Um Método dos Tableaux com um Refinamento para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais nos Ramos das Árvores de Prova

Letícia Carvalho Pivetta Fendt[1], Arthur Buschbaum[2]

[1]Curso de Sistemas de Informação
Centro Universitário Luterano de Ji-Paraná
Ji-Paraná - RO - CEP: 78 960 000 Caixa Postal: 271

[2]Departamento de Informática e Estatística
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis - SC - CEP 88040-900

{leticia, arthur}@inf.ufsc.br, leticia@inf.ulbrajp.com.br

Abstract. *The present work is a proposed refinement of the traditional tableaux method, aiming to decrease the number of nodes in decision trees and to increase the probability of obtaining decisive cases for a larger number of cases. For this, we specify and implement an algorithm that is based on the traditional tableaux method for classical logic. The new algorithm requires a procedure for the control of repetition of universal formulas in a given branch during the addition of new terms.*

Resumo. *Este trabalho apresenta um refinamento ao método dos tableaux, tal como tradicionalmente apresentado, visando diminuir o número de nós das árvores de prova e aumentar a probabilidade de obtenção de respostas para um número maior de problemas. Para isto epecificou-se e implementou-se um algoritmo baseado no método tradicional dos tableaux para a lógica clássica. O novo algoritmo recorre a um procedimento para controlar a repetição de fórmulas universais em um dado ramo, durante a adição de novos termos.*

1 Introdução

Um dos ramos da Inteligência Artificial é o raciocínio automático. Raciocínio automático é a simulação mecânica do processo de pensar, que é realizado pelo homem. A importância do raciocínio automático está no fato de liberar o homem de processos repetitivos, rotineiros e estafantes, para que ele se dedique a tarefas que necessitem de um certo nível de criatividade, atualmente, um tanto quanto distantes da máquina.

É possível realizar a simulação de uma dada forma de raciocínio através da escolha e/ou modelagem de uma lógica e da especificação de um método de prova automático para tal lógica, que melhor reflitam esta forma de raciocínio. Neste trabalho a lógica quantificacional é utilizada para representação do conhecimento e o método dos tableaux é utilizado como algoritmo de prova.

A automatização do raciocínio lida com dois obstáculos básicos, que direcionam a evolução deste campo de pesquisa: crescimento explosivo do espaço de busca e processamento perpétuo para dados que deveriam fornecer respostas negativas.

Atendendo a estas duas demandas, especificou-se, neste trabalho, uma forma de refinamento para o método dos tableaux, visando diminuir ao máximo a proliferação de dados intermediários e evitando processamento perpétuo de certos tipos de problemas. Tal refinamento é realizado sobre o Método dos Tableaux Tradicional, a seguir.

2 O Método dos Tableaux e um Sistema de Tableaux Tradicional

O sistema de tableaux, conforme [Reeves 1983], é um método de prova por refutação, no qual prova-se um teorema pelo insucesso na tentativa de construção sistemática de um modelo para a sua negação. Originalmente, o método verifica a impossibilidade da satisfação da negação de uma determinada fórmula.

A seguir é definido o sistema de tableaux tradicional para a lógica quantificacional clássica, chamado aqui de $\mathbf{S_0}$, tal como encontrado habitualmente na literatura existente, por exemplo, em [Revees 1983] e [Buchsbaum & Pequeno 1990].

A linguagem inicial de $\mathbf{S_0}$ é uma linguagem de primeira ordem fixa, denotada por $\mathbf{L_0}$. A linguagem de trabalho de $\mathbf{S_0}$ é uma extensão de $\mathbf{L_0}$, denotada por $\mathbf{L_1}$, obtida de $\mathbf{L_0}$, acrescentando-se uma infinidade de novas constantes ao alfabeto.

A função de inicialização de $\mathbf{S_0}$, denotada por $\mathbf{I_0}$, associa a cada coleção $\mathbf{\Gamma}$ de fórmulas de $\mathbf{L_1}$ um tableau com um único ramo sem fórmulas marcadas, cujas fórmulas são obtidas de $\mathbf{\Gamma}$ substituindo-se todas as variáveis livres de $\mathbf{\Gamma}$ por novas constantes e retirando os quantificadores vácuos das fórmulas de $\mathbf{\Gamma}$.

O critério de fechamento de $\mathbf{S_0}$ é uma função, denotada por $\mathbf{F}$, que associa a um dado ramo ρ em $\mathbf{L_1}$ a palavra **fechado** se ρ possui duas fórmulas $\mathbf{P}$ e $\neg\mathbf{P'}$, onde $\mathbf{P}$ é congruente a $\mathbf{P'}$, e a palavra **aberto** caso contrário.

A coleção de regras de $\mathbf{S_0}$, denotada por $\mathbf{R_0}$, é composta das onze regras dadas pela Figura 1.

Regra ¬¬P	**Regra P → Q**	**Regra P∧Q**	**Regra P ∨ Q**	**Regra ∃x P**	**Regra ∀x P**
$\begin{array}{c}\neg\neg P\\ \mid\\ P\end{array}$	$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{P \to Q}\\ \diagup & \diagdown\\ \neg P & Q\end{array}$	$\begin{array}{c}P \wedge Q\\ \mid\\ P\\ \mid\\ Q\end{array}$	$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{P \vee Q}\\ \diagup & \diagdown\\ P & Q\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, P\\ \mid\\ P(x/c)\end{array}$	$\begin{array}{c}\forall x\, P\\ \mid\\ P(x/t_n)\\ \dots\\ P(x/t_1)\\ \mid\\ \forall x\, P\end{array}$

Regra ¬(P → Q)	**Regra ¬(P ∧ Q)**	**Regra ¬(P∨Q)**	**Regra ¬∃x P**	**Regra ¬∀x P**
$\begin{array}{c}\neg(P \to Q)\\ \mid\\ P\\ \mid\\ \neg Q\end{array}$	$\begin{array}{cc}\multicolumn{2}{c}{\neg(P \wedge Q)}\\ \diagup & \diagdown\\ \neg P & \neg Q\end{array}$	$\begin{array}{c}\neg(P \vee Q)\\ \mid\\ \neg P\\ \mid\\ \neg Q\end{array}$	$\begin{array}{c}\neg\exists x\, P\\ \mid\\ \forall x\, \neg P\end{array}$	$\begin{array}{c}\neg\forall x\, P\\ \mid\\ \exists x\, \neg P\end{array}$

Figura 1: Regras de Expansão dos Ramos para o Sistema de Tableaux Tradicional.

Na coleção de regras, mostrada na Figura 1, a constante **c**, da expressão **P**(***x*/c**), escrita na regra para fórmulas existenciais, é a primeira constante em $\mathbf{L_1}$ que não figura no ramo considerado. E os termos $\mathbf{t_1}$,..., $\mathbf{t_n}$, das expressões **P**(***x***/$\mathbf{t_1}$), …, **P**(***x***/$\mathbf{t_n}$), escritos na regra para fórmulas universais, são todos os termos fechados $\mathbf{t_i}$ (**i =** 1, …,n) do ramo considerado, tais que ∀***x*** **P** ainda não tenha sido instanciado para $\mathbf{t_i}$.

3 Refinamento ao Sistema de Tableaux Tradicional

O refinamento ao método dos tableaux, aqui proposto, tem como principal objetivo a construção de um Sistema de Tableaux para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais nos Ramos das Árvores de Prova ($\mathbf{S_1}$). Além disso, este refinamento prioriza a expansão de fórmulas que não abrem novos ramos (fórmulas conjuntivas) e existenciais sobre os demais nós.

O método tradicional, apresentado no tópico anterior, não se preocupa com a repetição, eventualmente desnecessária, das fórmulas quantificadas universalmente. Já no refinamento atual é dado um tratamento a esta questão, considerando-se o fato de que não existe a necessidade de que se repita uma fórmula universal, instanciada para todos os termos fechados de um determinado ramo, se não houver a possibilidade de que novos termos surjam neste ramo. Esta possibilidade é acusada pela não ocorrência futura no ramo de fórmulas quantificadas existencialmente (fórmulas sob escopo de um quantificador existencial), bem como pela não ocorrência futura de fórmulas que contenham variáveis sob o escopo de sinais funcionais.

A modificação realizada neste refinamento altera principalmente a regra para fórmulas universais de $\mathbf{S_0}$, apresentada na Figura 1 que, em $\mathbf{S_1}$, deverá ser como segue:

Regra ∀***x*** **P** - Acrescentam-se os nós com as fórmulas **P**(***x***/$\mathbf{t_i}$), para **i** = 1,…, **n**, para as quais **P**(***x***/$\mathbf{t_i}$), a menos de congruência, não ocorre no ramo. Repete-se o nodo com a fórmula ∀***x*** **P**, somente quando existir no ramo uma fórmula **Q**, de um nodo não marcado, tal que **Q** propague novos termos no ramo em questão, do modo como será definido a seguir.

Assim, após a inserção das fórmulas obtidas pela instanciação da fórmula universal para os termos fechados do ramo, o procedimento varre este ramo em busca de fórmulas que possibilitem o aparecimento de novos termos. Se existir no ramo pelo menos uma fórmula que propague novos termos, a fórmula quantificada universalmente deve ser repetida neste ramo.

O procedimento de classificação das fórmulas pertencentes a um ramo quanto à propagação de novos termos é especificado através das definições realizadas a seguir.

3.1 Definição: As cláusulas abaixo definem recursivamente as funções $\mathbf{f}_\forall$ e $\mathbf{f}_\exists$:

- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{p}(\mathbf{t_1},..., \mathbf{t_n})) = 0$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{p}(\mathbf{t_1},..., \mathbf{t_n})) = 0$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \neg\mathbf{P}) = \mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P})$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \neg\mathbf{P}) = \mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P})$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) = \max\ \{\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}), \mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) = \max\ \{\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}), \mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) = \max\ \{\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}), \mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{Q})\}$

- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}), \mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}), \mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}), \mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = 0$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = 0$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = 0$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = 0$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y}\ \mathbf{P}) = 1$ se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ é livre em $\mathbf{P}$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y}\ \mathbf{P}) = \mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P})$
- $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{y}\ \mathbf{P}) = \mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P})$
- $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{y}\ \mathbf{P}) = 1$ se, e somente se, $\boldsymbol{x}$ é livre em $\mathbf{P}$

A função $\mathbf{f}_\forall$ foi construída de modo que $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) = 1$ se, e somente se, **P** possui uma subfórmula fora do escopo de $\boldsymbol{x}$, que gera uma fórmula universal, cuja variável quantificada é distinta de $\boldsymbol{x}$ e em cuja matriz $\boldsymbol{x}$ é livre. Nos outros casos, $\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) = 0$.

Da mesma forma, $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) = 1$ se, e somente se, **P** possui uma subfórmula fora do escopo de $\boldsymbol{x}$, que gera uma fórmula existencial, cuja variável quantificada é distinta de $\boldsymbol{x}$ e em cuja matriz $\boldsymbol{x}$ é livre. Nos outros casos, $\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) = 0$.

3.2 Definição: A função **esf** (sigla tirada da expressão "escopo de sinal funcional") é definida como segue:

- $\mathbf{esf}(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) = \begin{cases} 1, \text{ caso } \boldsymbol{x} \text{ possua uma ocorrência livre em } \mathbf{P} \text{ no escopo de um sinal funcional;} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$

3.3 Definição: As cláusulas abaixo definem recursivamente as funções **tu** (sigla tirada da expressão "tipo universal") e **te** (sigla tirada da expressão "tipo existencial"):

- $\mathbf{tu}(\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,..., \mathbf{t}_n)) = 0$
- $\mathbf{te}(\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,..., \mathbf{t}_n)) = 0$
- $\mathbf{tu}(\neg\mathbf{P}) = \mathbf{te}(\mathbf{P})$
- $\mathbf{te}(\neg\mathbf{P}) = \mathbf{tu}(\mathbf{P})$
- $\mathbf{tu}(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{te}(\mathbf{P}), \mathbf{tu}(\mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{te}(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{tu}(\mathbf{P}), \mathbf{te}(\mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{tu}(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{tu}(\mathbf{P}), \mathbf{tu}(\mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{te}(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{te}(\mathbf{P}), \mathbf{te}(\mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{tu}(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{tu}(\mathbf{P}), \mathbf{tu}(\mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{te}(\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) = \max\{\mathbf{te}(\mathbf{P}), \mathbf{te}(\mathbf{Q})\}$
- $\mathbf{tu}(\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = \max\{\mathbf{f}_\exists(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) + 1, \mathbf{esf}(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) + 1, \mathbf{tu}(\mathbf{P})\}$
- $\mathbf{te}(\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = \mathbf{te}(\mathbf{P})$
- $\mathbf{tu}(\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = \mathbf{tu}(\mathbf{P})$
- $\mathbf{te}(\exists \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}) = \max\{\mathbf{f}_\forall(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) + 1, \mathbf{esf}(\boldsymbol{x}, \mathbf{P}) + 1, \mathbf{te}(\mathbf{P})\}$

Interpretando os valores obtidos para a função **tu**, observa-se que $\mathbf{tu}(\mathbf{P}) = 2$ se, e somente se, **P** gera uma fórmula da forma $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{Q}$, tal que **Q** possui uma subfórmula fora do escopo de $\boldsymbol{x}$ em **Q**, que gera uma fórmula existencial, cuja variável quantificada é distinta de $\boldsymbol{x}$ e em cuja matriz $\boldsymbol{x}$ é livre, ou **P** gera uma fórmula da forma $\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{Q}$, tal que $\boldsymbol{x}$

possui uma ocorrência livre em **Q** no escopo de um sinal funcional. **tu**(**P**) = 1 se, e somente se, **P** gera uma fórmula universal que não se enquadra nos dois casos anteriores. **tu**(**P**) = 0 se, e somente se, **P** não gera fórmula universal.

Através da definição de **te**, é possível observar que **te**(**P**) = 2 se, e somente se, **P** gera uma fórmula da forma $\exists \boldsymbol{x}$ **Q**, tal que **Q** possui uma subfórmula fora do escopo de $\boldsymbol{x}$ em **Q**, que gera uma fórmula universal, cuja variável quantificada é distinta de $\boldsymbol{x}$ e em cuja matriz $\boldsymbol{x}$ é livre, ou **P** gera uma fórmula da forma $\exists \boldsymbol{x}$ **Q**, tal que $\boldsymbol{x}$ possui uma ocorrência livre em **Q** no escopo de um sinal funcional. **te**(**P**) = 1 se, e somente se, **P** gera uma fórmula existencial que não se enquadra nos dois casos anteriores. **te**(**P**) = 0 se, e somente se, **P** não gera fórmula existencial.

3.4 Definição: As clausulas abaixo definem a função de propagação de termos **pt**:

- $$\mathbf{pt}(\mathbf{P}) = \begin{cases} 2, \text{ caso } \mathbf{tu}(\mathbf{P}) = 2; \\ 1, \text{ caso } \mathbf{tu}(\mathbf{P}) \neq 2 \text{ e } \mathbf{te}(\mathbf{P}) \neq 0; \\ 0, \text{ caso } \mathbf{tu}(\mathbf{P}) \neq 2 \text{ e } \mathbf{te}(\mathbf{P}) = 0. \end{cases}$$

A busca por fórmulas que propaguem termos ocasiona o aparecimento de uma classificação destas fórmulas em três categorias: fórmulas que não propagam termos (**pt**(**P**) = 0), fórmulas que propagam termos temporariamente (**pt**(**P**) = 1), e fórmulas que propagam termos indefinidamente (**pt**(**P**) = 2).

3.5 Definição: Diz-se que uma fórmula **P** *propaga novos termos* se, e somente se, **pt**(**P**) ≠ 0.

É proposto abaixo um teorema relacionando com a última definição, com o conceito de geração de fórmulas por fórmulas em um tableau.

3.6 Teorema: Sendo **P** uma fórmula de um nodo de um tableau **T**, tem-se que **P** propaga novos termos se, e somente se, existe uma fórmula **Q** possuindo um termo que não figure em **T**, tal que **P** gere **Q** em **T** com respeito a **S**, onde **S** poderá ser tanto o sistema de tableaux tradicional como o refinamento ao sistema de tableaux tradicional.

Logo, em ramos que possuem ao menos uma fórmula que propague termos indefinidamente, a repetição das fórmulas quantificadas universalmente sempre ocorrerá. Já em ramos que não possuem fórmulas que propaguem termos indefinidamente, e possuem uma ou mais fórmulas que propaguem termos temporariamente, a repetição das fórmulas quantificadas universalmente será realizada até que aquelas fórmulas sejam suficientemente expandidas, deixando de existir no ramo fórmulas que propaguem termos temporariamente, cessando nesta altura a propagação de novos termos. Em ramos que possuem somente fórmulas que não propaguem termos, não se efetuará a repetição das fórmulas quantificadas universalmente.

Este refinamento permitirá conclusões negativas para uma série de casos anteriormente indecidíveis pelo método tradicional.

4 Exemplo de Prova Usando o Sistema de Tableaux Tradicional para Lógica Clássica e o Sistema de Tableaux com Tratamento para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais

Para demonstrar as diferenças entre o Sistema de Tableaux Tradicional ($\mathbf{S_0}$) e o Sistema de Tableaux com Tratamento para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais ($\mathbf{S_1}$), proposto aqui, são apresentados nas Figuras 2 e 3 o comportamento de cada um destes dois sistemas, em relação a um mesmo problema:

$\forall \boldsymbol{x}\ \mathbf{P}\boldsymbol{x}, \exists \boldsymbol{x}\ ((\mathbf{P}\boldsymbol{x} \vee \mathbf{Q}\boldsymbol{x}) \rightarrow \neg(\mathrm{S}\boldsymbol{x} \vee \mathbf{R}\boldsymbol{x})) \vdash \neg\forall \boldsymbol{x}\mathbf{S}\boldsymbol{x}$

$\surd$1) $\forall x\ Px$

$\surd$2) $\exists x\ ((P\boldsymbol{x} \vee Q\boldsymbol{x}) \rightarrow \neg(S\boldsymbol{x} \vee R\boldsymbol{x}))$

$\surd$3) $\neg\neg\forall \boldsymbol{x} S\boldsymbol{x}$

$\surd$4) Pc_1

$\surd$5) $\forall \boldsymbol{x}\ P\boldsymbol{x}$

$\surd$6) $((Pc_2 \vee Qc_2) \rightarrow \neg(Sc_2 \vee Rc_2))$

$\surd$7) $\forall \boldsymbol{x} S\boldsymbol{x}$

$\surd$8) Pc_2

$\surd$9) $\forall \boldsymbol{x}\ P\boldsymbol{x}$

$\surd$10) $\neg\ ((Pc_2 \vee Qc_2)$	$\surd$14) $\neg(Sc_2 \vee Rc_2))$
11) Sc_1	14)Sc_1
12) Sc_2	15) Sc_2
13) $\forall \boldsymbol{x} S\boldsymbol{x}$	16) $\forall \boldsymbol{x} S\boldsymbol{x}$
17) $\forall \boldsymbol{x}\ P\boldsymbol{x}$	18)$\forall \boldsymbol{x}\ P\boldsymbol{x}$
19)$\neg\ Pc_2$	20) $\neg Sc_2$
X	***X***

Figura 2: Árvore de Prova – Método dos Tableaux Tradicional

Em ambos os casos, os nós 1, 2 e 3 representam a árvore inicial para o desenvolvimento do tableaux, e cada nodo é marcado com um √, indicando que já foi processado, ou expandido, se a expansão é possível.

$\surd 1)\ \forall \boldsymbol{x}\ P\boldsymbol{x}$

$\surd 2)\ \exists \boldsymbol{x}\ ((P\boldsymbol{x} \vee Q\boldsymbol{x}) \rightarrow \neg(S\boldsymbol{x} \vee R\boldsymbol{x}))$

$\surd 3)\ \neg\neg\forall \boldsymbol{x} S\boldsymbol{x}$

$\surd 4)\ Pc_1$

$\surd 5)\ \forall \boldsymbol{x}\ P\boldsymbol{x}$

$\surd 6)\ ((Pc_2 \vee Qc_2) \rightarrow \neg(Sc_2 \vee Rc_2))$

$\surd 7)\ \forall \boldsymbol{x} S\boldsymbol{x}$

$\surd 8)\ Pc_2$

$\surd 9)\ \neg\ ((Pc_2 \vee Qc_2)$	$\surd 10)\ \neg(Sc_2 \vee Rc_2))$
$11)\ Sc_1$	$13) Sc_1$
$12)\ Sc_2$	$14)\ Sc_2$
$15) \neg\ Pc_2$	$16)\ \neg Sc_2$
X	***X***

Figura 3 Árvore de Prova – Tratamento para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais

No método tradicional, Figura 2, quando uma fórmula universal é processada todas as instâncias da fórmula são adicionadas a todos os ramos onde ela ocorre; a fórmula universal é repetida; e a expansão continua para o próximo nodo.

No método para evitar repetições de fórmulas, mostrado na Figura 3, quando o algoritmo processa uma fórmula universal, ele verifica a possibilidade de novos termos surgirem no ramo em questão. No exemplo, quando o algoritmo processa o nodo 3, isto resulta na instanciação da fórmula universal para as constantes presentes no ramo. O algoritmo então verifica que não existem fórmulas que propagam novos termos neste ramo, constatando que a repetição da fórmula universal é desnecessária. O mesmo ocorre com o nodo 6.

5 Resultados Obtidos Pelo Sistema Implementado

O sistema de tableaux descrito anteriormente foi implementado na Linguagem LISP, através da ferramenta Alegro CL, Versão 5.0. A utilização da linguagem LISP permitiu a escrita direta e elegante das definições realizadas ao longo do tópico 3. Para verificação inicial dos resultados obtidos através dos sistemas foram testados para os problemas de 1 até 42, extraídos de [Pelletier 1986]. Os resultados obtidos pelo sistema para evitar repetições desnecessárias de fórmulas universais (**S_1**) são comparados com os resultados obtidos através de dois outros sistemas: o Sistema de Tableaux Tradicional (**S_0**); e Sistema de Tableaux com Unificação (**S_3**), encontrado em [Fendt & Buchsbaum 2001], que usa procedimento de unificação, comumente utilizado no método da resolução. A principal diferença de **S_3** em relação aos outros sistemas (**S_0**, **S_1**) é que a instanciação de uma fórmula universal é realizada somente para aqueles termos interessantes ao fechamento do ramo em questão.

Tabela 1: Resultados dos Sistemas Implementados

Problema	Número de nós da árvore de refutação obtidos pelo		
	Sistema de Tableaux Tradicional (**S_0**)	Sistema para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais(**S_1**)	Sistema de Tableaux com Unificação (**S_3**)
P1	20	20	20
P2	12	12	12
P3	6	6	6
P4	19	19	19
P5	16	15	15
P6	3	3	3
P7	4	4	4
P8	6	6	6
P9	24	18	18
P10	32	28	28
P11	9	9	9
P12	174	144	144
P13	39	39	35
P14	54	48	48
P15	18	16	16
P16	6	6	6
P17	60	60	60
P18	17	17	14
P19	139	139	121
P20	-	-	91
P21	60	42	49
P22	51	43	43
P23	31	30	31
P24	284	111	145
P25	66	52	59
P26	-	-	6818
P27	234	74	81
P28	-	172	142
P29	6985	2660	110
P30	72	57	57
P31	37	26	30

P32		597	426	583
P33		879	182	184
P34		-	2290	971
P35		43	38	35
P36		-	-	-
P37		-	-	-
P38		254	208	191
P39		13	10	11
P40		2483	2207	445
P41		-	-	-
P42		45	44	39
P43		-	-	-
P44		3475	2867	223
P45		-	-	4525

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos pela aplicação dos sistemas de tableaux apresentados no presente trabalho (**S_0** e **S_1**), além do sistema (**S_3**) encontrado em [Fendt & Buchsbaum 2001] sobre os problemas acima propostos. O número máximo de nós permitidos para a árvore de refutação foi 10.000 (dez mil). As lacunas da tabela que estão preenchidas com um travessão representam os problemas para os quais o sistema correspondente não obteve resposta diante do limite estabelecido acima.

Nos problemas de P1 até P18 o número de nós permaneceu praticamente inalterado para qualquer um dos sistemas de tableaux. Isto ocorre devido ao fato destes problemas possuírem somente fórmulas da lógica proposicional, isto é, não ocorrem nos ramos das árvores de prova, fórmulas quantificadas universalmente ou existencialmente.

Os casos onde nenhum dos sistemas de tableaux encontrou resultados são aqueles onde existem fórmulas quantificadas universalmente que geram fórmulas quantificadas existencialmente.

Baseado nos dados da tabela 1 é possível observar que **S_1** produziu árvores com um número menor de nós (P9, P10, P12, P14, P15, P21 até P25, P27 até P29, P31 até P35, P38 até P40), bem como, o número de problemas solucionados aumentou (P28,e P34), em relação ao sistema tradicional, **S_0**. Este fato ocorreu devido à não repetição irrestrita de fórmulas universais, o que ocasiona instanciações desnecessárias (não contribuem para o fechamento do ramo sendo expandido) destas fórmulas universais; bem como, para problemas com resposta negativa, o que ocasiona o processamento perpétuo dos sistemas. Porém **S_1** apresentou um desempenho inferior ao sistema **S_3** (com unificação), principalmente em problemas com grande proliferação de dados intermediários (P29, P34, P40, P44), fato completamente previsível, pois o sistema com unificação usa um processo elaborado para instanciação das fórmulas universais.

Por fim, vale ressaltar que esta bateria de testes serviu apenas para uma breve e inicial verificação de resultados, salienta-se a necessidade da realização de testes para um número maior de problemas. Problemas estes, cujas características sejam avaliadas com um maior cuidado, no momento da análise dos resultados obtidos.

6 Conclusão

O presente trabalho teve início com a descrição de um sistema de tableaux tradicional para a lógica quantificacional clássica (**S_0**), o qual serviu de ponto de partida para o desenvolvimento de um outro sistema de tableaux (**S_1**), que evita a repetição de fórmulas universais desnecessárias nos ramos das árvores de prova.

O intuito deste trabalho foi que a modificação, feita sobre o sistema de tableaux tradicional para a lógica quantificacional clássica, resultasse na construção de árvores com um número menor de nós, bem como na obtenção de respostas para um número maior de problemas.

Após a implementação, a realização de alguns testes, e a comparação dos resultados obtidos aqui com os obtidos por dois outros sistemas de tableaux, foi possível verificar, em alguns casos, a obtenção do propósito acima descrito. Assim, o sistema de Tableaux com um Refinamento para Evitar Repetições Desnecessárias de Fórmulas Universais obteve árvores de prova com número de nós inferior em relação ao Sistema de Tableaux Tradicional, bem como solucionou um maior número de problemas. Porém, comparando-se o sistema proposto aqui com um Sistema de Tableaux com Unificação, proposto em [Fendt & Buchsbaum 2001], evidenciou-se a necessidade do emprego de técnicas mais elaboradas, como a unificação, comumente utilizada no método de resolução, para que os objetivos propostos fossem atingidos de forma satisfatória.

7- Referências Bibliográficas

Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio. *O Método dos Tableaux Generalizado e sua Aplicação ao Raciocínio Automático em Lógicas Não Clássicas*. O que nos faz pensar – Cadernos do Departamento de Filosofia da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, nº 3, setembro de 1990.

Church, Alonzo. *A Note on the Entscheidungsproblem*. The Journal of Symblic Logic, vol.1, pp 40-41, 101-102, 1936.

Enderton, Herbert B.. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1972.

Fendt, Letícia C. P. & Buchsbaum, Arthur. *Método dos Tableaux com Unificação*. Anais do XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, vol. 1. Fortaleza, 2001.

Fitting, Melvin. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*. Springer Verlag, 1990.

Loveland, Donald W.. *Automated Theorem Proving*. North-Holland Publishing Company, 1978.

Pelletier, Francis J.. *Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers.* Journal of Automated Reasoning. D. Reidel Publishing Company, 1986.

Reeves, S. V.. *An Introduction to Semantic Tableaux. Departmente of Computer Science*. CMS-55, University of Essex, 1983.