A INTRODUÇÃO DA IMPLICAÇÃO EM CÁLCULOS AXIOMÁTICOS ABERTOS

ARTHUR BUCHSBAUM
Departamento de Informática e de Estatística
Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitário − Trindade
CEP 88040-900 − Florianópolis / SC − Brasil
Email: arthur@inf.ufsc.br

TARCISIO PEQUENO
Laboratório de Inteligência Artificial
Departamento de Computação
Universidade Federal do Ceará
Campus do PICI / Bloco 910
CEP 60455-760 − Fortaleza / CE − Brasil
Email: tarcisio@lia.ufc.br

Resumo

Realizamos aqui um estudo genérico das possíveis formulações do Teorema da Dedução concernente à implicação material, em cálculos axiomáticos representando lógicas abertas. As formulações encontradas na literatura apresentam algumas deficiências, as quais foram superadas neste trabalho.

1. Introdução

Podemos observar dois tratamentos clássicos distintos dados em Lógica para a implicação material:

1º) a regra para a introdução da implicação não apresenta restrições, mas existem limitações para a introdução do quantificador universal e outras regras análogas, como se dá nas lógicas ditas fechadas [1,3,4,5];

2º) a introdução da implicação é feita com restrições, mas há liberdade incondicional para a introdução do quantificador universal e outras regras análogas, como ocorre nas lógicas ditas abertas [6,7,9].

A primeira abordagem tem sido adotada em sistemas de dedução natural [3,8] e cálculos de seqüentes [4], enquanto que a segunda, por questões de elegância, tem sido vista em cálculos axiomáticos abertos[1] [6,7,9].

As formulações para o Teorema da Dedução referentes a cálculos axiomáticos, representando lógicas abertas, que temos encontrado na literatura, padecem de algumas deficiências, tais como:

- uso explícito do conceito de demonstração, ao invés de uma idéia de nível mais alto versando sobre conseqüência sintática;
- falta de um rastreamento adequado que acompanhe o uso de objetos variantes em regras de generalização, dificultando possíveis reaplicações do Teorema da Dedução após uma primeira aplicação.

Além disto, consideramos essencial, para uma compreensão mais profunda deste assunto, um levantamento e estudo das propriedades básicas das relações de conseqüência envolvidas. Descobrimos, neste estudo, duas relações de conseqüência relevantes, com sistemas distintos de rastreamento para objetos variantes, chamadas adiante de "dependência" e de "sustentação", as quais, sob certas condições que estabeleceremos a seguir, são equivalentes, e daí podemos utilizar as propriedades relevantes de ambas. Estabelecemos uma série de resultados concernentes a objetos variantes e introdução da implicação, para cada uma das classes de cálculos axiomáticos abordadas.

Damos a seguir dois exemplos de formulações do Teorema da Dedução, comumente encontradas na literatura, que sofrem dos defeitos citados:

- "Para o cálculo de predicados (ou o sistema formal da teoria dos números), se $\Gamma,\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, onde as variáveis livres na suposição **A** são mantidas constantes, então $\Gamma \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$." Conforme [6, pg. 97].
- "Se $\Gamma,\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$, onde, na dedução, nenhuma aplicação de **Gen**[2] em uma fórmula que dependa de **A** tem como sua variável quantificada uma variável livre em **A**, então $\Gamma \vdash \mathbf{A} \to \mathbf{B}$." Conforme [7, pg. 63].

---

[1] Os cálculos axiomáticos fechados não são convenientes para representar lógicas possuindo objetos variantes distintos de variáveis, tais como as lógicas modais.

[2] **Gen** é a regra de generalização para a quantificação universal, adotada em [7].

Neste trabalho encontramos formulações para o Teorema da Dedução que superam os problemas citados, em uma generalização abrangendo um amplo espectro de lógicas.

2. Variação, Dependência e Sustentação

Deste ponto em diante, consideramos C um cálculo axiomático, α,β,γ fórmulas em C, e Γ,ϑ,ζ coleções de fórmulas em C; as mesmas convenções continuam valendo se usarmos os sinais citados acrescidos de subíndices ou plicas.

<u>Pré-Definição 2.1</u>: Para cada aplicação de uma regra de inferência **r** em C, consideramos como previamente conhecidos *os objetos variantes em* C *desta aplicação*. Se **r** é uma regra em C cujas aplicações não possuem objetos variantes, dizemos que **r** *é uma regra constante em* C, caso contrário dizemos que **r** *é uma regra variante em* C. Dizemos que $\boldsymbol{o}$ é *um objeto variante em* C se existe uma aplicação de uma regra em C tal que $\boldsymbol{o}$ é um objeto variante desta aplicação. Consideramos também como previamente conhecido quando um objeto variante $\boldsymbol{o}$ *é livre em* uma dada fórmula α; e quando α *está no escopo de* $\boldsymbol{o}$. Se C é um dos cálculos quantificacionais definidos neste trabalho, antecipamos que toda variável em C é um objeto variante em C. As seguintes condições adicionais devem ser cumpridas:

- o número de objetos variantes de toda aplicação de alguma regra variante em C é finito e não vazio;
- todo objeto variante de uma aplicação de regra variante não é livre na conseqüência desta aplicação.

<u>Exemplo 2.2</u>: Na prática, encontramos os seguintes objetos variantes:

- variáveis usadas na quantificação universal;
  - ◊ Exemplo: $\boldsymbol{x}$ é um objeto variante da aplicação $\dfrac{\alpha}{\forall \boldsymbol{x}\, \alpha}$ da regra da generalização universal;
- a variável "oculta" usada na introdução de conectivos associados a modalidades tais como necessidade, plausibilidade cética [2, capítulo 5], etc.; a mesma pode ser indicada pelo próprio sinal introduzido pela regra;
  - ◊ Exemplo: "$\Box$" é o objeto variante da regra $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$.

<u>Definição 2.3</u>: Seja $\mathcal{D} = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n \rangle$ uma demonstração em C. Dizemos que α_i *é relevante para* α_j *em* $\mathcal{D}$ ($\mathbf{i},\mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$) se uma das seguintes condições for cumprida:

- $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ e α_j é justificado em $\mathcal{D}$ como uma premissa;
- α_j é justificado em $\mathcal{D}$ como uma conseqüência de uma aplicação $\dfrac{\beta_1,\ldots,\beta_p}{\alpha_i}$ de uma regra em C e existe uma hipótese da aplicação β_k ($\mathbf{k} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}$) tal que α_i é relevante para β_k em $\mathcal{D}$.

<u>Definição 2.4</u>: Dizemos que uma demonstração $\mathcal{D}$ em C *depende de* uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes se $\mathcal{V}$ contém a coleção dos objetos variantes $\boldsymbol{o}$ de aplicações de regras em $\mathcal{D}$ possuindo alguma hipótese na qual $\boldsymbol{o}$ seja livre tal que há uma fórmula, justificada em $\mathcal{D}$ como uma premissa, na qual $\boldsymbol{o}$ também seja livre, relevante em $\mathcal{D}$ para esta hipótese. Se existir uma demonstração em C de α a partir de Γ tal que esta dependa de $\mathcal{V}$, dizemos que α *depende de* $\mathcal{V}$ *a partir de* Γ *em* C, e notamos isto por $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n\}$ e $\mathbf{n} \geq 1$, notamos $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$ também por $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n} \alpha$.

Se $\mathcal{V} = \varnothing$, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *demonstração invariante* em C. Se α depende de $\varnothing$ a partir de Γ em C, dizemos que α é uma *conseqüência invariante* de Γ em C.

<u>Teorema 2.5</u>: Uma fórmula α depende de $\mathcal{V}$ a partir de Γ em C se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições for cumprida:

- α é um axioma de C;
- $\alpha \in \Gamma$;
- existe uma aplicação $\dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C tal que $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_n$ e, para todo objeto variante $\boldsymbol{o}$ desta aplicação tal que $\boldsymbol{o} \notin \mathcal{V}$ e para todo α_i ($1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$), se $\boldsymbol{o}$ é livre em α_i, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\boldsymbol{o}$ não é livre em Γ' e $\Gamma' \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_i$.

Se $\mathcal{V} = \varnothing$, podemos substituir a terceira cláusula pela seguinte condição:

- existe uma aplicação de uma regra $\dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ em C, tal que $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \alpha_n$ e, para todo objeto variante $\boldsymbol{o}$ desta aplicação e para todo α_i ($1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$), se $\boldsymbol{o}$ é livre em α_i, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\boldsymbol{o}$ não é livre em Γ' e $\Gamma' \vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \alpha_i$.

Exemplo 2.6: Em um cálculo axiomático aberto possuindo as regras da generalização universal e da necessidade, temos os seguintes exemplos de dependência:

$\mathbf{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \vdash^{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{y}\ \mathbf{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;

$\mathbf{p}\boldsymbol{x} \vdash^{\boldsymbol{x},\Box} \Box\forall\boldsymbol{x}\ \mathbf{p}\boldsymbol{x}$.

Teorema 2.7: As seguintes propriedades são válidas para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}}$":

(i) se existe uma demonstração $\mathcal{D}$ em C de α a partir de Γ cuja coleção de objetos variantes de aplicações de regras de C em $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}$,
então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(ii) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$;

(iii) se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, então existe uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes tal que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(iv) $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(v) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}'}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(vi) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(vii) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então existe $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}'$ é finito e $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}'}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(viii) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que Γ' é finito e $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(ix) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ e, para cada $\boldsymbol{o} \in \mathcal{W}$, $\boldsymbol{o}$ não é livre em Γ, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}-\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(x) se $\begin{cases} \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha, \\ \text{para cada } \boldsymbol{o} \in \mathcal{W}, \text{ existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}-\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \alpha$.

Teorema 2.8: As seguintes asserções não são válidas para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}}$":

- se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_n}_{\mathsf{C}} \alpha_n$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \vdash^{\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \beta$;
- se $\begin{cases} * \quad \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_p, \\ * \quad \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}} \beta, \\ * \quad \text{para todo i} \in \{1,\ldots,n\} \text{ e para todo j} \in \{1,\ldots,p\}, \text{ se } o_i \notin \mathcal{V} \text{ e } o_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad\ \ \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } o_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_j, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta$.

Prova:

Seja C um cálculo cujos axiomas são dados pelos esquemas "$\alpha \to \alpha \vee \beta$" e "$\forall\boldsymbol{x}\ \alpha \to \alpha(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$", e cujas regras de inferência são $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$ e $\dfrac{\alpha}{\forall\boldsymbol{x}\ \alpha}$, de modo que a primeira é uma regra constante e a segunda é uma regra variante cujo objeto variante de cada aplicação é a variável quantificada correspondente.

Temos que $\begin{cases} \{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z), \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}(y)\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \mathbf{R}(y) \\ \mathbf{R}(y) \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \forall z\ (\mathbf{R}(y) \vee \mathbf{S}(z)) \end{cases}$, contudo não é verdade que

$\{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z), \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}y\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \forall z\ (\mathbf{R}y \vee \mathbf{S}z)\}$, daí temos um contra-exemplo para a primeira proposição.

Da mesma forma, temos que $\begin{cases} \{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z), \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}(y)\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \mathbf{R}(y), \\ \mathbf{R}(y) \vdash^{y}_{\mathsf{C}} \forall y \forall z\ (\mathbf{R}(y) \vee \mathbf{S}(z)), \end{cases}$ todavia não é verdade que

$\{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z), \forall y\ \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}y\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \forall y \forall z\ (\mathbf{R}y \vee \mathbf{S}z)\}$, daí temos um contra-exemplo para a segunda proposição.

●

Definição 2.9: Dizemos que uma demonstração $\mathcal{D}$ em C *é sustentada por* uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes se $\mathcal{V}$ contém a coleção de objetos variantes de aplicações de regras em $\mathcal{D}$ tais que, para cada conclusão de uma destas aplicações, há uma premissa relevante para esta em $\mathcal{D}$. Se existir uma demonstração em C de α a partir de Γ tal que esta seja sustentada por $\mathcal{V}$, dizemos que α *é sustentada por* $\mathcal{V}$ a partir de Γ em C, e notamos isto por $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n\}$ e $\mathbf{n} \geq 1$, notamos $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ também por $\Gamma \Vdash^{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n}_{\mathsf{C}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \varnothing$, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *demonstração estável* em C. Se α é sustentada por $\varnothing$ em C, dizemos que α é uma *conseqüência estável* de Γ em C.

Teorema 2.10: Se $\mathcal{V}$ é uma coleção de objetos variantes em C, α é sustentada por $\mathcal{V}$ a partir de Γ em C se, e somente se, pelo menos uma das seguintes cláusulas for cumprida:

- α é um axioma de C;
- $\alpha \in \Gamma$;
- existe uma aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C tal que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_n$ e, se existe um objeto variante $\boldsymbol{o}$ desta aplicação tal que $\boldsymbol{o} \notin \mathcal{V}$, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_n$.

Se $\mathcal{V} = \varnothing$, podemos substituir a terceira cláusula acima pela seguinte condição:

- existe uma aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C tal que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1,,\ldots,\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_n$ e, se existe um objeto variante $\boldsymbol{o}$ desta aplicação, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_n$.

Exemplo 2.11: Em um cálculo axiomático aberto possuindo as regras da generalização e da necessidade, temos o seguinte exemplo de sustentação:

$\Diamond \mathbf{p}\boldsymbol{x} \Vdash^{\Box,\boldsymbol{y}} \Box\forall \boldsymbol{y}\, \Diamond \mathbf{p}\boldsymbol{x}$.

Teorema 2.12: As seguintes propriedades são válidas para a relação "$\Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}}$":

(i) se existe uma demonstração $\mathcal{D}$ em C de α a partir de Γ cuja coleção de objetos variantes de aplicações de regras de C em $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(ii) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$;

(iii) se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, então existe uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes tal que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(iv) $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(v) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}'}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(vi) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(vii) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então existe $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}'$ é finito e $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}'}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(viii) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que Γ' é finito e $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$;

(ix) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}_1}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}_n}_{\mathsf{C}} \alpha_n$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \Vdash^{\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \beta$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}_1 \cup\ldots\cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \beta$.

O teorema abaixo descreve uma forma de expansão para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}}$" em um cálculo genérico.

Teorema 2.13: Se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_n}_{\mathsf{C}} \alpha_n$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \Vdash^{\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1 \cup\ldots\cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \beta$.

Lema 2.14: Se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$.

Prova:

Se α é axioma de C ou $\alpha \in \Gamma$, não há o que provar.

Suponhamos então há uma aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra de C preenchendo as condições do teorema 2.10. Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_n$. Dado um objeto variante $\boldsymbol{o}$ desta aplicação tal que $\boldsymbol{o} \notin \mathcal{V}$, temos que $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_n$, e daí $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, o que é, segundo o teorema 2.7, uma condição suficiente para concluirmos que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$.

●

3. Cálculos Axiomáticos Especiais

Definição 3.1: Um cálculo C é dito *semi-estável* se as seguintes condições forem válidas:

- toda regra variante de C é unária, o seu domínio é a coleção de todas as fórmulas em C, e cada aplicação da mesma possui exatamente um objeto variante;
- para cada aplicação $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de uma regra variante em C, se o seu objeto variante não é livre em α', então $\alpha' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- para cada aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra constante em C, se $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$, α' são respectivamente conclusões de aplicações de uma regra variante a partir de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, α usando os mesmos objetos variantes, então $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Lema 3.2: Se C é semi-estável e $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$, então, para toda aplicação $\frac{\alpha}{\alpha'}$ de uma regra variante em C, se o seu objeto variante não for livre em Γ, $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$.
Prova: é semelhante à prova do lema 3.11.

Teorema 3.3: Se C é semi-estável, então $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$.
Prova: é semelhante à prova do teorema 3.12.

Teorema 3.4: Se C é semi-estável, então "$\Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}}$" possui a seguinte propriedade adicional:

- se $\left\{\begin{array}{l} * \quad \Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p, \\ * \quad \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \Vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}} \beta, \\ * \quad \text{para todo } i \in \{1,\ldots,n\} \text{ e para todo } j \in \{1,\ldots,p\}, \text{ se } o_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } o_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_j, \end{array}\right.$ então $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$.

Prova: é semelhante à prova do teorema 3.13.

Corolário 3.5: Se C é semi-estável, então valem as seguintes propriedades adicionais para a relação "$\vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}}$":

- se $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$;
- se $\left\{\begin{array}{l} * \quad \Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p, \\ * \quad \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \Vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}} \beta, \\ * \quad \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}, \text{ se } o_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } o_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_j, \end{array}\right.$ então $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$.

Prova: basta usar o teorema 3.3, a nona proposição do teorema 2.12 e o teorema 3.4.

Definição 3.6: Um cálculo C é dito *semiforte* se as seguintes cláusulas forem satisfeitas:
(i) $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \alpha$;
(ii) $\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$;
(iii) $\alpha, \alpha \to \beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$;
(iv) para cada aplicação $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra constante de C, $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$.

Teorema 3.7: As seguintes proposições são equivalentes:
(i) C é um cálculo semiforte;
(ii) para quaisquer Γ e α tais que Γ é uma coleção de fórmulas em C e α é uma fórmula em C, $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$ implica em $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$.
Prova: é semelhante à prova do teorema 3.16.

Definição 3.8: Um cálculo C é dito *quaseforte* se C é semiforte e semi-estável.

Teorema 3.9: Se C é um cálculo quaseforte, então $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$ implica em $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$.
Prova: basta usar os teoremas 3.3 e 3.7.

Definição 3.10: Um cálculo semi-estável C é dito *estável* se este possuir a seguinte propriedade adicional:

- para cada aplicação $\frac{\beta}{\alpha}$ de uma regra variante em C, onde o é o seu objeto variante, se β' e α' são respectivamente conclusões de aplicações de uma regra variante em C sobre β,α usando o mesmo objeto variante, então $\beta' \Vdash^{o}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Lema 3.11: Se C é estável e $\Gamma \Vdash^{\gamma}_{\mathsf{C}} \alpha$, então, para toda aplicação $\frac{\alpha}{\alpha'}$ de uma regra variante em C, se o seu objeto variante não for livre em Γ, $\Gamma \Vdash^{\gamma}_{\mathsf{C}} \alpha'$.
Prova:
Se α é um axioma de C, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, e daí $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\gamma}_{\mathsf{C}} \alpha'$.
Se $\alpha \in \Gamma$, então o objeto variante da aplicação considerada não é livre em α, e daí, como C é estável, $\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\gamma}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Se existe uma aplicação de uma regra constante $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ em $\mathbf{C}$ tal que $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_n$, temos, por hipótese de indução, que $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha'_1,\ldots,\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha'_n$, onde $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$ são respectivamente conseqüências de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ pela mesma regra em que α' é conseqüência de α. Como $\mathbf{C}$ é estável, temos que $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n \Vdash_{\mathbf{C}}^{\varnothing} \alpha'$, e daí $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha'$.
Suponhamos então que existe uma aplicação $\frac{\beta}{\alpha}$ de uma regra variante de $\mathbf{C}$ tal que $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$, e, se o seu objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$, então $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha$. Seja $\boldsymbol{o}$ o objeto variante de $\frac{\beta}{\alpha}$. Se $\boldsymbol{o} \notin \mathcal{V}$, $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha$, daí $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha'$. Considere β' conseqüência de β pela mesma regra em que α' é conseqüência de α. Se $\boldsymbol{o} \in \mathcal{V}$, como $\beta \Vdash_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{o}} \beta'$, $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta'$, e daí, como $\mathbf{C}$ é estável temos que $\beta' \Vdash_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{o}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha'$.

●

<u>Teorema 3.12</u>: Se $\mathbf{C}$ é estável, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$ sss $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$.

Prova:
Pelo lema 2.14, temos que $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$, daí resta provar a recíproca.
Suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$.
Sejam $\mathcal{D}$ uma demonstração em $\mathbf{C}$ de α a partir de Γ dependente de $\mathcal{V}$, β a primeira ocorrência de uma fórmula em $\mathcal{D}$ justificada como conseqüência de uma aplicação de regra variante $\frac{\beta'}{\beta}$ tal que o seu objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e β' depende em $\mathcal{D}$ de alguma premissa. Seja $\boldsymbol{o}$ o objeto variante desta aplicação.
Se $\boldsymbol{o}$ não é livre em β', então, como $\mathbf{C}$ é estável, temos que $\beta' \Vdash_{\mathbf{C}}^{\varnothing} \beta$, e daí, como a ocorrência considerada de β' precede β em $\mathcal{D}$, temos que $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta'$, e portanto, pela transitividade de "$\Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}}$", $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$.
Se $\boldsymbol{o}$ é livre em β', então, como $\boldsymbol{o} \notin \mathcal{V}$, existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\boldsymbol{o}$ não é livre em Γ' e $\Gamma' \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta'$, e daí, como $\mathbf{C}$ é estável e pelo lema 3.11, $\Gamma' \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$, e portanto $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$.
Em qualquer caso, existe uma demonstração $\mathcal{D}_\beta$ em $\mathbf{C}$ de β a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$. Substituindo a ocorrência considerada de β em $\mathcal{D}$ por $\mathcal{D}_\beta$, obtemos, dado $\mathcal{D}$, uma demonstração em $\mathbf{C}$ de α a partir de Γ possuindo uma aplicação de regra variante a menos cujo objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e cuja hipótese depende de alguma premissa. Repetindo o mesmo processo um número finito de vezes, obtemos uma demonstração em $\mathbf{C}$ de α a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$, ou seja, $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha$.

●

<u>Teorema 3.13</u>: Se $\mathbf{C}$ é estável, então "$\Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}}$" possui a seguinte propriedade adicional:

- se $\begin{cases} * \ \Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \Vdash_{\mathbf{C}}^{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}, \text{ se } \boldsymbol{o}_i \notin \mathcal{V} \text{ e } \boldsymbol{o}_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } \boldsymbol{o}_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{e } \Gamma' \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_j, \end{cases}$ então $\Gamma \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$.

Prova:
Sejam $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_p$ respectivamente demonstrações em $\mathbf{C}$ de $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ a partir de Γ sustentadas por $\mathcal{V}$, e seja $\mathcal{E}$ uma demonstração de β a partir de $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\}$ sustentada por $\{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n\}$. Concatenando $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_p,\mathcal{E}$, obtemos uma demonstração $\mathcal{D}$ de β em $\mathbf{C}$ a partir de Γ.
Seja γ a primeira ocorrência de uma fórmula em $\mathcal{D}$ justificada como conseqüência de uma aplicação $\frac{\gamma'}{\gamma}$ de regra variante, tal que o seu objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e γ' depende em $\mathcal{D}$ de algum elemento de Γ. Como $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_p$ são demonstrações sustentadas por $\mathcal{V}$, temos que a ocorrência considerada de γ' figura em $\mathcal{E}$, e daí, considerando $\boldsymbol{o}$ o objeto variante da aplicação, temos que $\boldsymbol{o} \in \{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n\}$.

Sejam $\begin{cases} \vartheta = \{\alpha_j \,/\, j \in \{1,\ldots,p\} \text{ e } \boldsymbol{o} \text{ é livre em } \alpha_j\}, \\ \zeta = \{\alpha_j \,/\, j \in \{1,\ldots,p\} \text{ e } \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \alpha_j\}. \end{cases}$

É fácil verificar que existe Γ' finito tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\boldsymbol{o}$ não é livre em Γ' e, para todo $\delta \in \vartheta$, $\Gamma' \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \delta$, e portanto, pela construção de ζ, $\Gamma' \cup \zeta \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_1,\ldots,\Gamma' \cup \zeta \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_p$, e $\boldsymbol{o}$ não é livre em $\Gamma' \cup \zeta$.
Como a ocorrência considerada de γ' precede γ em $\mathcal{D}$, temos que $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \gamma'$, e daí, pela transitividade de "$\Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}}$", temos que $\Gamma' \cup \zeta \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \gamma'$, e portanto, pelo lema 3.11, $\Gamma' \cup \zeta \Vdash_{\mathbf{C}}^{\mathcal{V}} \gamma$.

Para cada $\delta \in \Gamma' \cup \zeta$, temos que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \delta$, e daí, novamente pela transitividade de "$\Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}}$", $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \gamma$. Ou seja, existe uma demonstração $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\gamma}}$ em $\mathbf{C}$ de γ a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$. Substituindo a ocorrência considerada de γ em $\mathcal{D}$ por $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\gamma}}$, temos uma demonstração $\mathcal{D}'$ em $\mathbf{C}$ de β a partir de Γ possuindo uma aplicação a menos de uma regra variante cujo objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e cuja hipótese dependa de alguma premissa. Repetindo o mesmo processo um número finito de vezes, obtemos uma demonstração em $\mathbf{C}$ de β a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$, ou seja, $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta$.

●

<u>Corolário 3.14</u>: Se $\mathbf{C}$ é estável, então valem as seguintes propriedades adicionais para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}}$":

- se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1}_{\mathbf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_p}_{\mathbf{C}} \alpha_p$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash^{\mathcal{W}}_{\mathbf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_p \cup \mathcal{W}}_{\mathbf{C}} \beta$;
- se $\begin{cases} * \ \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash^{\boldsymbol{o}_1,\ldots,\boldsymbol{o}_n}_{\mathbf{C}} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}, \text{ se } \boldsymbol{o}_i \notin \mathcal{V} \text{ e } \boldsymbol{o}_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } \boldsymbol{o}_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha_j, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta$.

Prova: basta usar o teorema 3.12, a nona proposição do teorema 2.12 e o teorema 3.13.

<u>Definição 3.15</u>: Um cálculo semiforte $\mathbf{C}$ é dito *forte* se este possuir a seguinte propriedade adicional:

- para cada aplicação $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra variante de $\mathbf{C}$, $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$, onde $\mathcal{V}$ é a coleção de objetos variantes da aplicação e nenhum elemento de $\mathcal{V}$ é livre em α.

<u>Teorema 3.16</u>: As seguintes proposições são equivalentes:

(i) $\mathbf{C}$ é um cálculo forte;

(ii) para quaisquer Γ, α, β e $\mathcal{V}$, se $\begin{cases} \Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta, \\ \text{para cada } \boldsymbol{o} \in \mathcal{V}, \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

Prova de (i) implica (ii):

Suponhamos que $\mathbf{C}$ é um cálculo forte, $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta$ e, para cada $\boldsymbol{o} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{o}$ não é livre em α

Se β é axioma de $\mathbf{C}$, então $\vdash_{\mathbf{C}} \beta$, e daí, pela cláusula (ii) da definição 3.6, $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

Se $\beta \in \Gamma$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta$, e daí, pela cláusula (ii) da definição 3.6, $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

Se $\beta = \alpha$, então, pela cláusula (i) da definição 3.6, $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha \to \alpha$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

Se existe uma aplicação $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra de $\mathbf{C}$ tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta_1,\ldots,\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta_n$, temos, por hipótese de indução, que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta_1,\ldots,\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta_n$. Se existe um objeto variante desta aplicação que não pertence a $\mathcal{V}$, então, conforme o teorema 2.10, $\vdash_{\mathbf{C}} \beta$, e daí, novamente pela cláusula (ii) da definição 3.6, $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$. Se todo objeto variante desta aplicação pertence a $\mathcal{V}$, então, como $\mathbf{C}$ é forte, concluímos que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

Prova de (ii) implica (i):

Suponhamos (ii).

Como $\alpha \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$, temos que $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha \to \alpha$.

Como $\{\beta,\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{C}} \beta$, temos que $\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

Finalmente, seja $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ uma aplicação de uma regra de $\mathbf{C}$ cuja coleção de objetos variantes é $\mathcal{V}$, e α uma fórmula de $\mathbf{C}$ onde nenhum elemento de $\mathcal{V}$ é livre.

Temos que $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n,\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{C}} \beta_1,\ldots,\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n,\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{C}} \beta_n$, e daí, como $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta$, temos que $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n,\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \beta$, e portanto $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha \to \beta$.

●

<u>Definição 3.17</u>: Um cálculo $\mathbf{C}$ é dito *superforte* se $\mathbf{C}$ é forte e estável.

Teorema 3.18: Se $\begin{cases} \mathsf{C} \text{ é um cálculo superforte,} \\ \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta, \\ \text{para cada } \boldsymbol{o} \in \mathcal{V},\ \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha \rightarrow \beta$.

Prova: basta usar os teoremas 3.16 e 3.12.então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha \rightarrow \beta$

Definição 3.19: Notamos por $\mathsf{C}[\Gamma]$ o cálculo aplicado obtido de C acrescentando Γ como postulado. Se Γ é um conjunto unitário da forma $\{\alpha\}$, então notamos $\mathsf{C}[\Gamma]$ também por $\mathsf{C}[\alpha]$.

Teorema 3.20: As seguintes asserções são válidas para $\mathsf{C}[\Gamma]$:

- $\Gamma' \cup \Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma' \vdash_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- $\Gamma' \cup \Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- se $\Gamma' \cup \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- se $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$, então existe $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{V}$ tal que $\Gamma' \cup \Gamma \vdash^{\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se $\Gamma' \cup \Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- se $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$, então existe $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{V}$ tal que $\Gamma' \cup \Gamma \Vdash^{\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se C é semi-estável, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é semi-estável;
- se C é semiforte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é semiforte;
- se C é quaseforte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é quaseforte;
- se C é estável, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é estável;
- se C é forte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é forte;
- se C é superforte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é superforte.

Teorema 3.21: $\mathsf{C}[\Gamma]$ possui as seguintes propriedades para a introdução da implicação:

- se C é semiforte e $\Gamma' \cup \{\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta$, então $\Gamma' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \rightarrow \beta$;
- se C é quaseforte e $\Gamma' \cup \{\alpha\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta$, então $\Gamma' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \rightarrow \beta$;
- se C é forte e $\begin{cases} \Gamma' \cup \{\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta, \\ \text{para cada } \boldsymbol{o} \in \mathcal{V},\ \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \rightarrow \beta$;

4. Conclusões

Encontramos formulações otimizadas do Teorema da Dedução para uma ampla classe de cálculos axiomáticos abertos, as quais superam todos os problemas que inicialmente apontamos, para uma ampla classe de lógicas, em todo um espectro de possíveis restrições em seu funcionamento dedutivo. Desde os cálculos semi-estáveis e semifortes, até os cálculos superfortes.

A formulação mais fraca da Teorema da Dedução dá-se para os cálculos quasefortes. Um exemplo de cálculo deste gênero pode ser visto em [2], pg. 133, o qual é uma tradução para uma linguagem de primeira ordem da Lógica da Dedução Cética, definida no mesmo trabalho, no capítulo 5. Este cálculo foi essencial para a prova de completude desta lógica.

A formulação mais forte do mesmo teorema dá-se para os cálculos superfortes, os quais constituem a grande maioria dos cálculos axiomáticos abertos, concernentes à implicação material, encontrados na literatura.

Nossa motivação inicial foi a busca de uma base conceitual para uma prova de completude abstrata com respeito a uma classe abrangente de cálculos, o que foi realizado em [2], pgs. 72-88. Uma exposição concisa desta prova será objeto de um futuro artigo.

Referências

[1] Bell, J. L. & Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[2] Buchsbaum, Arthur, *Lógicas da Inconsistência e da Incompletude: Semântica e Axiomática*, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1995.

[3] van Dalen, D., *Logic and Structure*, Springer-Verlag, 1989.

[4] Ebbinghaus, H. D. & Flum, J. & Thomas, W., *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1984.

[5] Enderton, Herbert B., *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1972.

[6] Kleene, Stephen Cole, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Publishing Company, 1971.

[7] Mendelson, Elliot, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, 1979.

[8] Prawitz, Dag, *Natural Deduction − A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, 1965.

[9] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.