, as mesmas são ditas iguais, e o sinal "$=$" é empregado para representar tal asserção.

Podemos utilizar as idéias acima expostas para formalizar corretamente o exemplo dado por [18]: "$x * y = z$", onde $z > x \wedge z > y$, e "$*$" representa um operador binário. Denotaremos z por $\Upsilon x(z > x \wedge z > y)$ (lê-se "um z tal que z é maior que x e z é maior que y"). Esta descrição está associada ao conjunto de todos os valores maiores que x e y, ou seja, é uma referência ambígua para um valor arbitrário, dentre os possíveis valores que z pode assumir. A expressão pode ser reescrita como $x * y = \Upsilon x(z > x \wedge z > y)$. Como conseqüência, $2 * 3$ não é igual a 8, e sim *abrange* 8. Temos daí que $2 * 3 \models 8$, $2 * 3 \models 9$, etc., mas não se deriva que $8 = 9$, por exemplo. Em outras palavras, se $t \models u$ e $t \models v$, não se tem que $u = v$.

De acordo com esta notação:

- $\int 2x\, dx = \Upsilon g(g$ é uma primitiva da função $f(x) = 2x)$;
- Podemos expressar o fato de que a função $g(x) = x^2 + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$ escrevendo "$\int 2x\, dx \models g$" ou "$\int 2x\, dx \models x^2 + 1$";

Ou seja, LAR quebra um paradigma da notação matemática, por permitir que termos denotem mais de um objeto ao mesmo tempo, o que as linguagens naturais, pelo menos as mais conhecidas, costumam fazer.

Esta lógica foi desenvolvida para operar o mais próximo possível da lógica clássica. Entretanto, fórmulas em que há ocorrência de descrições ambíguas ou vácuas podem apresentar deviâncias, como paraconsistência, paracompletude e não-reflexividade [8, 9]. Ou seja, fórmulas que não envolvem descrições obedecem a todas as regras de inferência da lógica clássica de primeira ordem. Por esse motivo, dizemos que LAR é uma *extensão conservativa* da lógica clássica.

A seguir, definiremos uma linguagem para LAR.

2.1 Uma Linguagem para LAR

Esta seção apresenta algumas convenções e definições sintáticas de LAR, as quais serão empregadas no restante deste trabalho.

2.1.1 Definição. Uma linguagem para LAR possui todos os símbolos de uma linguagem de primeira ordem padrão [2], exceto igualdade, mais os símbolos "$\models$" e "Υ". Isto é, tal linguagem possui os conectivos "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$" e "$\rightarrow$", os quantificadores "$\forall$" e "$\exists$", o descritor "Υ", adotado como operador de descrição, e o sinal predicativo binário "$\models$", para denotar abrangência.

2.1.2 Definição. Os termos e fórmulas de LAR são todos os termos e fórmulas de uma linguagem de primeira ordem sem igualdade, mais os seguintes:

- se x é uma variável e P é uma fórmula em LAR, então $\Upsilon x\, P$ é um termo em LAR, também chamado de *descrição*;
- se t e t' são termos em LAR, então $t \models t'$ é uma fórmula atômica em LAR.

2.1.3 Definição. Um *designador em* LAR é um termo em LAR ou uma fórmula em LAR.

2.1.4 Notação. No restante deste trabalho, utilizaremos as seguintes variáveis sintáticas, seguidas ou não de plicas e subíndices: c é uma constante; x, y, z são variáveis; f, g, h são sinais funcionais, p, q, r são sinais predicativos[1]; t, u, v são termos em LAR; P, Q, R, S, T são fórmulas em LAR; D, E, G são designadores em LAR; Γ é uma coleção de fórmulas em LAR, e Ω é uma coleção de designadores em LAR.

2.1.5 Definição. Uma ocorrência de uma variável x em um designador D é dita *ligada em D* se esta ocorrer dentro de um subdesignador de D de uma das formas $\forall x\, P$, $\exists x\, P$ ou $\Upsilon x\, P$. Uma ocorrência de uma variável em D é dita *livre em D* se não é ligada em D. Uma variável é dita *livre em D* se esta possuir pelo menos uma ocorrência livre em D.

2.1.6 Definição. Uma ocorrência de um designador D em um designador E é dita *real em E* se não suceder "$\forall$", "$\exists$" ou "Υ" em E.

2.1.7 Definição. Um designador D é dito estar no *escopo de uma variável x em* um designador E se há um subdesignador em E de uma das formas $\forall x\, P$, $\exists x\, P$ ou $\Upsilon x\, P$, tal que há uma ocorrência real de D em P; caso contrário, D é dito estar *fora do escopo de x em E*.

2.1.8 Definição. Um designador D é dito estar no *escopo de "$\models$" em* um designador E se E for da forma $u \models v$ e D possuir uma ocorrência real em um dos termos u ou v; caso contrário, D é dito estar *fora do escopo da abrangência em E*.

2.1.9 Definição. Um designador D é dito estar no *escopo de "Υ" em* um designador E se E for da forma $\Upsilon x\, P$ e D possuir uma ocorrência real em P; caso contrário, D é dito estar *fora do escopo do descritor em E*.

2.1.10 Definição. Um designador em LAR é dito *puro* se não contém ocorrência de "Υ" fora do escopo de "$\models$".

2.1.11 Definição. Uma ocorrência de um designador em um designador em LAR é dita *de topo* se a mesma é real e está fora do escopo de "Υ" e "$\models$".

2.1.12 Definição. Uma variável x é dita *de topo* em um designador D se todas as ocorrências livres de x em D são ocorrências de topo.

2.1.13 Definição. Uma fórmula que não contém nenhuma ocorrência de topo de alguma fórmula da forma "$u \models v$" é dita uma *fórmula básica*.

2.1.14 Exemplos.

- **Ocorrência livre e ligada**: Na fórmula $\forall x\,(f(x, y, z) \wedge \forall z\,(g(z)))$, a variável x é ligada, enquanto que as variáveis y e z são livres (z é ligada na subfórmula $\forall z\,(g(z))$, mas como possui outra ocorrência livre na fórmula, passa a ser livre na mesma).
- **Ocorrência real**: A primeira ocorrência de x no termo $\Upsilon x\,(x \models y)$ não é real neste termo. Já a segunda é uma ocorrência real no mesmo termo.
- **Escopo de variável**: As subfórmulas P e Q estão no escopo da variável x na fórmula $\forall x\,(P \to Q) \wedge R$. A subfórmula R está fora do escopo da variável x na mesma fórmula.
- **Escopo da abrangência**: Na fórmula $(\Upsilon x\,(\mathit{inteiro}(x)) \models \Upsilon y\,(\mathit{par}(y))) \wedge f(z, w)$, as variáveis x e y estão no escopo da abrangência. Já as variáveis z e w estão fora do escopo da abrangência na mesma fórmula.
- **Escopo do descritor**: A variável x está no escopo do descritor na fórmula $g(\Upsilon x\,(\mathit{par}(x)), y)$. A variável y está fora do escopo do descritor na mesma fórmula.
- **Fórmula pura**: A fórmula $(\Upsilon x\, P \models \Upsilon y\, Q) \wedge p(x_1, x_2)$ é pura, uma vez que todas as descrições que ocorrem nesta fórmula estão no escopo da abrangência. Já a fórmula $(\Upsilon x\, P \models \Upsilon y\, Q) \wedge p(\Upsilon x_1 P, x_2)$ não é pura, pois contém uma descrição fora do escopo da abrangência.
- **Ocorrência de topo**: Somente a primeira ocorrência de x em $f(x, y, \Upsilon x(x \models t))$ é uma ocorrência de topo.
- **Fórmula básica**: A fórmula $\text{persegue}(\Upsilon x\,(\text{cão}(x)), \Upsilon x\,(\text{gato}(x))$ é básica, pois não contém nenhuma ocorrência de topo de uma abrangência. Por outro lado, a fórmula $\Upsilon x\,(\text{cão}(x)) \models \Upsilon x\,(\text{poodle}(x))$ não é básica.

2.1.15 Convenção. Consideraremos que as variáveis estão ordenadas de acordo com a lista infinita "$x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, w_1, x_2, y_2, z_2, w_2, \ldots$". Chamamos esta ordenação de variáveis de *estândar*.

2.1.16 Definição. Denominamos *instanciação* a operação de substituição de ocorrências livres de variáveis por termos em um designador.[2] A operação de *substituição*, por outro lado, consiste em trocar ocorrências reais de designadores

[1] Sinais predicativos distintos de "$\models$".

[2] A operação de *instanciação* é fundamental para algumas leis de introdução e eliminação de quantificadores e de abrangência, pertencentes ao cálculo de seqüentes de LAR.

por designadores (ou seja, termos por termos e fórmulas por fórmulas) em um designador.[3] As cláusulas abaixo apresentam esta distinção:

- A *instanciação* de x por t em E, notada por $E(x|t)$, é o designador obtido de E substituindo-se todas as ocorrências livres de x por t, se E não possuir quantificadores nem o descritor. Se houverem quantificadores ou o descritor em E, a instanciação é definida conforme as cláusulas abaixo, onde x e y são variáveis distintas e $\Psi \in \{\forall, \exists, \Upsilon\}$:
  - $(\Psi x\, P)(x|t) = \Psi x\, P$;
  - $(\Psi y\, P)(x|t) = \begin{cases} * \ \ \Psi y\, P(x|t), \text{ se } x \text{ não é livre em } P \text{ ou } y \text{ não é livre em } t; \\ * \ \ \Psi z\, P(y|z)(x|t), \text{ se } x \text{ é livre em } P \text{ e } y \text{ é livre em } t, \text{ onde } z \text{ é a primeira variável não} \\ \quad\ \text{ocorrendo em } \{x, t, P\}. \end{cases}$
- A *substituição* de G por D em E, notada por $E(G\|D)$, é o designador obtido de E substituindo-se todas as ocorrências reais de G por D.

2.1.17 Exemplos.

- **Instanciação**:
  $P = \forall x(x \in y) \vee (x = 3)$.
  $P\,(x\,|\,z + w) = \forall x(x \in y) \vee (z + w = 3)$.
- **Substituição**:
  $P = \forall x(x \in y) \vee (x = 3)$.
  $P\,(x\,\|\,z + w) = \forall x(z + w \in y) \vee (z + w = 3)$.

2.2 Uma Semântica para LAR

A semântica de LAR é especificada através de três funções: $I_{\text{A}}, I_{\text{S}}$ e I_{N}. A função I_{A}, denominada *função-âmbito* (daí o "A" em I_{A}), associa cada termo a uma coleção, eventualmente vazia, de elementos do universo de discurso. A função I_{S}, por outro lado, é uma valoração, ou seja, associa fórmulas a valores veritativos. I_{N} é uma função auxiliar, utilizada para definir I_{S} por recursão simultânea. Os valores veritativos de LAR são 1 (um), ou *vitória* e 0 (zero), ou *derrota*. Este tipo de semântica é denominado *semântica de jogos* [5, 13], e baseia-se numa espécie de jogo imaginário entre o *sujeito* (daí o "S" em I_{S}), o qual deseja provar que uma fórmula é verdadeira, e a *natureza* (daí o "N" em I_{N}), que deseja provar que a negação da fórmula é verdadeira. Semânticas de jogos são particularmente adequadas para lógicas paraconsistentes e paracompletas.

2.2.1 Definição. Seja Δ uma coleção não vazia. Um mundo w sobre Δ é uma função cujo domínio é uma coleção de constantes, sinais funcionais e sinais predicativos atendendo às seguintes condições:

- para cada constante $c \in \mathcal{D}(w)$, $w(c) \in \Delta$[4];
- para cada sinal funcional $f \in \mathcal{D}(w)$ de aridade n, $w(f)$ é uma função de Δ^n em Δ;
- para cada sinal predicativo $p \in \mathcal{D}(w)$ de aridade n, $w(p) \subseteq \Delta^n$.

2.2.2 Definição. Uma Δ-atribuição para variáveis é uma função cujo domínio é a coleção das variáveis e cuja imagem está contida em Δ.

2.2.3 Definição. Uma LAR-interpretação I é uma tripla $I = \langle \Delta, w, s \rangle$, onde Δ é um universo de discurso, w é um mundo sobre Δ e s é uma Δ-atribuição.

2.2.4 Definição. Seja s uma Δ-atribuição para variáveis, $x_1, \ldots, x_n$ variáveis distintas e $d, d_1, \ldots, d_n$ elementos de Δ. $s(x|d)$ e $s(x_1, \ldots, x_n \,|\, d_1, \ldots, d_n)$ são Δ-atribuições para variáveis definidas por:

- $s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y), \text{ se } y \neq x; \\ d, \text{ se } y = x. \end{cases}$
- $s(x_1, \ldots, x_n \,|\, d_1, \ldots, d_n)(y) = \begin{cases} s(y), \text{ se } y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}; \\ d_i, \text{ se } y = x_i, \text{ para } \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$

2.2.5 Definição. Seja $I = \langle \Delta, w, s \rangle$ uma LAR-interpretação, $x, x_1, \ldots, x_n$ variáveis distintas e $d, d_1, \ldots, d_n \in \Delta$. Definimos:

- $I(x|d)$ é uma LAR-interpretação definida por $I(x|d) = \langle \Delta, w, s(x|d) \rangle$;
- $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)$ é uma LAR-interpretação definida por $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n) = \langle \Delta, w, s(x_1, \ldots, x_n \,|\, d_1, \ldots, d_n) \rangle$.

[3] Esta operação é essencial para a definição de leis gerais de substituição de designadores por designadores.

[4] O símbolo $\mathcal{D}$ representa o domínio da função w.

Para motivar a definição das funções I_{A}, I_{S} e I_{N}, dada a seguir, consideremos P uma fórmula básica, tal que $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis de topo distintas em P, possuindo exatamente uma ocorrência livre em P. Considere também $P(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n)$ a fórmula obtida de P instanciando-se simultaneamente $x_1, \ldots, x_n$ por $t_1, \ldots, t_n$.

Dizemos que $d_1, \ldots, d_n$ satisfaz $P(x_1, \ldots, x_n)$ se $I(x_1, \ldots, x_n|d_1, \ldots, d_n)_{\mathrm{S}}(P) = 1$, para uma dada interpretação I.

Se em I, cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$ denota pelo menos um objeto, então I_{S} associa vitória a $P(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, para cada $d_1, \ldots, d_n$ tal que $d_1, \ldots, d_n$ são respectivamente elementos do universo de discurso denotados (ambiguamente) por $t_1, \ldots, t_n$, $d_1, \ldots, d_n$ satisfizerem P. Se algum destes termos não denota nenhum objeto em I, e P é uma fórmula atômica, então $P(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n)$ é avaliado como vitória (vácua) do sujeito em I.

I_{N} comporta-se de modo complementar. Se cada um dos termos $t_1, \ldots, t_n$ denota pelo menos um objeto, então I_{N} associa vitória a $P(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n)$ se, e somente se, para todos os objetos $d_1, \ldots, d_n$ denotados por $t_1, \ldots, t_n$, $d_1, \ldots, d_n$ não satisfizerem P. Se algum destes termos não denota nenhum objeto, e P é uma fórmula atômica, então $P(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n)$ é avaliado como vitória (vácua) da natureza em I.

Dizemos que uma fórmula P é verdadeira em I se $I_{\mathrm{S}}(P) = 1$, e dizemos que uma fórmula P é falsa em I se $Is(P) = 0$.

2.2.6 Definição. Um *termo* (fórmula/designador) *em* um mundo w é um termo (fórmula/ designador) cujas constantes, sinais funcionais e sinais predicativos estão no domínio de w.

2.2.7 Definição. Seja $I = \langle \Delta, w, s \rangle$ uma LAR-interpretação, onde Δ é um universo de discurso, w é um mundo sobre Δ e s é uma Δ-atribuição para variáveis. As cláusulas abaixo especificam as funções I_{A}, I_{S} e I_{N}:
- I_{A} é uma função da coleção de termos em w para $\mathcal{P}(\Delta)$;
- I_{S}, I_{N} são funções da coleção de fórmulas em w para $\{0, 1\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(c) = \{w(c)\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(x) = \{s(x)\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \{w(f)(d_1, \ldots, d_n) \mid d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots, d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n)\}$;
- $I_{\mathrm{A}}(\Upsilon x\, P) = \{d \in \Delta \mid I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) = 1\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ sss para cada $d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots,$ para cada $d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n), \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \in w(p)$;
- $I_{\mathrm{N}}(p(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ sss para cada $d_1 \in I_{\mathrm{A}}(t_1), \ldots,$ para cada $d_n \in I_{\mathrm{A}}(t_n), \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \notin w(p)$;
- $I_{\mathrm{S}}(t \models t') = 1$ sss $I_{\mathrm{N}}(t \models t') = 0$ sss $I_{\mathrm{A}}(t) \supseteq I_{\mathrm{A}}(t')$;
- $I_{\mathrm{S}}(\neg P) = I_{\mathrm{N}}(P)$;
- $I_{\mathrm{N}}(\neg P) = I_{\mathrm{S}}(P)$;
- $I_{\mathrm{S}}(P \to Q) = \max\{I_{\mathrm{N}}(P), I_{\mathrm{S}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(P \to Q) = \min\{I_{\mathrm{S}}(P), I_{\mathrm{N}}(P)\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(P \wedge Q) = \min\{I_{\mathrm{S}}(P), I_{\mathrm{S}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(P \wedge Q) = \max\{I_{\mathrm{N}}(P), I_{\mathrm{N}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(P \vee Q) = \max\{I_{\mathrm{S}}(P), I_{\mathrm{S}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(P \vee Q) = \min\{I_{\mathrm{N}}(P), I_{\mathrm{N}}(Q)\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(\forall x\, P) = \min\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(\forall x\, P) = \max\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_{\mathrm{S}}(\exists x\, P) = \max\{I(x|d)_{\mathrm{S}}(P) \mid d \in \Delta\}$;
- $I_{\mathrm{N}}(\exists x\, P) = \min\{I(x|d)_{\mathrm{N}}(P) \mid d \in \Delta\}$.

Esta semântica reflete uma lógica não alética (uma lógica que é *paraconsistente* e *paracompleta*), isto é, uma lógica onde ambos P e $\neg P$ podem ser verdadeiros (o sujeito e a natureza podem ganhar, característica apresentada por todas as lógicas *paraconsistentes*), ou na qual ambos P e $\neg P$ podem ser falsos (a natureza e o sujeito podem perder, característica apresentada por todas as lógicas *paracompletas*). Referências para este tipo de lógica podem ser encontradas em [8, 9]. Além de ser não alética, LAR é também uma lógica *não-reflexiva*, isto é, é uma lógica onde a proposição $P \to P$ pode ser falsa.

2.2.8 Definição. Um termo t é dito *vácuo* com respeito a uma interpretação I se $I_{\mathrm{A}}(t)$ é o conjunto vazio, *existencial* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ é não vazio, *unívoco* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ é um conjunto unitário e *ambíguo* se $I_{\mathrm{A}}(t)$ contém pelo menos dois elementos.

2.2.9 Exemplos. Considerando os significados usuais atribuídos aos símbolos presentes nas expressões abaixo, damos a seguir alguns exemplos:
- Termo vácuo: $\Upsilon x\,(x \neq x)$.
- Termo ambíguo: $\Upsilon x\,(x \in \mathbb{N} \wedge x > 2)$.
- Termo unívoco: $\Upsilon x\,(x \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{par}(x) \wedge \mathrm{primo}(x))$.

2.2.10 Exemplo. Considere $p(x)$ uma fórmula atômica básica e I uma interpretação na qual os sinais "$=$" e "$\neq$" possuem seus significados usuais.

- Se t é vácuo com respeito a I, então ambas $p(t)$ e $\neg p(t)$ são verdadeiras em I, confirmando a *paraconsistência* de LAR. Por exemplo, ambas as fórmulas $p(\Upsilon x(x \neq x))$ e $\neg p(\Upsilon x(x \neq x))$ são verdadeiras.
- Se t é ambíguo com respeito a I, tal que existem d_1 e d_2 pertencendo a $I_{\mathrm{A}}(t)$, para os quais $I(x|d_1)_{\mathrm{S}}(p(x)) = 1$ e $I(x|d_2)_{\mathrm{S}}(p(x)) = 0$, então ambas $p(t)$ e $\neg p(t)$ são falsas em I, confirmando a *paracompletude* de LAR. Neste caso também acontece que a fórmula $p(t) \rightarrow p(t)$ é falsa em I, pois $I_{\mathrm{N}}(p(t)) = 0$ e $I_{\mathrm{S}}(p(t)) = 0$, confirmando a *não-reflexividade* de LAR. Por exemplo, a fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon x(x = 1 \vee x = 2))$ e sua negação são falsas, daí, a fórmula $\mathrm{par}(\Upsilon x\,(x = 1 \vee x = 2)) \rightarrow \mathrm{par}(\Upsilon x\,(x = 1 \vee x = 2))$ é também falsa.

2.2.11 Definição. I é uma interpretação para D se toda constante, sinal funcional e sinal predicativo ocorrendo em D pertence ao domínio do mundo de I.

2.2.12 Definição. I é uma interpretação para Ω se, para todo $D \in \Omega$, I é uma interpretação para D.

2.2.13 Definição. I satisfaz $P \rightleftharpoons \begin{cases} I \text{ é uma LAR-interpretação para } P, \\ I_{\mathrm{S}}(P) = 1. \end{cases}$

2.2.14 Definição. I satisfaz Γ se, para todo $P \in \Gamma$, I satisfaz P.

2.2.15 Definição. P é LAR-satisfatível se existir uma LAR-interpretação I que satisfaz P.

2.2.16 Definição. P é LAR-válido se toda LAR-interpretação para P satisfaz P.

2.2.17 Definição. Γ é LAR-satisfatível se existe uma LAR-interpretação que satisfaz Γ.

2.2.18 Definição. P é uma LAR-conseqüência de Γ se toda LAR-interpretação para $\Gamma \cup \{P\}$ que satisfaz Γ também satisfaz P. Notamos isto por $\Gamma \models_{\mathrm{LAR}} P$.

2.2.19 Definição. Definimos a função sai (Substituição da Abrangência por Igualdade), a qual, dada uma fórmula em LAR, associa a mesma a uma fórmula correspondente em LEC (Lógica Equacional Clássica, ou Lógica de Primeira Ordem com Igualdade), onde todos os sinais de abrangência "$\succcurlyeq$" são substituídos pelo sinal de igualdade "$=$". $\mathrm{sai}(\Gamma)$ é o conjunto $\{\mathrm{sai}(P) \mid P \in \Gamma\}$. Analogamente, definimos sua função inversa sia (Substituição da Igualdade por Abrangência), a qual associa uma fórmula em LEC à sua fórmula correspondente em LAR, substituindo cada ocorrência do sinal de igualdade "$=$" pelo sinal de abrangência "$\succcurlyeq$". $\mathrm{sia}(\Gamma)$ é o conjunto $\{\mathrm{sia}(P) \mid P \in \Gamma\}$.

2.2.20 Lema. Se "Υ" não ocorre em Γ e em P, então

- $\Gamma \models_{\mathrm{LAR}} P$ se, e somente se $\mathrm{sai}(\Gamma) \models_{\mathrm{LEC}} \mathrm{sai}(P)$.

2.3 Um Cálculo de Seqüentes para LAR

Nesta seção, LAR é caracterizada como um cálculo de seqüentes. Alguns resultados sintáticos básicos relacionados com este cálculo de seqüentes são também apresentados.

2.3.1 Definição. Adotaremos os seguintes sinais definidos (considerando x e y as primeiras variáveis que não livres em t):

- $t = t' \rightleftharpoons t \succcurlyeq t' \wedge t' \succcurlyeq t$;
- $\mathrm{vac}(t) \rightleftharpoons \neg\exists x(t \succcurlyeq x)$; "$\mathrm{vac}(t)$" é lido "$t$ é vácuo";
- $\mathrm{ex}(t) \rightleftharpoons \exists x(t \succcurlyeq x)$; "$\mathrm{ex}(t)$" é lido "$t$ é existencial";
- $\mathrm{un}(t) \rightleftharpoons \exists x\,(t \succcurlyeq x) \wedge \forall x\,\forall y\,(t \succcurlyeq x \wedge t \succcurlyeq y \rightarrow x = y)$; "$\mathrm{un}(t)$" é lido "$t$ é unívoco";
- $\mathrm{amb}(t) \rightleftharpoons \exists x\,\exists y(t \succcurlyeq x \wedge t \succcurlyeq y \rightarrow x \neq y)$; "$\mathrm{amb}(t)$" é lido "$t$ é ambíguo".

Abaixo apresentamos os postulados de LAR.

2.3.2. Leis Estruturais.

- Esquema da Reflexividade: Se $P \in \Gamma$, então $\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P$.
- Regra da Cadeia: $\dfrac{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \qquad \Gamma, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q}{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q}$.
- Regra da Monotonicidade: Se $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\dfrac{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P}{\Gamma' \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P}$.

2.3.3. Leis de Introdução e Eliminação de Conectivos.

- Modus Ponens: Se P é uma fórmula pura, então $P, P \to Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q$.
- Regra da Dedução: Se P é uma fórmula pura, então $\dfrac{\Gamma, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q}{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \to Q}$.
- Esquema do $\wedge$-Eliminação: $\begin{cases} P \wedge Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P; \\ P \wedge Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q. \end{cases}$
- Esquema do $\wedge$-Introdução: $P, Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \wedge Q$.
- Regra da Prova por Casos: $\dfrac{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \vee Q \qquad \Gamma, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ R \qquad \Gamma, Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ R}{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ R}$.
- Esquema do $\vee$-Introdução: $\begin{cases} P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \vee Q; \\ Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \vee Q. \end{cases}$
- Regra da Não Contradição: Se P e Q são fórmulas puras, então $\dfrac{\Gamma, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q \qquad \Gamma, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg Q}{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg P}$.
- Esquema da Dupla Negação: $\begin{cases} \neg\neg P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P; \\ P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg\neg P. \end{cases}$
- Esquema da Implicação Material: $\begin{cases} P \to Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg P \vee Q; \\ \neg P \vee Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \to Q; \\ \neg(P \to Q) \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P \wedge \neg Q; \\ P \wedge \neg Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg(P \to Q). \end{cases}$
- Esquema de De Morgan: $\begin{cases} \neg(P \vee Q) \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg P \wedge \neg Q; \\ \neg P \wedge \neg Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg(P \vee Q); \\ \neg(P \wedge Q) \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg P \vee \neg Q; \\ \neg P \vee \neg Q \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg(P \wedge Q). \end{cases}$

2.3.4. Leis Quantificacionais.

- Esquema do $\forall$-Eliminação: Se t é um termo puro, $\forall x\, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P(x|t)$.
- Regra da Generalização: Se y não é livre em Γ, então $\dfrac{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ P(x|y)}{\Gamma \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \forall x\, P}$.
- Regra da Testemunha: Se y não é livre em $\Gamma \cup \{\exists x P, Q\}$, então $\dfrac{\Gamma, P(x|y) \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q}{\Gamma, \exists x\, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ Q}$.
- Esquema do $\exists$-Introdução: Se t é um termo puro, então $P(x|t) \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \exists x\, P$.
- Esquema da Alternância: $\begin{cases} \neg\exists x\, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \forall x\, \neg P; \\ \forall x\, \neg P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg\exists x\, P; \\ \neg\forall x\, P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \exists x\, \neg P; \\ \exists x\, \neg P \mid\!\underline{\ \ }_{\text{LAR}}\ \neg\forall x\, P. \end{cases}$

2.3.5. Leis da Abrangência.

- Esquema da Transitividade da Abrangência: $t \mathrel{)\!\!=} u, u \mathrel{)\!\!=} v \vdash_{\mathrm{LAR}} t \mathrel{)\!\!=} v$.
- Esquema da Extensão: Se x não é livre em t, t', então
  $\forall x(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow t' \mathrel{)\!\!=} x) \vdash_{\mathrm{LAR}} t' \mathrel{)\!\!=} t$
- Esquema da Globalização: $\begin{cases} x \text{ não é livre em } t, \\ x \text{ é de topo em } P, \\ x \text{ possui apenas uma ocorrência livre em } P, \end{cases}$
  então $\mathrm{ex}(t), \forall x(t \mathrel{)\!\!=} x \rightarrow P) \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t)$.
- Postulado da Substituição:
  * $t_1 \mathrel{)\!\!=} u_1, \ldots, t_n \mathrel{)\!\!=} u_n \vdash_{\mathrm{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \mathrel{)\!\!=} f(u_1, \ldots, u_n)$
  * $t_1 \mathrel{)\!\!=} u_1, \ldots, t_n \mathrel{)\!\!=} u_n, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash_{\mathrm{LAR}} p(u_1, \ldots, u_n)$
  * $t_1 \mathrel{)\!\!=} u_1, \ldots, t_n \mathrel{)\!\!=} u_n, \neg p(t_1, \ldots, t_n) \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg p(u_1, \ldots, u_n)$
- Esquema da Univocidade: Se t, t' são termos puros, então $t \mathrel{)\!\!=} t' \vdash_{\mathrm{LAR}} t' \mathrel{)\!\!=} t$.

- Esquema da Vacuidade:
  Se $\begin{cases} P \text{ é uma fórmula atômica básica ou uma negação de fórmula atômica básica }, \\ P \text{ possui pelo menos uma ocorrência livre de topo de } x, \end{cases}$
  então $\mathrm{vac}(t) \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t)$.

- Esquema da Descrição: Se t é um termo puro, então $\begin{cases} \Upsilon x P \mathrel{)\!\!=} t \vdash_{\mathrm{LAR}} P(x|t). \\ P(x|t) \vdash_{\mathrm{LAR}} \Upsilon x P \mathrel{)\!\!=} t. \end{cases}$
- Esquema da Função: Se $\begin{cases} u \text{ é um termo puro}, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ não são livres em } t_1, \ldots, t_n, \end{cases}$
  então $\begin{cases} f(t_1, \ldots, t_n) \mathrel{)\!\!=} u \vdash_{\mathrm{LAR}} \exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 \mathrel{)\!\!=} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!=} x_n \wedge u \mathrel{)\!\!=} f(x_1, \ldots, x_n)), \\ \exists x_1 \ldots \exists x_n (t_1 \mathrel{)\!\!=} x_1 \wedge \ldots \wedge t_n \mathrel{)\!\!=} x_n \wedge u \mathrel{)\!\!=} f(x_1, \ldots, x_n)) \vdash_{\mathrm{LAR}} f(t_1, \ldots, t_n) \mathrel{)\!\!=} u. \end{cases}$

LAR é uma lógica deviante. Daí, nem todas as leis da lógica clássica são válidas de modo irrestrito em LAR, como por exemplo a Modus Ponens e a Modus Tollens. Para a elaboração das leis gerais de substituição e instanciação, dadas a seguir, é necessário definir dois novos tipos de implicação e equivalência. O primeiro tipo possui a Modus Ponens e um correspondente teorema da dedução irrestrito, mas não a Modus Tollens. O segundo possui a Modus Ponens e a Modus Tollens, mas não a Regra da Dedução.

2.3.6 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo a *implicação forte*, através do conectivo definido "$\mathrel{-\!\!\triangleright}$", e a *equivalência forte*, através do conectivo definido "$\mathrel{\triangleleft\!\!\triangleright}$".
- $P \mathrel{-\!\!\triangleright} Q \rightleftharpoons \Upsilon x\, Q \mathrel{)\!\!=} \Upsilon x\, P$, onde x é a primeira variável não livre em $\{P, Q\}$.
- $P \mathrel{\triangleleft\!\!\triangleright} Q \rightleftharpoons (P \mathrel{-\!\!\triangleright} Q) \wedge (Q \mathrel{-\!\!\triangleright} P)$.

2.3.7 Definição. Definimos nas cláusulas abaixo a *superimplicação*, através do conectivo definido "$\Rightarrow$", e a *superequivalência*, através do conectivo definido "$\Leftrightarrow$".
- $P \Rightarrow Q \rightleftharpoons (P \mathrel{-\!\!\triangleright} Q) \wedge (\neg Q \mathrel{-\!\!\triangleright} \neg P)$.
- $P \Leftrightarrow Q \rightleftharpoons (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

2.3.8. Modus Ponens Forte: $P, P \mathrel{-\!\!\triangleright} Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$.

2.3.9. Regra da Dedução Forte: Se $\Gamma, P \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$, então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P \mathrel{-\!\!\triangleright} Q$.

2.3.10. Modus Ponens Superforte: $P, P \Rightarrow Q \vdash_{\mathrm{LAR}} Q$.

2.3.11. Modus Tollens Superforte: $\neg Q, P \Rightarrow Q \vdash_{\mathrm{LAR}} \neg P$.

2.3.12 Definição. Sejam D_1 e D_2 dois designadores em LAR. A samblagem $D_1 \Leftrightarrow D_2$ representa:
- $D_1 = D_2$, se D_1 e D_2 são ambos termos;

- $D_1 \Leftrightarrow D_2$, se D_1 e D_2 são ambos fórmulas.

O sinal "$\Leftrightarrow$" é denominado *sinal da correspondência*. Desse modo, a samblagem $D_1 \Leftrightarrow D_2$ é lida "D_1 *corresponde a* D_2".

2.3.13 Definição. Sejam D_1 e D_2 dois designadores em LAR. A samblagem $D_1 \mathrel{-\!\!\triangleright} D_2$ representa:
- $D_1 \mathrel{)\!\!\models} D_2$, se D_1 e D_2 são ambos termos;
- $D_1 \mathrel{-\!\!\triangleright} D_2$, se D_1 e D_2 são ambos fórmulas.

O conectivo "$\mathrel{-\!\!\triangleright}$" é denominado "*sinal do alcance*", e a samblagem $D_1 \mathrel{-\!\!\triangleright} D_2$ é lida "D_1 *alcança* D_2".

Se dois designadores são correspondentes, podemos, através da substituição ou instanciação de um terceiro designador por ambos, formar novas correspondências. Apresentamos a seguir o Esquema e Regra Geral da Substituição e o Esquema Geral da Instanciação para a Correspondência.

2.3.14. Esquema Geral da Substituição para a Correspondência.
- Se $x_1, \ldots, x_n$ são as variáveis livres em $\{D_1, D_2\}$ tais que G está em E no seu escopo, então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (D_1 \Leftrightarrow D_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} E(G \| D_1) \Leftrightarrow E(G \| D_2)$.

2.3.15. Regra Geral da Substituição para a Correspondência.
- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} D_1 \Leftrightarrow D_2, \\ G \text{ não está, em } E \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{D_1, D_2\}, \end{cases}$

  então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} E(G \| D_1) \Leftrightarrow E(G \| D_2)$.

2.3.16. Esquema Geral da Instanciação para a Correspondência (EGIC).
- $t_1 = t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} E(x|t_1) \Leftrightarrow E(x|t_2)$.

Quando um termo abrange outro termo, podemos, através da substituição ou instanciação de um terceiro termo de topo por ambos, formar novas implicações fortes ou abrangências.

2.3.17. Esquema Geral da Substituição para o Alcance.
- Se $\begin{cases} u \text{ possui somente ocorrências de topo em } E, \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são as variáveis livres em } \{t_1, t_2\} \text{ tal que } u \text{ está em } E \text{ no seu escopo}, \end{cases}$

  então $\forall x_1 \ldots \forall x_n (t_1 \mathrel{)\!\!\models} t_2) \vdash_{\mathrm{LAR}} E(u \| t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} E(u \| t_2)$.

2.3.18. Regra Geral da Substituição para o Alcance.
- Se $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} t_1 \mathrel{)\!\!\models} t_2, \\ u \text{ possui somente ocorrências de topo em } E, \\ u \text{ não está, em } E \text{ no escopo de nenhuma variável livre em } \Gamma \text{ e em } \{t_1, t_2\}, \end{cases}$

  então $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} E(u \| t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} E(u \| t_2)$.

2.3.19. Esquema Geral da Instanciação para o Alcance (EGIA).
- Se x é de topo em E, então $t_1 \mathrel{)\!\!\models} t_2 \vdash_{\mathrm{LAR}} E(x|t_1) \mathrel{-\!\!\triangleright} E(x|t_2)$.

2.4 Eliminação de Descrições

Nesta seção fornecemos uma tradução de LAR para a lógica clássica de primeira ordem ($P \mapsto P_{\mathrm{S}}$), na qual todas as ocorrências de "Υ" são eliminadas e as ocorrências de "$\mathrel{)\!\!\models}$" podem ser interpretadas como o sinal de igualdade.

2.4.1 Definição. As cláusulas abaixo especificam as funções $P \longmapsto P_{\mathrm{S}}$ e $P \longmapsto P_{\mathrm{N}}$:
- se P não possui ocorrência de "Υ", então $P_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{N}} = P$;
- se P é da forma $R(x_1, \ldots, x_n \,|\, \Upsilon y_1\, Q_1, \ldots, \Upsilon y_n\, Q_n)$,

  onde $\begin{cases} \text{para cada } i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \text{ é de topo e possui exatamente uma ocorrência livre em } R, \\ R \text{ é uma fórmula atômica básica sem descrições}, \end{cases}$

  então $\begin{cases} P_{\mathrm{S}} = \forall z_1 \ldots \forall z_n\, (Q_1(y_1|z_1)_{\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge Q_n(y_n|z_n)_{\mathrm{S}} \to R(x_1, \ldots, x_n|z_1, \ldots, z_n)), \\ P_{\mathrm{N}} = \exists z_1 \ldots \exists z_n\, (Q_1(y_1|z_1)_{\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge Q_n(y_n|z_n)_{\mathrm{S}} \wedge R(x_1, \ldots, x_n|z_1, \ldots, z_n)); \end{cases}$

  onde, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\begin{cases} * \ \text{se } x_i = y_i \text{ e } y_i \text{ não é livre em } \{\Upsilon y_1\, Q_1, \ldots, \Upsilon y_n\, Q_n\}, \text{ então } z_i = x_i; \\ * \ \text{se } x_i \neq y_i \text{ ou } y_i \text{ é livre em } \{\Upsilon y_1\, Q_1, \ldots, \Upsilon y_n\, Q_n\}, \text{ então } z_i \text{ é a primeira} \\ \quad \text{variável não livre em } \{z_1, \ldots, z_{i-1}, R, \Upsilon y_1\, Q_1, \ldots, \Upsilon y_n\, Q_n\}. \end{cases}$

- se $\begin{cases} t \text{ é um termo não puro,} \\ x \text{ é a primeira variável não livre em } t, t', \end{cases}$

  então $(t' \models t)_{\mathrm{S}} = (t' \models t)_{\mathrm{N}} = \forall x\big((t \models x)_{\mathrm{S}} \to (t' \models x)_{\mathrm{S}}\big)$;

- se $\begin{cases} t \text{ é um termo puro,} \\ x_1, \ldots, x_n \text{ são as primeiras } n \text{ variáveis não livres em } t_1, \ldots, t_n, t, \end{cases}$

  então

$$(f(t_1, \ldots, t_n) \models t)_{\mathrm{S}} = (f(t_1, \ldots, t_n) \models t)_{\mathrm{N}} =$$
$$\exists x_1 \ldots \exists x_n\big((t_1 \models x_1)_{\mathrm{S}} \wedge \ldots \wedge (t_n \models x_n)_{\mathrm{S}} \wedge (t \models f(x_1, \ldots, x_n))_{\mathrm{S}}\big);$$

- Se t é um termo puro, então $(\Upsilon x\, P \models t)_{\mathrm{S}} = (\Upsilon x\, P \models t)_{\mathrm{N}} = P_{\mathrm{S}}(x|t)$;
- $(\neg P)_{\mathrm{S}} = \neg P_{\mathrm{N}}$;
- $(\neg P)_{\mathrm{N}} = \neg P_{\mathrm{S}}$;
- $(P \to Q)_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{N}} \to Q_{\mathrm{S}}$;
- $(P \to Q)_{\mathrm{N}} = P_{\mathrm{S}} \to Q_{\mathrm{N}}$;
- $(P \wedge Q)_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{S}} \wedge Q_{\mathrm{S}}$;
- $(P \wedge Q)_{\mathrm{N}} = P_{\mathrm{N}} \wedge Q_{\mathrm{N}}$;
- $(P \vee Q)_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{S}} \vee Q_{\mathrm{S}}$;
- $(P \vee Q)_{\mathrm{N}} = P_{\mathrm{N}} \vee Q_{\mathrm{N}}$;
- $(\forall x\, P)_{\mathrm{S}} = \forall x\ P_{\mathrm{S}}$;
- $(\forall x\, P)_{\mathrm{N}} = \forall x\ P_{\mathrm{N}}$;
- $(\exists x\, P)_{\mathrm{S}} = \exists x\ P_{\mathrm{S}}$;
- $(\exists x\, P)_{\mathrm{N}} = \exists x\ P_{\mathrm{N}}$.

2.4.2 Exemplos.
- $(p(\Upsilon x\, Q))_S = \forall x(Q \to p(x))$.
  $(p(\Upsilon x\, Q))_{\mathrm{N}} = \exists x(Q \wedge p(x))$.
- $(\neg p(\Upsilon x\, Q))_S = \forall x(Q \to \neg p(x))$.
  $\neg(p(\Upsilon x\, Q)_N) = \neg\exists x(Q \wedge p(x))$.
- $(\Upsilon x\,(\text{mamífero}(x)) \models \Upsilon x(\text{leão}(x)))_S = (\Upsilon x\,(\text{mamífero}(x)) \models \Upsilon x(\text{leão}(x)))_{\mathrm{N}} =$
  $\forall x\,((\Upsilon x(\text{leão}(x)) \models x)_S \to (\Upsilon x\,(\text{mamífero}(x)) \models x)_S) = \forall x\,(\text{leão}(x) \to \text{mamífero}(x))$.
- $(f(\Upsilon x \text{ primo}(x), \Upsilon y \text{ par}(y)) \models z)_S = (f(\Upsilon x \text{ primo}(x), \Upsilon y \text{ par}(y)) \models z)_{\mathrm{N}} =$
  $\exists x\, \exists y\,((\Upsilon x \text{ primo}(x) \models x)_S \wedge (\Upsilon y \text{ par}(y) \models y)_S \wedge z \models f(x, y)) = \exists x\, \exists y\,(\text{primo}(x) \wedge \text{par}(y) \wedge z \models f(x, y))$.
- $(\Upsilon x\, p(x) \models y)_S = (\Upsilon x\, p(x) \models y)_S = p(y)$.
- $\big(\text{feroz}(\Upsilon x\,(\text{carnívoro}(x))) \to \text{feroz}(\Upsilon x\,(\text{leão}(x)))\big)_S = (\text{feroz}(\Upsilon x\,(\text{carnívoro}(x))))_{\mathrm{N}} \to (\text{feroz}(\Upsilon x\,(\text{leão}(x))))_S =$
  $\exists x\,(\text{carnívoro}(x) \wedge \text{feroz}(x)) \to \forall x\,(\text{leão}(x) \to \text{feroz}(x))$.

2.4.3 Teorema.
- $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \Leftrightarrow P_{\mathrm{S}}$.
- Se P é uma fórmula pura, então $\vdash_{\mathrm{LAR}} P \Leftrightarrow P_{\mathrm{N}}$.

2.4.4 Lema. $\begin{cases} \Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P \text{ se, e somente se } \Gamma_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{S}}. \\ \Gamma \models_{\mathrm{LAR}} P \text{ se, e somente se } \Gamma_{\mathrm{S}} \models_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{S}}. \end{cases}$

2.4.5 Lema. Substituindo-se, em termos e fórmulas onde não há ocorrência de “Υ”, o sinal “$\models$” pelo o sinal “$=$”, os mesmos comportam-se em LAR da mesma forma em que na Lógica Equacional Clássica (LEC), ou lógica de primeira ordem com igualdade. Em outras palavras:
- Se Γ e P não possuem ocorrência de “Υ”, então
  $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$ se, e somente se $\text{sai}(\Gamma) \vdash_{\mathrm{LEC}} \text{sai}(P)$.

2.4.6. Teorema da Correção e Completude do Cálculo LAR com respeito à Semântica.
- $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$ se, e somente se, $\Gamma \models_{\mathrm{LAR}} P$.

Prova:
Suponha $\Gamma \vdash_{\mathrm{LAR}} P$. Pelo lema 2.4.4, temos $\Gamma_{\mathrm{S}} \vdash_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{S}}$, donde pelo lema 2.4.5, temos $\text{sai}(\Gamma_{\mathrm{S}}) \vdash_{\mathrm{LEC}} \text{sai}(P_{\mathrm{S}})$. Pela correção e completude de LEC, temos $\text{sai}(\Gamma_{\mathrm{S}}) \models_{\mathrm{LEC}} \text{sai}(P_{\mathrm{S}})$, donde pelo lema 2.2.20, obtemos $\Gamma_{\mathrm{S}} \models_{\mathrm{LAR}} P_{\mathrm{S}}$. Daí, pelo lema 2.4.4, $\Gamma \models_{\mathrm{LAR}} P$. □

3 Conclusão

Enquanto que o discurso das linguagens naturais é em geral repleto de ambigüidades, o mesmo não acontece usualmente com as linguagens formais, como por exemplo, aquelas presentes na matemática usual. Entretanto, existem várias situações, tanto na prática matemática como na modelagem do raciocínio em Lógica, nas quais é bastante desejável lidar diretamente com a ambigüidade, como por exemplo a integral indefinida, o produto categorial, e diversas situações sintáticas nas linguagens formais. Esta dificuldade se deve à falta de ferramentas lógicas adequadas para a formalização de situações como ambigüidade e vacuidade. A lógica aqui descrita tenta suprir esta lacuna, adotando um novo paradigma semântico: a associação de cada termo a uma coleção de objetos, em oposição às semânticas conhecidas, onde cada termo é associado a apenas um objeto.

Em linguagens informais, como Português, Inglês e outras, expressões podem empregar nomes ambíguos para coleções de objetos. Em LAR, adotamos este mesmo conceito na definição de uma linguagem formal para representação de conhecimento, enriquecendo a lógica clássica e aumentando seu poder de expressividade. Através dos resultados concernentes à eliminação de descrições, apresentados na seção 2.4, qualquer fórmula representada em LAR pode ser convertida para a lógica de primeira ordem com igualdade. Desse modo, podemos empregar nestas fórmulas os métodos de automatização conhecidos e largamente empregados, como tablôs e resolução, na construção de programas de inteligência artificial.

Referências

[1] Abar, C. A. A. P. *Descrição e Paraconsistência*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1985.

[2] Bell, J. L., and Machover, M. *A Course in Mathematical Logic*. North-Holland, Amsterdan, 1977.

[3] Bird, S., Klein, E., and Loper, E. Introdução ao processamento de linguagem natural. http://nltk.sourceforge.net/lite/doc/pt-br/introduction.html, 2006.

[4] Bittencourt, G. *Inteligência Artificial: ferramentas e teorias*, 3ª ed. Série Didática. Editora da UFSC, Florianópolis, 2006.

[5] Buchsbaum, A., and Pequeno, T. A game characterization of paraconsistent negation. In *Second World Congress on Paraconsistency* (2000).

[6] Carrion, R., and da Costa, N. C. A. *Introdução à Lógica Elementar (com o símbolo de Hilbert)*, 1ª ed. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 1988.

[7] da Costa, N. *Sistemas Formais Inconsistentes*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963.

[8] da Costa, N. C. A. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre Dame Journal of Formal Logic 15* (1974), 497–510.

[9] da Costa, N. C. A. Logics that are both paraconsistent and paracomplete. *Rendiconti dell' Accademia Nazionale del Linzei 83* (1989), 29–32.

[10] da Costa, N. C. A. El símbolo ε de Hilbert. In *Lecturas Matemáticas*, vol. v 2. 1980, pp. 1–13.

[11] Hatcher, W. S. *The Logical Foundations of Mathematics*. Foundations and philosophy of science and technology series. Pergamon Press, 1982.

[12] Hilbert, D., and Bernays, P. *Grundlagen der Mathematik*. Springer, Berlin, 1934.

[13] Hintikka, J., and Kulas, J. *The Game of Language*. D. Reidel, 1983.

[14] Rosser, J. B. *Logic for Mathematicians*. Chelsea Publishing Company, 1978.

[15] Russell, B. On denoting. *Mind 14* (1905), 479–493.

[16] Russell, B. *Logic and Knowledge: essays 1901-1950*. Routledge, London, 1988.

[17] Scruton, R. *Modern Philosophy. A Survey*. Mandarin, Londres, 1996.

[18] Suppes, P. *Axiomatic set theory*. Dover, Nova York, 1972.