ARTHUR RONALD DE VALLAURIS BUCHSBAUM

LÓGICAS DA INCONSISTÊNCIA E DA INCOMPLETUDE: SEMÂNTICA E AXIOMÁTICA

Tese apresentada ao Departamento de Informática da PUC / RJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Informática: Ciência da Computação.
Orientador: Tarcisio Haroldo Cavalcante Pequeno.

Departamento de Informática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 5 de outubro de 1995.

A meu pai, Otto Buchsbaum, que me ensinou, na prática e pelo seu exemplo, a vivenciar o mundo infinito da aventura intelectual, e me transmitiu o seu espírito de perseverança.
A minha mãe, Florence Buchsbaum, que me preencheu, desde os meus primeiros anos, com os mais belos sentimentos, e fez-me perceber a grande importância da imaginação e dos sonhos.

Agradecimentos

- a Elady, que tem sido minha amiga mais próxima ao longo destes últimos anos, por todo o apoio prestado, e pela força moral constante, que me ajudou a superar os piores momentos;
- a Tarcisio Pequeno, meu orientador, pela ajuda dada na estruturação geral deste trabalho, pela confiança depositada e pela infinita paciência que revelou, no decorrer de todos estes anos, aguardando o resultado final;
- a Newton C. A. da Costa, pelo constante incentivo, pela sua amizade e pelas inúmeras idéias que me transmitiu, as quais se revelaram fundamentais para a consecução deste trabalho;
- a Paulo Veloso, Antonio Mário Sette e Luiz Carlos Pereira, pelas sugestões dadas para a versão final deste trabalho;
- a Richard Sylvan, que me apontou algumas relações entre a implicação forte e a implicação relevante;
- a Rita, pela autoconfiança que me transmitiu em momentos decisivos;
- a Marcio Caio, meu irmão, pela inestimável ajuda prestada em várias ocasiões em que meus recursos financeiros revelaram-se insuficientes;
- a Vitório, Jaqueline, Attilio e ao Marcio Caio, os quais, além do constante apoio amigo, adquiriram para mim um computador, com o qual realizei a edição deste trabalho;
- a André Delano, meu irmão, participante em minha vida desde a infância;
- a Paulo Eduardo, meu irmão, que ensinou-me os primeiros passos no uso do computador;
- a Josina Carvalho e Neusa Veríssimo, professoras de Yoga, que mostraram-me como encontrar a serenidade dentro de mim mesmo;
- a Luis Castelo, clínico geral, que chegou a me atender gratuitamente, numa época em que dispunha de parcos recursos, e ajudou-me a superar um complicado problema de saúde;
- a Isa Brunetta, terapeuta holística, que me curou de uma persistente inflamação decorrente de um traumatismo;
- à Casa e Vídeo, pela infra-estrutura oferecida em todos os momentos em que estive no Rio;
- a Augusto, Alda e Ubiratam, donos da Micromakers, pela amizade e pela enorme boa vontade que revelaram na manutenção e expansão de meu computador, oferecendo-me sempre as condições mais vantajosas possíveis;
- a Antonio José, com quem pude contar diversas vezes para resolver problemas com o meu computador;
- a Tião, que me transmitiu muita força, em momentos que me foram bem difíceis;
- a Paulo Alencar, um grande amigo, que, apesar de residir atualmente no Canadá, nunca se esqueceu de mim e sempre me instilou autoconfiança.
- a Alexandre, dono da Módulo Informática, pela constante presença, amizade e apoio moral durante os primeiros anos em que residi em Fortaleza, e que sempre colocou à minha disposição os recursos de sua empresa;
- a Margareth Damasceno, diretora e uma das donas da Aviane, que colocou à minha disposição os diversos recursos da empresa, e chegou a dispor-se a emprestar-me um amplo apartamento, em uma ocasião em que eu estava com problemas de moradia;
- a Fernando Sabóia e Lucy Vidal, respectivamente Ex-Chefe e Chefe do Departamento de Computação da UFC, por todo o apoio prestado, e pela humana compreensão que me dispensaram, quando estava quase exausto, durante a finalização desta tese;
- a Jauvane, cuja ajuda prestada como meu procurador na PUC me poupou de muito trabalho;
- a Alcimo Aguiar, médico neurologista, pelas sugestões concernentes ao estilo de redação e aos aspectos gráficos desta tese;
- a Roberto Lins, que me incentivou e acabou me convencendo que era mais conexo à minha vocação, devido às circunstâncias, fazer minha Pós-Graduação em Informática ao invés de fazê-la em Matemática.

RESUMO

Uma família de lógicas adequadas para o tratamento da inconsistência e incompletude é definida. Esta família é composta por lógicas paraconsistentes ($\mathbf{LI}_1^*$ e $\mathbf{LI}_2^*$), paracompletas ($\mathbf{PCL}^*$), e não aléticas ($\mathbf{NALL}_1^*$ e $\mathbf{NALL}_2^*$), além da Lógica da Inconsistência Epistêmica (**LEI**) e da Lógica do Raciocínio Cético (**LSR**), elaboradas para a formalização do raciocínio na presença de conhecimento plausível, refletindo respectivamente atitudes crédulas e céticas diante do conhecimento. Para cada uma destas lógicas são dadas uma semântica e uma axiomática. Duas alternativas de extensões geradas por defaults são definidas, formando lógicas não monotônicas baseadas respectivamente em **LEI** e **LSR**, aptas para algumas formas de raciocínio indutivo.

Palavras-chave: inconsistência, incompletude, lógica paraconsistente, lógica paracompleta, lógica não alética, lógica monotônica, lógica não monotônica, plausibilidade crédula, plausibilidade cética, sistema de tableaux, sistema de resolução.

ABSTRACT

A family of logics suitable for inconsistency and incompleteness are defined.

This family is formed by paraconsistent logics ($\mathbf{LI}_1^*$ e $\mathbf{LI}_2^*$), paracomplete logics ($\mathbf{PCL}^*$), and non alethic logics ($\mathbf{NALL}_1^*$ e $\mathbf{NALL}_2^*$), besides the Logic for Epistemic Inconsistency (**LEI**) and the Logic for Skeptical Reasoning (**LSR**), elaborated for the formalization of reasoning in the presence of plausible knowledge, reflecting respectively credulous and skeptical attitudes, with respect to the knowledge. For each one of these logics is given a semantics and an axiomatics. Two alternatives of default rule-generated extensions are defined, forming non monotonic logics based respectively on **LEI** and **LSR**, suitable to some inductive reasoning forms.

Keywords: inconsistency, incompleteness, paraconsistent logic, paracomplete logic, non alethic logic, monotonic logic, non monotonic logic, credulous plausibility, skeptical plausibility, tableau system, resolution system.

SUMÁRIO

TABELA DE SÍMBOLOS

Abaixo damos uma relação que contém os símbolos utilizados ao longo deste trabalho:

- $\rightleftharpoons$ – sinal para abreviaturas; a expressão "$\alpha \rightleftharpoons \beta$" significa que α é uma abreviatura para β;
- $=$ – igualdade;
- $\neq$ – diferença;
- $\in$ – pertinência;
- $\subseteq$ – inclusão;
- $\subset$ – inclusão própria; **A** é dito um subconjunto próprio de **B** se $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$;
- $\cup$ – união simples;
- $\cap$ – interseção simples;
- $(\mathbf{A_i})_{\mathbf{i \in I}}$ – família indiciada por **I**;
- $\bigcup_{\mathbf{i \in I}} \mathbf{A_i}$ – união de uma família de conjuntos;
- $\bigcap_{\mathbf{i \in I}} \mathbf{A_i}$ – interseção de uma família de conjuntos;
- $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\mathbf{n} \rangle$ – **n**-tupla; conjunto ordenado de **n** elementos;
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ – produto cartesiano de **A** por **B**;
- $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ – coleção dos subconjuntos de **A**;
- $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ – domínio de uma relação;
- $\mathcal{I}(\mathbf{R})$ – imagem de uma relação;
- $\mathbf{R}\langle \mathbf{A} \rangle$ – imagem de **A** por **R**; é a coleção $\{\boldsymbol{y} \in \mathcal{I}(\mathbf{R}) \,/\, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \cap \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tal que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbf{R}\}$;
- $\mathbf{R}^{-1}$ – relação inversa de **R**;
- $\mathbf{f}\colon \mathbf{A} \mapsto \mathbf{B}$ – aplicação de **A** em **B**; **f** é uma função que associa cada $\boldsymbol{x} \in \mathbf{A} \cap \mathcal{D}(\mathbf{f})$ a $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{B}$;
- $\mathbf{f}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – função de **A** em **B**; **f** é uma aplicação de **A** em **B** tal que $\mathcal{D}(\mathbf{f}) = \mathbf{A}$;
- $\mathbf{f}\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ – função parcial de **A** em **B**; **f** é uma aplicação de **A** em **B** tal que $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \subseteq \mathbf{A}$;
- $\mathbf{f}\colon \mathbf{A} \supset\!\!\to \mathbf{B}$ – transformação de **A** em **B**; **f** é uma aplicação de **A** em **B** tal que $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \supseteq \mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^\mathbf{B}$ – coleção das funções de **B** em **A**;

- $\mathbf{f}/\mathbf{A}$ – restrição da função $\mathbf{f}$ ao conjunto $\mathbf{A}$; se $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(\mathbf{f})$, $\mathbf{f}/\mathbf{A}$ é a função cujo domínio é $\mathbf{A}$, e que associa cada $\boldsymbol{x} \in \mathbf{A}$ a $\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$;[1]
- $\Leftrightarrow$ – equivalência forte;
- $\leftrightarrow$ – equivalência clássica;
- $\Rightarrow$ – implicação forte;
- $\rightarrow$ – implicação clássica;
- $\wedge$ – conjunção;
- $\vee$ – disjunção;
- $\neg$ – negação heterodoxa;
- $\sim$ – negação clássica;
- $\circ$ – consistência
- $*$ – completude
- $\forall$ – quantificação universal;
- $\exists$ – quantificação existencial;
- $\forall_{\mathtt{i}}$ – quantificação universal para a espécie $\mathtt{i}$;
- $\exists_{\mathtt{i}}$ – quantificação existencial para a espécie $\mathtt{i}$.

[1] O conceito dual de restrição de uma função é o de extensão de uma função; dizemos que uma função $\mathbf{g}$ é uma extensão de f em A se $\mathcal{D}(\mathbf{f}) \subseteq \mathbf{A}$, $\mathcal{D}(\mathbf{g}) = \mathbf{A}$ e, para cada x $\in$ $\mathcal{D}(\mathbf{f})$, $\mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$.

TABELA DE SIGLAS

- **CL** – Classical Logic
- **CPL** – Classical Positive Logic
- **LI** – Logic for Inconsistency
- **PCL** – Paracomplete Logic
- **NALL** – Non Alethic Logic
- **LEI** – Logic of Epistemic Inconsistency
- **LSR** – Logic of Skeptical Reasoning
- **RDL** – Reiter's Default Logic
- **IDL** – Inconsistent Default Logic
- **SDL** – Skeptical Default Logic
- **MP** – regra modus ponens
- **Gen** – regra da generalização
- **te** – princípio do terceiro excluído
- **nc** – princípio da não contradição
- **T** – valor veritativo "true"
- **F** – valor veritativo "false"
- **O** – valor veritativo "overdefined"
- **U** – valor veritativo "underdefined"

TABELA DE NOTAÇÕES

Indicamos abaixo as convenções notacionais deste trabalho. No caso de letras individuais, valem os mesmos significados se as mesmas forem seguidas de índices ou plicas.

- $\mathbb{L}$ – lógica arbitrária; pg. 8
- **CPL** – lógica positiva quantificacional clássica; pg. 46
- **CL** – lógica quantificacional clássica; pg. 47
- **LI** – uma das lógicas $\mathbf{LI_1}$ ou $\mathbf{LI_2}$; pg. 96
- $\mathbf{LI_1}$ – lógica proposicional paraconsistente pura; pg. 96
- $\mathbf{LI_2}$ – lógica proposicional paraconsistente possuindo a negação clássica; pg. 96
- **PCL** – lógica proposicional paracompleta; pg. 96
- **NALL** – uma das lógicas $\mathbf{NALL_1}$ ou $\mathbf{NALL_2}$; pg. 96
- $\mathbf{NALL_1}$ – lógica proposicional não alética pura; pg. 96
- $\mathbf{NALL_2}$ – lógica proposicional não alética possuindo a negação clássica, pg. 96
- $\mathbf{LI^*}$ – uma das lógicas $\mathbf{LI_1^*}$ ou $\mathbf{LI_2^*}$; pg. 21
- $\mathbf{LI_1^*}$ – lógica quantificacional paraconsistente pura; pgs. 48, 48, 86
- $\mathbf{LI_2^*}$ – lógica quantificacional paraconsistente possuindo a negação clássica; pgs. 48, 48, 86
- $\mathbf{PCL^*}$ – lógica quantificacional paracompleta; pgs. 48, 48, 86
- $\mathbf{NALL^*}$ – uma das lógicas $\mathbf{NALL_1^*}$ ou $\mathbf{NALL_2^*}$; pg. 21
- $\mathbf{NALL_1^*}$ – lógica quantificacional não alética pura; pgs. 49, 49, 86
- $\mathbf{NALL_2^*}$ – lógica quantificacional não alética possuindo a negação clássica; pgs. 49, 49, 86
- **LEI** – lógica da plausibilidade crédula; pgs. 104, 109
- **LEI'** – lógica auxiliar para a prova de completude de **LEI**; pgs. 113, 115
- **LSR** – lógica da plausibilidade cética; pgs. 121, 125
- **LSR'** – lógica auxiliar para a prova de completude de **LSR**; pgs. 128, 130
- **RDL** – lógica de defaults de Reiter; pg. 117
- **IDL** – lógica de defaults crédula; pg. 119
- **SDL** – lógica de defaults cética; pg. 133
- L, $\mathsf{L_0}$, $\mathsf{L_1}$, $\mathsf{L_*}$ – linguagens formais; pgs. 8, 17, 26

- L – linguagem proposicional cujos únicos conectivos são "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$"; pgs. 21, 96
- L' – linguagem obtida acrescentando o conectivo zerário "$\perp$" ao alfabeto de L; pgs. 21, 96
- $\overline{\mathsf{L}}$ – uma das linguagens L ou L', dependendo do contexto; pgs. 21, 96
- L^* – linguagem quantificacional cujos únicos conectivos são "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", possuindo como quantificadores $\forall_{\mathtt{i}}$ e $\exists_{\mathtt{i}}$ para cada espécie $\mathtt{i}$ em L^*; pgs. 21, 46, 85
- $\mathsf{L}^{*\prime}$ – linguagem obtida acrescentando "$\perp$" ao alfabeto de L^*; pg. 21, 85
- $\overline{\mathsf{L}}^*$ – uma das linguagens L^* ou $\mathsf{L}^{*\prime}$; pg. 21, 85
- L_{P} – linguagem para **CPL**; pg. 46
- $\mathbb{T}(\mathsf{L}_0)$ – universo canônico de uma linguagem quantificacional L_0; pg. 33
- **lit**(L_0) – coleção de fórmulas atômicas fechadas próprias e suas negações de uma linguagem proposicional ou quantificacional L_0; pg. 51
- Σ – alfabeto; pgs. 8, 16
- Σ^+ – coleção de samblagens não vazias em um alfabeto; pg. 8
- $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – samblagens ou fórmulas, dependendo do contexto; pgs. 8, 8
- **P** – fórmula atômica; pg. 17
- Γ,ϑ,ζ – coleções de fórmulas; pg. 8
- $\mathtt{i},\mathtt{j},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ – espécies; pg. 15
- $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}$ – variáveis; pg. 16
- $\mathtt{t},\mathbf{u}$ – termos; pg. 17
- $\mathtt{c}$ – constante; pg. 16
- **f** – sinal funcional; pg. 16
- **p** – sinal predicativo; pg. 16
- $\mathbb{D}$ – domínio formal; pg. 8
- $\mathbb{V}$ – domínio veritativo; pg. 9
- $\mathbb{S}$ – semântica de valorações; pg. 10
- Δ – universo; pgs. 29, 30
- **d** – indivíduo de um universo; pg. 29

- $\mathbf{K}$ – estrutura arbitrária; pg. 26
- $|\mathbf{K}|$ – universo de uma estrutura; pg. 30
- $\mathbf{K}_{\mathbf{t}}$ – denotação de uma estrutura; pg. 31
- $\mathbf{U}$ – estrutura simples; pg. 32
- σ – atribuição de sinais de uma estrutura simples; pg. 32
- $\mathbf{U}_{\mathbf{s}}$ – atribuição de sinais de uma estrutura simples $\mathbf{U}$; pg. 32
- $\mathbf{U}$ = restrição de $\mathbf{U}_{\mathbf{s}} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}^{\mathbf{f}}$ à coleção de sinais, termos fechados e fórmulas fechadas – função abrangente definida por uma estrutura simples; pg. 32
- $\mathbf{U}$ = restrição de $\mathbf{U}_{\mathbf{s}} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{f}}$ à coleção de sinais, termos fechados e fórmulas fechadas – função abrangente definida por uma estrutura simples; pg. 47
- $\mathbf{U}_{\mathbf{c}}$ – canonização de uma estrutura simples; pg. 33
- $\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^3,\mathbf{V}^4$ – estruturas canônicas simples básicas, pg. 51
- $\mathbf{Y}$ – estrutura múltipla; pg. 33
- $\mathbf{Y}_{\mathbf{c}}$ – canonização de uma estrutura múltipla; pg. 34
- $\mathbf{Z}$ – estrutura supermúltipla; pg. 34
- $\mathbf{Z}_{\mathbf{c}}$ – canonização de uma estrutura supermúltipla; pg. 35
- $\mathbf{H}$ – estrutura bimúltipla; pg. 36
- $\mathbf{H}_{\mathbf{c}}$ – canonização de uma estrutura bimúltipla; pg. 36
- Ω – interpretação arbitrária; pg. 26
- $|\Omega|$ – universo de uma interpretação; pg. 30
- $\Omega(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})$ – substituição em uma interpretação; pg. 31
- $\Omega_{\mathbf{t}}$ – denotação de uma interpretação; pg. 31
- $\mathtt{I} = \langle \mathbf{U},\mathbf{s} \rangle$ – interpretação simples; pg. 32
- $\mathtt{I}_{\mathbf{t}} = \langle \mathbf{U},\mathbf{s} \rangle_{\mathbf{t}}$ – denotação de uma interpretação simples; pg. 32
- $\mathtt{I}^{\mathbf{f}} = \langle \mathbf{U},\mathbf{s} \rangle^{\mathbf{f}}$ – função veritativa tomando como argumentos fórmulas atômicas próprias definida por uma interpretação simples; pg. 32
- $\mathtt{I} = \mathbf{U}_{\mathbf{s}} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}^{\mathbf{f}}$ – função abrangente definida por uma interpretação simples; pg. 32

- $\mathtt{I} = \mathbf{U_s} \cup \mathtt{I_t} \cup \mathtt{I_f}$ – função abrangente definida por uma interpretação simples; pg. 47
- $\mathtt{I_c}$ – canonização de uma interpretação simples; pg. 33
- $\mathtt{I_p}$ – **CPL**-pré-valoração; pg. 46
- $\mathtt{I_f} = \langle \mathbf{U}, \mathbf{s} \rangle_{\mathbf{f}}$ – **CL**-pré-valoração; pg. 47
- Υ – interpretação múltipla; pg. 33
- Υ_t – denotação de uma interpretação múltipla; pg. 33
- $\Upsilon^{max}, \Upsilon^{min}$ – funções veritativas tomando como argumentos fórmulas atômicas próprias definidas por uma interpretação múltipla; pg. 34
- Υ_c – canonização de uma interpretação múltipla; pg. 34
- Ψ – interpretação supermúltipla; pg. 34
- Ψ_t – denotação de uma interpretação supermúltipla; pg. 34
- Ψ^{max}, Ψ^{min} – funções veritativas tomando como argumentos fórmulas atômicas próprias definidas por uma interpretação supermúltipla; pg. 35
- Ψ_c – canonização de uma interpretação supermúltipla; pg. 35
- Φ – interpretação híbrida; pg. 35
- Φ_t – denotação de uma interpretação híbrida; pg. 35
- Φ^f – função veritativa definida por uma interpretação híbrida tomando como argumentos fórmulas atômicas próprias; pg. 35
- $\Phi = \mathbf{U_s} \cup \Phi_t \cup \Phi^f$ – função abrangente definida por uma interpretação híbrida; pg. 35
- Φ_c – canonização de uma interpretação híbrida; pg. 35
- Θ – interpretação bi-híbrida; pg. 36
- Θ_t – denotação de interpretação bi-híbrida; pg. 36
- Θ^f – função veritativa tomando como argumentos fórmulas atômicas próprias definida por uma interpretação bi-híbrida; pg. 36
- $\Theta = \mathbf{U_s} \cup \Theta_t \cup \Theta^f$ – função abrangente definida por uma interpretação bi-híbrida; pg. 36
- Θ_c – canonização de uma interpretação bi-híbrida; pg. 36

- **s** – atribuição para variáveis; pg. 29
- **s**(x|**d**) – substituição em uma atribuição para variáveis; pg. 30
- $\alpha(\beta|\gamma)$ – substituição de samblagem por samblagem em uma samblagem; pg. 8
- $\alpha(x|\mathbf{t})$ – substituição de uma variável por um termo em uma fórmula; pg. 18
- $\Omega(x|\mathbf{d})$ – substituição em uma interpretação; pg. 31
- $\mathcal{E}$ – coleção de espécies; pg. 15
- $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ – correspondências semânticas arbitrárias; pg. 27
- $\mathcal{P}$ – correspondência semântica capital; pgs. 27, 40
- $\mathcal{S}$ – correspondência semântica secundária; pg. 40
- $\mathcal{M}$ – correspondência semântica capital ou secundária; pg. 40
- $\Omega_{\mathcal{F}}$ – correspondência semântica aplicada a uma interpretação; pg. 27
- **max** – pgs. 40, 48, 48, 49, 49, 104, 113, 121, 128
- **min** – pgs. 40, 48, 48, 49, 49, 104, 113, 121, 128
- C – cálculo arbitrário; pg. 12
- $\dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ – aplicação de uma regra arbitrária; pg. 13
- o – objeto variante; pg. 58
- $\mathcal{V}$,$\mathcal{W}$ – coleções de objetos variantes; pg. 58
- $\vdash^{\gamma}_{\mathsf{C}}$ relação de dependência em um cálculo; pgs. 59, 72
- $\vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}}$ – relação de dependência por um número finito de objetos variantes em um cálculo; pg. 59
- $\vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}}$ – conseqüência invariante em um cálculo; pg. 59
- $\Vdash^{\gamma}_{\mathsf{C}}$ – relação de sustentação em um cálculo; pgs. 61, 72
- $\Vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}}$ – relação de sustentação por um número finito de objetos variantes em um cálculo; pg. 61
- $\Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}}$ – conseqüência estável em um cálculo; pg. 61
- $\mathsf{C}[\Gamma]$ – cálculo aplicado acrescido de uma coleção de axiomas; pg. 69
- $\mathsf{C}[\alpha]$ – cálculo aplicado acrescido de um axioma; pg. 69

- **MP** – regra modus ponens; pg. 70
- **Gen** – regra da generalização; pg. 71
- **te** – princípio do terceiro excluído; pg. 86
- **nc** – princípio da não contradição; pg. 86
- **→-1**, **→-2**, **→-3** – esquemas básicos da implicação; pg. 70
- **∧-1**, **∧-2**, **∧-3** – esquemas básicos da conjunção; pg. 70
- **∨-1**, **∨-2**, **∨-3** – esquemas básicos da disjunção; pg. 70
- **∀-1**, **∀-2**, **∀-3** – postulados universais básicos; pg. 71
- **∃-1**, **∃-2**, **∃-3** – postulados existenciais básicos; pg. 71
- **∀-4**, **∀-5**, **∀-6** – postulados universais extras; pg. 72
- **∃-4**, **∃-5**, **∃-6** – postulados existenciais extras; pg. 72
- **¬-1**, **¬-2**, **¬-3**, **¬-4** – postulados proposicionais da negação; pg. 85
- **¬-5**, **¬-6** – postulados quantificacionais da negação; pg. 86
- **⊥-1**, **⊥-2** – postulados do absurdo; pgs. 86, 86
- $\mid\!\!\frac{\quad}{\mathbb{L}(L_0)}$ – relação de conseqüência especificada por uma lógica aplicada a uma linguagem; pg. 8
- $\mid\!\!\frac{\quad}{\mathbb{L}}$ – relação de conseqüência especificada por uma lógica; pg. 8
- $\vdash_{\mathbb{L}(L_0)}$ – relação de conseqüência especificada por um cálculo definindo uma lógica $\mathbb{L}$, aplicado a uma linguagem; pg. 15
- $\vdash_{\mathbb{L}}$ – relação de conseqüência especificada por um cálculo definindo uma lógica $\mathbb{L}$; pg. 15
- $\models_{\mathbb{L}(L_0)}$ – relação de conseqüência especificada por uma semântica definindo uma lógica $\mathbb{L}$, aplicada a uma linguagem; pg. 15
- $\models_{\mathbb{L}}$ – relação de conseqüência especificada por uma semântica definindo uma lógica $\mathbb{L}$; pg. 15
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ – pgs. 19, 19
- $\alpha \Rightarrow \beta$ – pgs. 19, 19
- $\alpha \Leftrightarrow \beta$ – pgs. 19, 19
- $\sim\alpha$ – pgs. 19, 87, 96, 106, 114, 123, 128
- α^{o} – pgs. 19, 19
- α^{*} – pgs. 19, 19

- $\alpha?$ – pgs. 19, 104, 123
- $\alpha!$ – pgs. 19, 106, 121
- $\forall_{\mathbf{v}} \nu\ \alpha$ – pg. 114
- $\exists_{\mathbf{v}} \nu\ \alpha$ – pg. 128
- $\exists_{\mathbf{w}} \nu\ \alpha$ – pg. 128
- **T** – valor veritativo "true"; pgs. 97, 98, 99, 100, 100, 101
- **F** – valor veritativo "false"; pgs. 97, 98, 99, 100, 100, 101
- **O** – valor veritativo "overdefined"; pgs. 98, 98, 100, 101
- **U** – valor veritativo "underdefined"; pgs. 99, 100, 100, 101
- **LEI** – lógica da plausibilidade crédula; pgs. 104, 109
- **LEI'** – lógica auxiliar para a prova de completude de **LEI**; pgs. 113, 115
- $\mathsf{L}_?$ – linguagem para **LEI**; pg. 104
- $\mathsf{L}'_?$ – linguagem para **LEI'**; pgs. 113, 114
- $\mathbf{u}$ – a única espécie de $\mathsf{L}_?$ e uma das duas espécies de $\mathsf{L}'_?$; pg. 113
- $\mathbf{v}$ – uma das duas espécies de $\mathsf{L}'_?$; pg. 113
- **f** – tradução de **LEI** para **LEI'**; pg. 114
- $\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}$ – estrutura simples para $\mathsf{L}_?$, dadas uma estrutura simples $\mathfrak{U}$ para $\mathsf{L}'_?$ e um indivíduo **d**; pgs. 114
- $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{U}}$ – **LEI**-estrutura correspondente a uma **LEI'**-estrutura $\mathfrak{U}$; pg. 114
- **RDL** – lógica de defaults de Reiter; pg. 117
- $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\gamma}$ – default; pg. 117
- **IDL** – lógica de defaults crédula; pg. 119
- $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta?}$, $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta?}$ – **IDL**-defaults; pg. 119
- **LSR** – lógica da plausibilidade cética; pgs. 121, 125
- **LSR'** – lógica auxiliar para a prova de completude de **LSR**; pgs. 128, 130
- $\mathsf{L}_!$ – linguagem para **LSR**; pg. 121
- $\mathsf{L}'_!$ – linguagem para **LSR'**; pgs. 127, 128
- $\mathbf{u}$ – a única espécie de $\mathsf{L}_!$ e uma das duas espécies próprias de $\mathsf{L}'_!$; pg. 127
- $\mathbf{v}$ – uma das duas espécies próprias de $\mathsf{L}'_!$; pg. 127
- $\mathbf{w}$ – a única espécie não própria de $\mathsf{L}'_!$; pg. 127
- **g** – tradução de **LSR** para **LSR'**; pg. 129

- $\mathbf{U_d}$ – estrutura simples para $L_!$, dadas uma estrutura simples **U** para $\dot{L}_!$ e um indivíduo **d**; pgs. 129
- Y_U, Y'_U – **LSR**-estruturas correspondentes a uma **LSR'**-estrutura **U**; pg. 129
- **SDL** – lógica de defaults cética; pg. 133
- $\frac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$, $\frac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$ – **SDL**-defaults, pg. 132
- **W** – coleção de sentenças; pgs. 117, 119, 132, 132
- **D** – coleção de defaults, **IDL**-defaults ou **SDL**-defaults; pgs. 117, 119, 132, 132
- $\Delta = \langle \mathbf{W}, \mathbf{D} \rangle$ – **RDL**-base, **IDL**-base, ou **SDL**-base; pgs. 117, 119, 132, 132
- **D'**, **D"** – coleções de exemplares de **SDL**-defaults de **D**; pg. 132
- **S**,**T** – coleções de sentenças em $L_!$; pg. 132
- **Cons**(**D**) – conseqüentes de uma coleção de **SDL**-defaults; pg. 132
- $\tau_\Delta(\mathbf{S})$ – expansão de uma coleção **S** de sentenças por uma **RDL**-base, **IDL**-base, ou **SDL**-base Δ; pgs. 117, 119, 133

Convenções Gerais

Este trabalho é dividido em capítulos, e cada capítulo é dividido em seções. Quando quisermos nos referir a um teorema ou definição, dentro do mesmo capítulo, daremos o número da seção em que este ocorre seguido pelo seu número da seção. Por exemplo, o lema 3.2.2 refere-se ao segundo enunciado enumerado da segunda seção do capítulo 3, e, dentro do mesmo capítulo, referimo-nos ao mesmo lema por lema 2.2.

Indicamos o final de provas de teoremas possuindo um ou mais parágrafos próprios pelo sinal "●".

As expressões "ent" e "sss" são usadas respectivamente para indicar a implicação e a equivalência informais. "ent" é abreviatura para "se … então" e "sss" é abreviatura para "se, e somente se".

1. INTRODUÇÃO

"Tudo é duplo; tudo tem dois pólos; tudo tem seu par de opostos;
o semelhante e o dessemelhante são uma só coisa; os opostos são idênticos
em natureza, mas diferentes em grau; os extremos se tocam; todas
as verdades são meias-verdades; todos os paradoxos podem
ser reconciliados." – O Caibalion

§1. Motivações Iniciais

Como uma forma de vida, um dos principais atributos que parecem distinguir o homem das demais espécies que habitam neste planeta é a consciência de sua própria *individualidade*. Um animal, embora seja capaz de experimentar frio, fome, e outras sensações, não consegue em geral atribuir estas vivências a si próprio, como um indivíduo aparentemente separado do meio ambiente circundante. Tal distinção não parece ser absoluta, já que algumas outras formas superiores de vida revelam indícios de uma consciência da própria individualidade.

Esta individualidade geralmente se exerce, no ser humano, pelo menos até o estágio presente, pelo exercício do *pensamento* em uma forma mais ou menos organizada, sendo que o grau desta organização determina em uma certa escala o refinamento desta faculdade. Na medida em que o pensamento expressa uma organização ele é dito *racional*.

A *razão* funciona em duas fases que atuam de uma forma mais ou menos sinérgica:

- *representação do mundo* em uma estrutura concebível pela consciência pensante; a forma em que tal representação refletiria de modo mais ou menos fiel a realidade do mundo tem originado inúmeras controvérsias entre os filósofos de todos os tempos e lugares;
- *raciocínio inferencial* do relativamente conhecido para o desconhecido, segundo esta representação.

Em [**22**], pg. 2, da Costa designa estes dois processos respectivamente de *razão constitutiva* e *razão operativa*.

As formas de razão constitutiva e operativa adotadas pelo homem podem variar conforme a época e a cultura de uma dada sociedade, bem como de indivíduo para indivíduo.

Um dos principais objetos da Lógica, como ciência e como arte, é a reflexão das diversas formas de razão operativa em certos contextos lingüísticos, denominados por da Costa *contextos racionais*, em [22], pg. 4.

A razão operativa pode por sua vez ser distinguida em *razão positiva* e *razão negativa*. Pela última, entendemos a postura racional que consiste em questionar exaustiva e radicalmente todas as normas em uso e todas as crenças tidas como verdadeiras. Essa atitude é comumente designada de *cética* e opõe-se a uma postura *crédula* ou *ingênua* com respeito ao conhecimento estabelecido. Em seu extremo, o ceticismo leva à postulação da impossibilidade de qualquer conhecimento, o que, para alguns filósofos, acarreta sua própria implosão, uma vez que o estabelecimento da impossibilidade de qualquer conhecimento é, por sua vez, um conhecimento. Uma atitude cética mais adequada é, portanto, uma disposição reativa de demolição racional do que é apresentado como formas de conhecimento.

Esse é o tipo de atitude cética advogada e exercida por filósofos racionalistas, como Descartes, que a adotava como componente parcial de um método de investigação racional que consistia em questionar radicalmente o conhecimento tido como estabelecido, seguido da construção, em bases prudentes e tidas por ele como absolutamente racionais, de um sistema alternativo. Essa segunda parte é característica da atividade positiva da razão.

Em suma, para cada indivíduo, a razão pode atuar em duas direções:

- no sentido positivo, através da construção de teorias alternativas àquela(s) dominante(s) que condicionam o indivíduo; a possível superioridade das novas teorias sobre as antigas poderá ocasionar o ocaso destas – um exemplo de tal processo deu-se na Renascença, com a aurora das ciências modernas e o conseqüente declínio, no Ocidente, das formas institucionalizadas das religiões;

- no sentido negativo, através do levantamento das premissas que teriam originado o atual corpo de idéias; um exame honesto poderá colocar por terra diversos preconceitos pessoais – a intensidade e acurácia deste exame seria a medida de seu sucesso.

Acreditamos que, no plano psicológico, um exercício confiante e intenso das faculdades racionais pode ser capaz de levar o homem a superar muitos dos preconceitos que constrangem o seu modo de viver.

Uma boa parte deste questionamento está na aprendizagem e exercício de formas de raciocínio alternativas àquelas que vêm sendo adotadas de forma dominante e até exclusiva pela maioria da humanidade. No Ocidente, desde Aristóteles, estamos condicionados ao uso de uma forma de raciocínio que costumamos denominar *clássica*. Segundo os lógicos fiéis à tradição aristotélica, há três princípios básicos que regem o pensamento válido, dos quais damos abaixo uma formulação semântica:

- *princípio da não contradição* – duas fórmulas contraditórias não podem ser ambas verdadeiras;
- *princípio do terceiro excluído* – duas fórmulas contraditórias não podem ser ambas falsas;
- *princípio da identidade* – uma fórmula verdadeira é sempre verdadeira, e uma falsa é sempre falsa.[1]

Neste trabalho especificamos semantica e axiomaticamente uma classe de lógicas que derrogam o princípio da não contradição (ditas *lógicas da inconsistência* ou *paraconsistentes*), o princípio do terceiro excluído (ditas *lógicas da incompletude* ou *paracompletas*) ou ambos estes princípios (ditas *lógicas não aléticas*). Na construção de cada uma destas lógicas, as seguintes diretrizes nos nortearam:

1ª) a negação deve se comportar da forma heterodoxa requerida pela lógica em questão;

2ª) a implicação, conjunção, disjunção, e a quantificação universal e existencial devem possuir as propriedades clássicas;

[1] Segundo [37], pg. 1, todo sistema lógico possui uma semântica bivalente.

3ª) todas as inferências envolvendo a negação classicamente válidas devem ser válidas para a lógica em questão, desde que a primeira diretriz não seja violada.

Esta empreitada tomou como ponto de partida o trabalho pioneiro de da Costa, que criou uma série de lógicas, apresentadas em [19], [21] e [26], que demonstraram a viabilidade técnica da construção de sistemas lógico-formais derrogando os princípios clássicos. O programa de da Costa teve o mérito de remover definitivamente objeções de ordem técnica, além de fornecer uma contribuição inestimável à filosofia: a demonstração de que racionalidades divergentes são, do ponto de vista lógico, perfeitamente realizáveis.

Achamos interessante neste ponto citar Popper, em [45], pg. 352: *"Pode-se levantar a questão de saber se essa situação ocorre em qualquer sistema lógico ou se podemos construir uma lógica em que afirmativas contraditórias não impliquem qualquer conclusão. Examinei este assunto, para concluir que é possível elaborar uma tal lógica – a qual contudo, seria muito fraca: poucas das regras ordinárias de inferência permaneceriam de pé, desaparecendo até mesmo o modus ponens…"*. Esta asserção é completamente sobrepujada pelo trabalho de da Costa em [19], onde é apresentada uma família de lógicas paraconsistentes suficientemente fortes ao ponto de possuírem todas as regras de inferência clássicas, concernentes aos conectivos e quantificadores distintos da negação.

A atitude de da Costa na construção de seus sistemas pode ser descrita como a do lógico puro exercitando possibilidades na elaboração de sistemas formais e explorando suas propriedades matemáticas. Um trabalho em ciência da computação, na área da Inteligência Artificial, como é o caso da presente tese, carece no entanto de uma motivação adicional. Do ponto de vista da IA, a lógica constitui-se em um instrumento para a modelagem do raciocínio e para a representação do conhecimento. A atitude do cientista de IA, diante da lógica, é a do lógico aplicado, que busca na elaboração de sistemas lógicos a formalização dos métodos de inferência e raciocínio relevantes para o seu ofício. Em particular, nos dedicamos ao problema do raciocínio em condições de conhecimento incompleto e/ou impreciso. Esse tipo de raciocínio possui uma componente indutiva: suas inferências não podem em geral serem realizadas em bases puramente locais, como na aplicação de regras de inferência dedutivas, mas devem apelar para a verificação de propriedades globais da teoria. Isso acarreta a reconhecida não-monotonicidade desse tipo de raciocínio, isto é, a falta de estabilidade de suas inferências com respeito à introdução de novas premissas. Acarreta também, como uma espécie de efeito colateral, a introdução de conclusões parciais contraditórias no curso do raciocínio (vide [33], por exemplo).

Esse segundo efeito foi menos aclamado na literatura específica das lógicas não monotônicas em Inteligência Artificial. Na realidade, pode-se dizer que grande parte do esforço despendido na área foi no sentido de escamoteá-lo. Uma das formas propostas para fazê-lo seria a adoção de uma atitude descrita como *cética* ou *cautelosa*, que pode ser resumida na prescrição de, diante de um par de conclusões contraditórias, dispensá-las. A atitude dual, denominada *crédula*, prescrevia a manutenção pelo menos temporária de ambas as conclusões, alocando-as porém em ramificações distintas, de forma a que a consistência interna, e portanto uma análise clássica, em cada uma delas pudesse ser mantida. Ambos os procedimentos acarretavam, por sua vez, um inesperado e indesejado efeito colateral, identificado por Hanks e McDermott em [32]. Todas as lógicas não monotônicas, propostas até então, falhavam em extrair a conclusão esperada e em expurgar as indesejadas em certas situações nas quais as evidências eram claramente em favor da primeira. Esses exemplos revelavam uma falha de discriminação na análise proporcionada por essas lógicas, e tornou-se conhecido como o problema das extensões anômalas.

O artigo de Hanks e McDermott e a comoção provocada na área foram o ponto de partida motivacional para a linha de investigação que desemboca na presente tese. Em [Pequeno,1990] é observado que o efeito indesejado provém justamente da prática de varrer para debaixo do tapete, talvez cedo demais, as contradições que ocorrem no curso do raciocínio. No referido artigo é proposta uma lógica não monotônica, denominada *Inconsistent Default Logic*, **IDL**, capaz de resolver o problema. Em uma linha de argumentação mais profunda, subjacente a essa proposta, é defendido em [Pequeno,1990] que o papel do raciocínio não é apenas o de produzir conclusões a partir das premissas existentes mas o de promover uma análise das evidências disponíveis e de suas relações com possíveis conclusões. No caso do raciocínio dedutivo, em virtude de sua simplicidade relativa, esses dois papéis se confundem. No caso porém do raciocínio de caráter indutivo essa distinção é crucial e negligenciá-la conduz ao erro metodológico apontado no artigo.

A formalização do raciocínio não monotônico se dá pela introdução de regras formando uma camada inferencial que estende uma lógica dedutiva, denominada *base monotônica* do raciocínio. Tipicamente, a base monotônica é a lógica clássica. A adoção do regime de raciocínio proposto em **IDL**, porém, requer a utilização de uma lógica paraconsistente que proporcione o raciocínio desejado. Essa lógica foi denominada **LEI**, a sigla para *Logic of Epistemic Inconsistency*. O artigo original propõe um esboço dessa lógica, mas sua completa formulação está em [Pequeno & Buchsbaum,1991], que foi o primeiro resultado divulgado do trabalho contido nesta tese (capítulo 4).

Dando conseqüência às observações metodológicas que deram nascimento a essa tese, procuramos explorar também a alternativa dual ao regime de inferência adotado em **IDL**. Criamos então uma formulação não monotônica de inspiração cética, ou cautelosa, denominada **SDL**, a sigla para *Skeptical Default Logic*. Esse sistema requer, por sua vez, uma base monotônica, também não clássica, denominada **LSR**, a sigla para *Logic of Skeptical Reasoning*. **LSR** é uma lógica paracompleta e está apresentada no capítulo 5.

Dadas essas motivações iniciais, vinculadas fortemente a aplicações em IA, não fomos capazes de resistir à exploração dos mecanismos utilizados na elaboração dessas lógicas para a criação e o estudo de uma série de sistemas lógicos alternativos, paraconsistentes, paracompletos e não aléticos, com propriedades extremamente interessantes. Esses estudos tomaram tal dimensão que passaram a constituir o corpo principal do trabalho. As lógicas pioneiras de da Costa cumpriram o importante papel já mencionado acima e podem ser consideradas como uma primeira geração de sistemas lógicos explorando variações cruciais no comportamento da negação. Elas apresentam porém algumas deficiências que não são estritamente necessárias para a manutenção de sua propriedades heterodoxas. Uma das principais críticas que têm sido feitas acerca das lógicas paraconsistentes definidas por da Costa em [19] é a não recursividade de suas semânticas. Em [46], pg. 116, é dito: "*The second objection to da Costa semantics is that they are non recursive. Now whilst non-recursive semantics may be admirable for many technical purposes, there are good reasons for not being philosophically satisfied with them. The arguments are well known but the crucial point is something like this: since speakers of a language are able to understand sentences they have never heard before, the sense of meaning of a sentence must be determined by the senses of its components. In particular, then, an adequate semantics must specify recursively the meaning of a sentence in terms of the meaning of its components. Thus generally speaking the specification of semantic conditions must be recursive.*" É claro que uma crítica análoga vale também para as lógicas paracompletas e não aléticas já citadas definidas por da Costa. As lógicas que construímos neste trabalho conseguem superar muitas destas deficiências, e todas elas possuem semânticas recursivas.

Em suma, essa tese busca contribuir em duas direções. Por um lado, pela utilização da metodologia lógica e das contribuições dos lógicos para a elaboração de sistemas formais capazes de modelar regimes de raciocínio de interesse na Inteligência Artificial e na compreensão das práticas de inferência realizadas pelo senso comum. Por outro, pretende contribuir para o universo dos sistemas lógico-formais não clássicos pela apresentação de uma família dessas lógicas com propriedades interessantes do ponto de vista formal. Assim, nos capítulos 2 e 3 definimos respectivamente semânticas e axiomáticas para uma classe de lógicas da inconsistência e/ou da incompletude, cujo principal objetivo foi superar estes problemas da forma mais simples que pudemos vislumbrar, daí denominamos aqui estas lógicas, neste trabalho, de *básicas*. Nos capítulos 4 e 5 definimos respectivamente uma lógica paraconsistente e uma paracompleta, mais complexas que as básicas, refletindo o conceito de *plausibilidade* respectivamente na forma *crédula* e *cética*.

§2. Conceitos Básicos

Expomos nesta seção os conceitos fundamentais que estarão presentes em várias partes ao longo deste trabalho.

<u>Definição 2.1</u>: Um *alfabeto* é uma coleção não vazia de sinais gráficos. Uma seqüência finita de sinais de um alfabeto Σ é dita uma *samblagem em* Σ. A coleção de todas as samblagens não vazias de um alfabeto Σ é notada por Σ^+. Se α,β,γ são samblagens em Σ tais que β não possui duas ocorrências distintas em α possuindo algum sinal comum, então notamos por $\alpha(\beta|\gamma)$ à samblagem em Σ obtida substituindo em α todas as ocorrências de β por γ.

<u>Definição 2.2</u>: Um subconjunto não vazio de Σ^+, onde Σ é um alfabeto, é dito uma *linguagem formal (em* Σ*)*. Se L é uma linguagem formal, os elementos de L são ditos *fórmulas de* L. Se α e α' são fórmulas de L tais que α ocorre em α', dizemos que α é uma *subfórmula de* α' *(em* L*)*.

<u>Definição 2.3</u>: Um *domínio formal* $\mathfrak{D}$ é uma coleção de linguagens formais tal que, dada uma família $(\mathsf{L_i})_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}}$ de linguagens de $\mathfrak{D}$, as seguintes condições sejam cumpridas:

- se $\mathbf{I}$ é finito e $\bigcap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathsf{L_i} \neq \varnothing$, então $\bigcap_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathsf{L_i} \in \mathfrak{D}$;
- $\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} \mathsf{L_i} \in \mathfrak{D}$.

<u>Definição 2.4</u>: Seja $\mathfrak{D}$ um domínio formal. Uma *lógica* $\mathbb{L}$ *(baseada em* $\mathfrak{D}$*)* é uma função que associa a cada $\mathsf{L_0} \in \mathfrak{D}$[1] um par $\langle \mathsf{L_0}, \vdash_{\mathbb{L}(\mathsf{L_0})} \rangle$, onde $\vdash_{\mathbb{L}(\mathsf{L_0})}$ é uma relação binária contida em $\mathcal{P}(\mathsf{L_0}) \times \mathsf{L_0}$; dizemos neste caso que $\mathsf{L_0}$ é uma *linguagem para* $\mathbb{L}$ e que $\mathbb{L}(\mathsf{L_0})$ é uma *lógica*

[1] $\mathfrak{D}$ é dito o domínio formal de $\mathbb{L}$.

aplicada[1]. Dizemos que Γ é uma *coleção de fórmulas em* $\mathbb{L}$ se existe $\mathbf{L_0} \in \mathfrak{D}$ tal que $\Gamma \subseteq \mathbf{L_0}$; e que α é uma *fórmula em* $\mathbb{L}$ se existe $\mathbf{L_0} \in \mathfrak{D}$ tal que $\alpha \in \mathbf{L_0}$. Abaixo são dados mais alguns conceitos adicionais:

- $\mathbb{L}$ é *invariante (com respeito a mudanças de linguagem)*[2] $\rightleftharpoons$ dados $\mathbf{L_0},\mathbf{L_1} \in \mathfrak{D}$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L_0} \cap \mathbf{L_1}$, $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$ sss $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_1})} \alpha$;
- se $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$, dizemos então que α é uma $\mathbb{L}$-*conseqüência de* Γ *em* $\mathbf{L_0}$, ou que α é um $\mathbb{L}$-teorema de Γ em $\mathbf{L_0}$;
- $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \alpha \rightleftharpoons \Gamma \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$, para todo $\mathbf{L_0} \in \mathfrak{D}$ tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L_0}$; dizemos neste caso que α é uma $\mathbb{L}$-*conseqüência de* Γ, ou que α é um $\mathbb{L}$-teorema de Γ;
- $\vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha \rightleftharpoons \varnothing \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$; dizemos neste caso que α é uma tese de $\mathbb{L}$ em $\mathbf{L_0}$;
- $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha \rightleftharpoons \varnothing \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$; dizemos neste caso que α é uma tese de $\mathbb{L}$;
- Γ é $\mathbb{L}$-*trivial em* $\mathbf{L_0}$ $\rightleftharpoons$ para cada $\alpha \in \mathbf{L_0}$, $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$;
- Γ é $\mathbb{L}$-*trivial* (ou *trivial em* $\mathbb{L}$) $\rightleftharpoons$ Γ é $\mathbb{L}$-trivial em $\mathbf{L_0}$, para cada $\mathbf{L_0} \in \mathfrak{D}$.

Se $\mathbb{L}$ ou $\mathbb{L}(\mathbf{L_0})$ estiver subentendido, poderemos escrever "$\vdash$" ao invés de "$\vdash_{\mathbb{L}}$" ou "$\vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})}$".

<u>Definição 2.5</u>: Sejam $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}_1$ lógicas. Dizemos que $\mathbb{L}_1$ é uma *extensão conservativa de* $\mathbb{L}_0$ se as seguintes cláusulas forem cumpridas:

- toda linguagem para $\mathbb{L}_0$ é um subconjunto de uma linguagem para $\mathbb{L}_1$;
- toda linguagem para $\mathbb{L}_1$ é um superconjunto de uma linguagem para $\mathbb{L}_0$;
- para quaisquer linguagens $\mathbf{L_0},\mathbf{L_1}$ respectivamente para $\mathbb{L}_0$ e $\mathbb{L}_1$, tais que $\mathbf{L_0} \subseteq \mathbf{L_1}$, e, para quaisquer Γ e α tais que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbb{L}_0$, $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}_0(\mathbf{L_0})} \alpha$ sss $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}_1(\mathbf{L_1})} \alpha$.

<u>Definição 2.6</u>: Um *domínio veritativo* $\mathbb{V}$ é uma coleção possuindo pelo menos dois elementos, ditos *valores veritativos (de* $\mathbb{V}$*)*, munida de um subconjunto próprio não vazio de $\mathbb{V}$, cujos elementos são ditos *valores distinguidos (de* $\mathbb{V}$*)*[1].

---

[1] Às vezes, neste trabalho, desde que não haja margem para confusões, poderemos usar a expressão "lógica" ao invés da expressão "lógica aplicada".

[2] Todas as lógicas definidas neste trabalho são invariantes.

<u>Definição 2.7</u>: Sejam $\mathfrak{D}$ um domínio formal e $\mathbb{V}$ um domínio veritativo. Uma *semântica (de valorações)* $\mathbb{S}$ *(baseada em* $\mathfrak{D}$[2] *e* $\mathbb{V}$[3]*)* é uma função que associa cada $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ a um par $\langle \mathsf{L}, \Lambda \rangle$, dito uma *semântica aplicada*, onde Λ é uma coleção de funções de L em $\mathbb{V}$, ditas $\mathbb{S}$-*valorações para* L. Sejam $\mathbf{V}$ uma $\mathbb{S}$-valoração para L, e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$. Dizemos que $\mathbf{V}$ *satisfaz* α (em $\mathbb{S}$) se $\mathbf{V}(\alpha)$ é um valor distinguido de $\mathbb{V}$; e que $\mathbf{V}$ satisfaz Γ se $\mathbf{V}(\gamma)$ é um valor distinguido de $\mathbb{V}$, para cada $\gamma \in \Gamma$. Se $\mathbf{V}$ é uma $\mathbb{S}$-valoração para L que satisfaz cada fórmula de L, então $\mathbf{V}$ é dita uma $\mathbb{S}$-*valoração trivial para* L; caso contrário $\mathbf{V}$ é dita uma $\mathbb{S}$-*valoração não trivial para* L. $\mathbb{S}$ é dita *invariante (com respeito a mudanças de linguagem)*[4] se as seguintes cláusulas forem satisfeitas, dadas duas linguagens $\mathsf{L}_0, \mathsf{L}_1 \in \mathfrak{D}$, tais que $\mathsf{L}_0 \subseteq \mathsf{L}_1$:

- cada $\mathbb{S}$-valoração para L_0 possui uma extensão que é uma $\mathbb{S}$-valoração para L_1;
- a restrição de uma $\mathbb{S}$-valoração para L_1 em L_0 é uma $\mathbb{S}$-valoração para L_0.

<u>Definição 2.8</u>: Sejam $\mathfrak{D}$ um domínio formal, $\mathbb{V}$ um domínio veritativo, $\mathbb{S}$ uma semântica baseada em $\mathfrak{D}$ e $\mathbb{V}$, $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$. Abaixo são dados alguns conceitos semânticos adicionais:

- α (Γ) é $\mathbb{S}$-*satisfatível em* L $\rightleftharpoons$ existe uma $\mathbb{S}$-valoração para L que satisfaz α (Γ);
- α (Γ) é $\mathbb{S}$-*satisfatível* $\rightleftharpoons$ α (Γ) é $\mathbb{S}$-satisfatível em L, para todo $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ tal que $\alpha \in \mathsf{L}$ ($\Gamma \subseteq \mathsf{L}$);
- α (Γ) é $\mathbb{S}$-*insatisfatível em* L $\rightleftharpoons$ toda $\mathbb{S}$-valoração para L não satisfaz α (Γ);
- α (Γ) é $\mathbb{S}$-*insatisfatível* $\rightleftharpoons$ α (Γ) é $\mathbb{S}$-insatisfatível em L, para todo $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ tal que $\alpha \in \mathsf{L}$ ($\Gamma \subseteq \mathsf{L}$);
- α (Γ) é $\mathbb{S}$-*válido em* L $\rightleftharpoons$ toda $\mathbb{S}$-valoração para L satisfaz α (Γ);
- α (Γ) é $\mathbb{S}$-*válido* $\rightleftharpoons$ α (Γ) é $\mathbb{S}$-válido em L, para todo $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ tal que $\alpha \in \mathsf{L}$ ($\Gamma \subseteq \mathsf{L}$);
- α é $\mathbb{S}$-*conseqüência de* Γ *em* L, e notamos isto por $\Gamma \models_{\mathbb{S}(\mathsf{L})} \alpha$, se toda $\mathbb{S}$-valoração para L que satisfaz Γ satisfaz α;

---

[1] O domínio veritativo para quase todas as semânticas definidas neste trabalho é o conjunto binário {0,1}, cujo único valor distinguido é 1; as únicas exceções ficam por conta das semânticas matriciais definidas na 4ª seção do capítulo 2.

[2] $\mathfrak{D}$ é dito o domínio formal de $\mathbb{S}$.

[3] $\mathbb{V}$ é dito o domínio veritativo de $\mathbb{S}$.

[4] Todas as semânticas definidas neste trabalho são invariantes.

- α é $\mathbb{S}$-*conseqüência de* Γ, e notamos isto por $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$, se α é $\mathbb{S}$-conseqüência de Γ em $\mathbf{L}$, para todo $\mathbf{L} \in \mathfrak{D}$ tal que $\Gamma \cup \alpha \subseteq \mathbf{L}$.

Escólio 2.9: Toda semântica define uma lógica.

Escólio 2.10: Sejam $\mathbb{S}$ uma semântica, $\mathbf{L}$ uma linguagem em $\mathbb{S}$[1], e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L}$. Então as seguintes asserções são verdadeiras:

- se Γ não é $\mathbb{S}$-trivial em $\mathbf{L}$, então Γ é $\mathbb{S}$-satisfatível em $\mathbf{L}$;
- se Γ é $\mathbb{S}$-satisfatível em $\mathbf{L}$ e toda $\mathbb{S}$-valoração para $\mathbf{L}$ é não trivial, então Γ não é $\mathbb{S}$-trivial em $\mathbf{L}$;
- α é $\mathbb{S}$-válido em $\mathbf{L}$ sss $\models_{\mathbb{S}(\mathbf{L})} \alpha$.

Escólio 2.11: Sejam $\mathbb{S}$ uma semântica invariante, $\mathbf{L}$ uma linguagem em $\mathbb{S}$, e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L}$. Então as seguintes proposições são verdadeiras:

- Γ é $\mathbb{S}$-satisfatível sss Γ é $\mathbb{S}$-satisfatível em $\mathbf{L}$;
- Γ é $\mathbb{S}$-válido sss Γ é $\mathbb{S}$-válido em $\mathbf{L}$;
- $\Gamma \models_{\mathbb{S}} \alpha$ sss $\Gamma \models_{\mathbb{S}(\mathbf{L})} \alpha$.

---

[1] Uma linguagem do domínio formal de $\mathbb{S}$.

Definição 2.12: Seja L uma linguagem formal. Um *esquema em* L é um subconjunto não vazio de L. Uma *regra (de inferência) em* L é uma relação $\mathbf{n}$-ária não vazia em L, onde $\mathbf{n}$ é um número natural maior ou igual a 2; dizemos neste caso que $\mathbf{n}$-1 é a aridade da regra. Um *postulado em* L é um esquema em L ou uma regra de inferência em L. Seja $\mathfrak{D}$ um domínio formal. Um *cálculo* C (*baseado em* um domínio formal $\mathfrak{D}$[1]) é uma função que associa a cada $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ um par $\langle \mathsf{L}, \mathbb{P} \rangle$, dito um *cálculo aplicado*, onde $\mathbb{P}$ é uma coleção de postulados em L, ditos *postulados de* C *em* L, ou *postulados do* cálculo aplicado $\mathsf{C}(\mathsf{L})$.

Escólio 2.13: Se C é um dos cálculos definidos neste trabalho, então, dadas duas linguagens para C, existe uma correspondência biunívoca entre os postulados destas linguagens de modo que se $(\mathsf{L}_\mathbf{i})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ é uma família de linguagens para C e $(\Pi_\mathbf{i})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ é uma família indiciada por $\mathbf{I}$ tal que todo $\Pi_\mathbf{i}$ é um postulado de C em $\mathsf{L}_\mathbf{i}$ e os $\Pi_\mathbf{i}$'s são correspondentes dois a dois, as seguintes condições são satisfeitas:

- dados dois postulados correspondentes, ambos são esquemas de C[2] ou ambos são regras de C[3] de mesma aridade;
- se $\mathbf{I}$ é finito e $\bigcap_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathsf{L}_\mathbf{i} \neq \varnothing$, então $\bigcap_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \Pi_\mathbf{i}$ é um postulado de C em $\bigcap_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathsf{L}_\mathbf{i}$;
- $\bigcup_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \Pi_\mathbf{i}$ é um postulado de C em $\bigcup_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \mathsf{L}_\mathbf{i}$.

---

[1] $\mathfrak{D}$ é dito *o domínio formal de* C.

[2] Referimo-nos a postulados de C que são esquemas axiomáticos.

[3] Referimo-nos a postulados de C que são regras.

Definição 2.14: Sejam $\mathfrak{D}$ um domínio formal, C um cálculo baseado em $\mathfrak{D}$, e $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$. Um *axioma de* C *em* L é um elemento de um esquema de C em L. Uma *aplicação de regra de* C *em* L é um elemento de uma regra de C em L. Se $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha\rangle$ é uma aplicação de uma regra de C em L, notamos usualmente $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha\rangle$ por $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$; dizemos neste caso que $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ são as hipóteses da aplicação, e que α é a conseqüência da aplicação. Uma C-*demonstração* $\mathcal{D}$ *em* L, *de* α *a partir de* Γ, é uma seqüência finita não vazia de fórmulas de L tal que α figura nesta seqüência e cada termo β desta seqüência pode ser justificado como um elemento de Γ[1], como um axioma de C em L, ou como uma conseqüência de uma aplicação $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra de C em L tal que $\beta_1,\ldots,\beta_n$ precedem β em $\mathcal{D}$. Abaixo é dado o conceito de conseqüência em C:

- α é C-conseqüência de Γ em L, e notamos isto por $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}(\mathsf{L})} \alpha$, se existe uma C-demonstração $\mathcal{D}$ em L, de α a partir de Γ;
- α é C-conseqüência de Γ, e notamos isto por $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}(\mathsf{L})} \alpha$, para todo $\mathsf{L} \in \mathfrak{D}$ tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$..

Escólio 2.15: Todo cálculo define uma lógica.

Escólio 2.16: Se C é um cálculo e $\Gamma \cup \{\alpha\}$ é uma coleção de fórmulas em C, então a relação "$\vdash_{\mathsf{C}}$" goza das seguintes propriedades:

- se α é um axioma de C, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ é a aplicação de uma regra de C, então $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha_n$ e $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \vdash_{\mathsf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \beta$;
- se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\Gamma' \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ então existe um subconjunto finito Γ' de Γ tal que $\Gamma' \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$.

[1] Dito *premissa em* $\mathcal{D}$.

Definição 2.17: Sejam **C**,**C'** cálculos baseados no mesmo domínio formal. Se **L** é uma linguagem para **C** e **C'**, e todo postulado de **C** em **L** é um postulado de **C'** em **L**, dizemos então que **C** é um *subcálculo de* **C'** *em* **L**, ou que **C'** é um *supercálculo de* **C** *em* **L**. Se para toda linguagem **L** para **C** e **C'**, **C** é um subcálculo de **C'** em **L**, dizemos então que **C** é um *subcálculo de* **C'**, ou que **C'** é um *supercálculo de* **C**.

Escólio 2.18: Sejam **C**,**C'** cálculos, **L** uma linguagem para **C** e **C'**, e $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L}$. Então as seguintes asserções se realizam:

- se **C** é um subcálculo de **C'** em **L**, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L)}} \alpha$ acarreta $\Gamma \vdash_{\mathbf{C'(L)}} \alpha$;
- se **C** é um subcálculo de **C'**, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$ acarreta $\Gamma \vdash_{\mathbf{C'}} \alpha$.

Definição 2.19: Sejam **C** um cálculo e $\mathbb{L}$ uma lógica possuindo o mesmo domínio formal $\mathfrak{D}$. Dizemos que **C** é *correto com respeito a* $\mathbb{L}$ se para cada $\mathbf{L_0} \in \mathfrak{D}$, e para quaisquer Γ e α tais que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L_0}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}\mathbf{(L_0)}} \alpha$. Reciprocamente, dizemos que **C** é *completo com respeito a* $\mathbb{L}$ se para cada $\mathbf{L_0} \in \mathfrak{D}$, e para quaisquer Γ e α tais que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L_0}$, $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}\mathbf{(L_0)}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha$.

Escólio 2.20: Se **C** é um cálculo e $\mathbb{L}$ é uma lógica tal que ambos possuem o mesmo domínio formal $\mathfrak{D}$, então as seguintes proposições são verdadeiras:

- se **C** é correto com respeito a $\mathbb{L}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$;
- se **C** é completo com respeito a $\mathbb{L}$, então $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$.

Definição 2.21: Sejam $\mathbb{S}$ e C respectivamente uma semântica e um cálculo baseados no mesmo domínio formal, e L_0 uma linguagem arbitrária deste domínio formal. Se pretendemos que $\mathbb{S}$ e C definem a mesma lógica $\mathbb{L}$, mas eventualmente ainda não o provamos, então, para evitar confusão, adotamos as seguintes notações:

- $\models_{\mathbb{L}(\mathsf{L}_0)} \rightleftharpoons \models_{\mathbb{S}(\mathsf{L}_0)}$;
- $\models_{\mathbb{L}} \rightleftharpoons \models_{\mathbb{S}}$;
- $\vdash_{\mathbb{L}(\mathsf{L}_0)} \rightleftharpoons \vdash_{\mathsf{C}(\mathsf{L}_0)}$;
- $\vdash_{\mathbb{L}} \rightleftharpoons \vdash_{\mathsf{C}}$.

Definição 2.22: Uma coleção não vazia $\mathcal{E}$ é dita uma *coleção de espécies* se $\mathcal{E}$ é munido de uma relação $\preceq$ possuindo as seguintes propriedades:

- $\preceq$ é uma relação de ordem parcial[1];
- para todo $\mathtt{j} \in \mathcal{E}$, existe $\mathtt{i} \in \mathcal{E}$ tal que $\mathtt{j} \preceq \mathtt{i}$ e $\mathtt{i}$ é um elemento maximal em $\mathcal{E}$[2].

Se $\mathtt{i}$, $\mathtt{j}$ são espécies em $\mathcal{E}$ tais que $\mathtt{j} \preceq \mathtt{i}$, dizemos então que $\mathtt{i}$ *subordina* $\mathtt{j}$ *(em $\mathcal{E}$)*, ou que $\mathtt{j}$ *é subordinado por* $\mathtt{i}$ *(em $\mathcal{E}$)*, ou ainda que $\mathtt{j}$ *é uma subespécie de* $\mathtt{i}$ *(em $\mathcal{E}$)*.

Uma espécie $\mathtt{i}$ em $\mathcal{E}$ é dita *própria* se $\mathtt{i}$ é um elemento maximal em $\mathcal{E}$. Uma coleção $\mathcal{E}$ de espécies é dita *monossortida* se $\mathcal{E}$ possuir apenas um elemento, *bissortida* se $\mathcal{E}$ possuir dois elementos, *trissortida* se $\mathcal{E}$ possuir três elementos; dizemos genericamente que uma coleção $\mathcal{E}$ de espécies é *polissortida* em qualquer contexto em que haja possibilidade de $\mathcal{E}$ possuir mais de um elemento. $\mathcal{E}$ é dita *simples* se, dadas duas espécies distintas $\mathtt{i}$, $\mathtt{j}$ de $\mathcal{E}$, $\mathtt{i} \npreceq \mathtt{j}$ e $\mathtt{j} \npreceq \mathtt{i}$[3].

---

[1] $\preceq$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

[2] Para cada $\mathtt{j} \in \mathcal{E}$, se $\mathtt{i} \preceq \mathtt{j}$, então $\mathtt{i} = \mathtt{j}$.

[3] Isto é, não se tem que $\mathtt{i} \preceq \mathtt{j}$, nem que $\mathtt{j} \preceq \mathtt{i}$.

<u>Definição 2.23</u>: Um alfabeto Σ é dito *quantificacional*[1] se Σ é uma união de sete coleções mutuamente disjuntas de sinais, cujos elementos são ditos respectivamente *conectivos*, *quantificadores*, *variáveis*, *sinais predicativos*, *constantes*, *sinais funcionais* e *sinais de pontuação*, munida de uma coleção de espécies $\mathcal{E}$, atendendo às seguintes condições:

- cada variável $\boldsymbol{x}$ de Σ está associada a uma única espécie própria de $\mathcal{E}$, dita a *espécie de* $\boldsymbol{x}$;
- para cada espécie própria de $\mathcal{E}$, há uma coleção infinitamente enumerável de variáveis de Σ associadas a esta;
- cada constante $\mathtt{c}$ de Σ está associada a uma única espécie de $\mathcal{E}$, dita a espécie de $\mathtt{c}$;
- cada sinal funcional **f** de Σ está associado a uma única tupla, possuindo 2 como comprimento mínimo, de espécies de $\mathcal{E}$, dita a espécie de **f**, onde todos os componentes desta tupla, com a única possível exceção do último, são espécies próprias de $\mathcal{E}$; o comprimento desta tupla subtraído de 1 é dito a *aridade de* **f**;
- Σ possui pelo menos um sinal predicativo;
- cada sinal predicativo **p** de Σ está associado a uma única tupla, eventualmente vazia, de espécies próprias de $\mathcal{E}$, dita a espécie de **p**; o comprimento desta tupla é dito a *aridade de* **p**[2];
- cada conectivo # de Σ está associado a um único número natural, eventualmente nulo, dito *a aridade de* #;
- cada quantificador **Q** de Σ está associado a uma única espécie de $\mathcal{E}$, dita *a espécie de* **Q**;
- os sinais de pontuação são "(", ")" e ",".

Se $\mathtt{i}$ é uma espécie de $\mathcal{E}$, $\mathtt{i}$ é dito também uma *espécie em* Σ.

---

[1] Não definiremos explicitamente neste trabalho *alfabeto proposicional* ou *sentencial*.

[2] Sinais predicativos de aridade 0 são também ditos *letras sentenciais* (ou *proposicionais*).

Definição 2.24: Dado um alfabeto quantificacional Σ, definimos *termo em* Σ pelas seguintes condições:

- toda variável de Σ, de espécie **i**, é um termo em Σ de espécie **i**;
- toda constante de Σ, de espécie **i**, é um termo em Σ de espécie **i**;
- se $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$ são termos em Σ, respectivamente de espécies $\mathbf{i}_1,...,\mathbf{i}_n$, e **f** é um sinal funcional de Σ de espécie $\langle \mathbf{i}_1,...,\mathbf{i}_{n+1} \rangle$, então $\mathbf{f}(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$ é um termo em Σ de espécie $\mathbf{i}_{n+1}$.

Se **t** é um termo em Σ de espécie **i** e **i** subordina **j** (**j** subordina **i**), dizemos também que **t** *subordina* **j** (**j** *subordina* **t**). Se **t** e **t'** são termos em Σ tais que **t** ocorre em **t'**, dizemos que **t** é um *subtermo de* **t'** *(em* Σ*).*

Definição 2.25: Uma *linguagem quantificacional*[1] **L** é uma linguagem formal em um alfabeto quantificacional Σ, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- se $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$ são termos em Σ, respectivamente de espécies $\mathbf{i}_1,...,\mathbf{i}_n$, e **p** é um sinal predicativo de Σ de espécie $\langle \mathbf{i}_1,...,\mathbf{i}_n \rangle$, então $\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)$ é uma fórmula de **L**, dita também uma *fórmula atômica própria* de **L**;
- se # é um conectivo de aridade **n** e $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ são fórmulas de **L**, então $\#(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ é uma fórmula de **L**; se # é de aridade nula, então # é dito também uma *fórmula atômica imprópria* de **L**[2];
- se **Q** é um quantificador de Σ de espécie **j**, $\boldsymbol{x}$ é uma variável de espécie **i** tal que **i** subordina **j**, e α é uma fórmula de **L**, então $\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \alpha$ é uma fórmula de **L**.

L também é dita a *linguagem quantificacional gerada por* Σ. Se **s** é um sinal de Σ, dizemos também que **s** é um sinal em **L**. Se **i** é uma espécie em Σ, **i** é dito também uma *espécie em* **L**. Se **t** é um termo em Σ, dizemos também que **t** é um termo em **L**.

---

[1] Não definiremos explicitamente neste trabalho *linguagem proposicional* ou *sentencial*.

[2] As *fórmulas atômicas* de **L** são portanto as atômicas próprias e as atômicas impróprias de **L**.

<u>Definição 2.26</u>: Sejam L uma linguagem quantificacional, α,β,γ fórmulas de L, $\mathbf{Q}$ um quantificador em L, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ variáveis em L, $\mathtt{t}$ um termo em L e $\mathtt{i}$ uma espécie em L. $\mathtt{t}$ é dito *fechado (em L)* se nenhuma variável em L ocorre em $\mathtt{t}$. Uma ocorrência de $\boldsymbol{x}$ em α é dita *ligada em α* se esta ocorrência figura em uma subfórmula de α da forma $\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \beta$, caso contrário esta ocorrência é dita *livre em α*. $\boldsymbol{x}$ é dito *livre em α* se $\boldsymbol{x}$ possui pelo menos uma ocorrência livre em α. Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em α, dizemos que α é *$\boldsymbol{x}$-fechada (em L)*. Se nenhuma variável em L é livre em α, dizemos então que α é *fechada* (ou é uma *sentença*) *(em L)*. Dizemos que γ ($\mathtt{t}$) *está no escopo de $\boldsymbol{x}$ em α* se existe uma subfórmula de α da forma $\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \beta$ tal que γ ($\mathtt{t}$) ocorre em β. Dizemos que *$\boldsymbol{x}$ é substituível por $\mathtt{t}$ em α* se $\boldsymbol{x}$ subordina $\mathtt{t}$ e não existe $\boldsymbol{y}$ tal que $\boldsymbol{x}$ é livre em α, $\boldsymbol{x}$ está no escopo de $\boldsymbol{y}$ em α, e $\boldsymbol{y}$ ocorre em $\mathtt{t}$. *$\boldsymbol{x}$ é isosubstituível por $\mathtt{t}$ em α* se $\boldsymbol{x}$ é substituível por $\mathtt{t}$ em α e $\boldsymbol{x}$ e $\mathtt{t}$ são da mesma espécie. *$\boldsymbol{x}$ é $\mathtt{i}$-substituível por $\mathtt{t}$ em α* se $\boldsymbol{x}$ é substituível por $\mathtt{t}$ em α e $\mathtt{t}$ é subordinado a $\mathtt{i}$. Se $\boldsymbol{x}$ é substituível por $\mathtt{t}$ em α, notamos por $\alpha(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})$ à fórmula de L[1] obtida substituindo em α cada ocorrência livre de $\boldsymbol{x}$ por $\mathtt{t}$[2].Se $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ são as variáveis livres em α, e $\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n$ são termos (fechados) em L subordinados por $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$, dizemos que $\alpha(\boldsymbol{x}_1|\mathtt{t}_1)\ldots(\boldsymbol{x}_n|\mathtt{t}_n)$ é uma *instância (fechada) de α (em L)*. Se $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$ são instâncias (fechadas) de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (em L) obtidas pelas mesmas substituições, dizemos então que $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$ são *instâncias (fechadas) consistentes de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ (em L)*.

<u>Definição 2.27</u>: Considere L uma linguagem quantificacional, α,β fórmulas de L, $\#,*$ conectivos em L, $\boldsymbol{x}$ uma variável em L, e $\mathbf{Q}$ um quantificador em L associado a uma espécie subordinada a $\boldsymbol{x}$. As seguintes convenções vigoram na escrita informal de fórmulas de L:

- se # tem aridade 1 e é usado em notação pré-fixada, representamos "#(α)" por "(#α)";
- se # tem aridade 1 e é usado em notação pós-fixada, representamos "#(α)" por "(α#)";
- se #,$*$ tem aridade 1 e são usados em notação pré-fixada, notamos "(#($*\alpha$))" por "(#$*\alpha$)";
- se #,$*$ tem aridade 1 e são usados em notação pré-fixada, notamos "((α#)$*$)" por "(α#$*$)";

---

[1] É fácil provar que $\alpha(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})$ é de fato uma fórmula de L.

[2] Esta definição deste caso especial de substituição passa a prevalecer sobre a definição genérica dada em 2.1.

- se # tem aridade 2, notamos “#(α,β)” por “(α # β)”;
- se # tem aridade 1 e é usado em notação pré-fixada, notamos “**Q***x* (#α)” por “**Q***x* #α”;
- o par exterior de parênteses de uma fórmula de **L** pode ser suprimido;
- se o mesmo conectivo de aridade 2 se suceder em uma fórmula escrita informalmente, a parentetização implícita considerada é feita da direita para a esquerda.

<u>Escólio 2.28</u>: Nas linguagens formais definidas neste trabalho, aparecem eventualmente os seguintes tipos de conectivos e quantificadores:

- os conectivos primitivos[1] “→”, “∧” e “∨”, de aridade 2;
- os conectivos definidos[2] “↔”, “⇒” e “⇔”, de aridade 2;
- o conectivo primitivo “¬”, de aridade 1, usado em notação pré-fixada;
- o conectivo definido “~”, de aridade 1, usado em notação pré-fixada;
- o conectivo primitivo “⊥”, zerário;
- os conectivos definidos “∘” e “∗”, de aridade 1, usados em notação pós-fixada;
- os conectivos primitivos ou definidos “?”[3] e “!”[4], de aridade 1, usados em notação pós-fixada[5];
- dada uma espécie **i**, os quantificadores primitivos ou definidos “$\forall_{\mathtt{i}}$” e “$\exists_{\mathtt{i}}$”, associados a esta espécie.

<u>Definição 2.29</u>: Na escrita informal de fórmulas das linguagens formais definidas neste trabalho, adotamos a seguinte ordem de precedência: ⇔, ⇒, ↔, →, {∧,∨}, coleção dos conectivos de aridade 1 e dos quantificadores. Por exemplo, “$\forall_{\mathtt{i}} x\ \neg\alpha \Rightarrow \sim\beta \rightarrow \gamma$” representa “$(\forall_{\mathtt{i}} x\ (\neg\alpha) \Rightarrow ((\sim\beta) \rightarrow \gamma))$”.

<u>Definição 2.30</u>: Em todo este trabalho, adotamos as seguintes abreviaturas:

- $\alpha \leftrightarrow \beta \rightleftharpoons (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$;

---

1 Presentes no alfabeto original da linguagem.

2 Não presentes no alfabeto original da linguagem; usados apenas para formar abreviaturas.

3 “?” é conectivo primitivo em **LEI** e definido em **LSR**.

4 “!” é conectivo primitivo em **LSR** e definido em **LEI**.

5 Os sinais “?” e “!” usados neste trabalho não devem ser confundidos com as modalidades da Lógica Linear de Girard, definida em [30].

- $\alpha^{o} \rightleftharpoons \sim(\alpha \wedge \neg\alpha)$;
- $\alpha^{*} \rightleftharpoons \alpha \vee \neg\alpha$;
- $\alpha \Rightarrow \beta \rightleftharpoons (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$;
- $\alpha \Leftrightarrow \beta \rightleftharpoons (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$;
- se $\boldsymbol{x}$ é de espécie $\mathtt{i}$ e $\mathbf{Q} \in \{\forall,\exists\}$, $\mathbf{Q}\boldsymbol{x} \rightleftharpoons \mathbf{Q}_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}$.

2. Estruturas Semânticas da Inconsistência e da Incompletude

Neste capítulo são definidas as estruturas semânticas que serão utilizadas ao longo de todo este trabalho, e, em especial, são especificadas as semânticas para as lógicas de primeira ordem $\mathbf{LI}^*$ (sigla de "Logic for Inconsistency"), $\mathbf{PCL}^*$ (sigla de "Paracomplete Logic") e $\mathbf{NALL}^*$ (sigla de "Non Alethic Logic").

Por convenção, sempre que nós nos referirmos às lógicas $\mathbf{LI}^*$, estamos na realidade falando das duas lógicas $\mathbf{LI}_1^*$ e $\mathbf{LI}_2^*$. O mesmo vale para as lógicas $\mathbf{NALL}^*$.

Em todo este capítulo, L é uma linguagem proposicional cujos únicos conectivos são "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$"; L' é a linguagem obtida acrescentando o conectivo zerário "$\perp$" ao alfabeto de L; $\overline{\mathsf{L}}$ é uma das linguagens L ou L', dependendo do contexto; L^* é uma linguagem quantificacional cujos únicos conectivos são "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", possuindo como quantificadores $\forall_{\mathtt{i}}$ e $\exists_{\mathtt{i}}$ para cada espécie $\mathtt{i}$ em L^*; $\mathsf{L}^{*\prime}$ é a linguagem obtida acrescentando "$\perp$" ao alfabeto de L^*; e finalmente $\overline{\mathsf{L}^*}$ é uma das linguagens L^* ou $\mathsf{L}^{*\prime}$.

§1. Funções $\neg$-Heterodoxas

Definimos e estudamos nesta seção as funções $\neg$-heterodoxas e alguns conceitos a elas relacionados; tais funções são o ponto comum entre as semânticas das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$, $\mathbf{NALL}^*$, **LEI** e **LSR**, estudadas nesta tese.

Em toda esta seção, L_0 é uma linguagem proposicional ou quantificacional possuindo os conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$" e, caso L_0 for quantificacional, L_0 é uma linguagem polissortida possuindo os quantificadores universal e existencial pelo menos como sinais definidos para cada espécie em L_0; $\mathtt{i}$ é uma espécie arbitrária em L_0; α, β e γ são fórmulas arbitrárias de uma mesma linguagem; x é uma variável arbitrária em alguma linguagem polissortida subordinando $\mathtt{i}$; δ é uma fórmula arbitrária em alguma linguagem quantificacional possuindo no máximo x como variável livre; $\mathtt{t}$ é um termo subordinado a $\mathtt{i}$; e finalmente **V** e **V'** são funções de L_0 em {0,1}.

Definição 1.1: Dizemos que **V** é *bem comportada proposicionalmente* se **V** respeitar as seguintes condições:

- $\mathbf{V}(\alpha \to \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$.

Dizemos também que **V** é *bem comportada proposicionalmente de modo restrito* se as condições acima forem satisfeitas para todas as fórmulas fechadas de L_0.

Definição 1.2: Dizemos que **V** e **V'** são $\neg$-*conjugadas* se, para toda fórmula α de L_0, **V** e **V'** cumprirem as seguintes condições:

- $\mathbf{V}(\neg\alpha) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\alpha) = 0$;
- $\mathbf{V'}(\neg\alpha) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$.

Escólio 1.3: Com respeito a funções $\neg$-conjugadas, as seguintes proposições são válidas:

- dada uma função **V** de L_0 em {0,1}, existe no máximo uma função **V'** de L_0 em {0,1} tal que **V** e **V'** são $\neg$-conjugadas;
- dada uma função **V** de L_0 em {0,1}, existe uma única função **V'** de L_0 em {0,1} tal que **V** e **V'** são $\neg$-conjugadas se, e somente se, $\mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{V}(\neg\neg\alpha)$, para toda fórmula α de L_0.

Definição 1.4: Dizemos que **V** é *quase bem comportada proposicionalmente* se **V** obedecer às seguintes condições:

- $\mathbf{V}(\alpha \to \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\neg\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$.

Dizemos também que **V** é *quase bem comportada proposicionalmente de modo restrito* se as condições acima forem satisfeitas para todas as fórmulas fechadas de L_0.

<u>Definição 1.5</u>: Dizemos **V** é *¬-heterodoxa proposicionalmente (de modo restrito) com respeito a* **V'** se **V** e **V'** cumprirem as seguintes condições:

- **V** é bem comportada proposicionalmente (de modo restrito);
- **V** e **V'** são ¬-conjugadas;
- **V'** é quase bem comportada proposicionalmente (de modo restrito).

Dizemos também que **V** é *¬-heterodoxa proposicionalmente (de modo restrito)* se existe **V'** tal que **V** é ¬-heterodoxa proposicionalmente (de modo restrito) com respeito a **V'**.

<u>Lema 1.6</u>: **V** é ¬-heterodoxa proposicionalmente com respeito a **V'** se, e somente se, **V** e **V'** cumprirem as seguintes condições:

- $\mathbf{V}(\neg\gamma) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\gamma) = 0$;
- $\mathbf{V'}(\neg\gamma) = 1$ sss $\mathbf{V}(\gamma) = 0$;
- $\mathbf{V}(\alpha \to \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V'}(\alpha \to \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V'}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V'}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V'}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V'}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V'}(\beta) = 1$.

Temos também que **V** é ¬-heterodoxa proposicionalmente com respeito a **V'** de modo restrito se, e somente se, as condições acima forem satisfeitas restringindo α e β para a coleção de fórmulas fechadas em $\mathbf{L_0}$.

Prova: basta usar as definições 1.1, 1.2, 1.4 e 1.5.

<u>Corolário 1.7</u>: Duas funções $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ ¬-heterodoxas proposicionalmente de $\bar{\mathbf{L}}$ em {0,1} são idênticas se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas, para cada fórmula atômica **P** em $\bar{\mathbf{L}}$:

- $\mathbf{V_1}(\mathbf{P}) = \mathbf{V_2}(\mathbf{P})$;
- $\mathbf{V_1}(\neg\mathbf{P}) = \mathbf{V_2}(\neg\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 1.6.

Corolário 1.8: Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ funções de $\overline{\mathsf{L}}$ em $\{0,1\}$ tais que $\mathbf{V}$ é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente com respeito a $\mathbf{V'}$. Se $\mathbf{V}(\mathbf{P}) \leq \mathbf{V'}(\mathbf{P})$, para cada fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\overline{\mathsf{L}}$, então $\mathbf{V}(\alpha) \leq \mathbf{V'}(\alpha)$, para cada fórmula α em $\overline{\mathsf{L}}$.
Prova: basta usar o lema 1.6.

Definição 1.9: Considere L_0 possuindo pelo menos uma constante. Dizemos que $\mathbf{V}$ é *bem comportada quantificacionalmente para a espécie* $\mathtt{i}$ se as seguintes condições forem cumpridas:

- Se $\mathbf{V}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \delta) = 1$, então $\mathbf{V}(\delta(x|\mathtt{t})) = 1$, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$;
- Se $\mathbf{V}(\delta(x|\mathtt{t})) = 1$, para algum termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$, então $\mathbf{V}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \delta) = 1$.

Se $\mathbf{V}$ for bem comportada quantificacionalmente para todas as espécies em L_0, dizemos simplesmente que $\mathbf{V}$ é *bem comportada quantificacionalmente*.

Definição 1.10: Considere L_0 possuindo pelo menos uma constante. $\mathbf{V}$ é dita uma *função de Henkin para a espécie* $\mathtt{i}$ se $\mathbf{V}$ satisfaz as seguintes cláusulas:

- Se $\mathbf{V}(\delta(x|\mathtt{t})) = 1$, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$, então $\mathbf{V}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \delta) = 1$;
- Se $\mathbf{V}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \delta) = 1$, então $\mathbf{V}(\delta(x|\mathtt{t})) = 1$, para algum termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$.

Se $\mathbf{V}$ for uma função de Henkin para todas as espécies em L_0, dizemos simplesmente que $\mathbf{V}$ é uma *função de Henkin*. Uma conjunto Γ de fórmulas de L_0 é dito um *conjunto de Henkin (em* L_0*)* se a sua função característica em L_0 for uma função de Henkin.

Definição 1.11: $\mathbf{V}$ é *$\neg$-heterodoxa com respeito a* $\mathbf{V'}$ se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ cumprirem as seguintes condições:

- $\mathbf{V}$ é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente de modo restrito com respeito a $\mathbf{V'}$;
- $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ são bem comportadas quantificacionalmente;
- $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ são funções de Henkin.

Dizemos também que $\mathbf{V}$ é *$\neg$-heterodoxa* se existe $\mathbf{V'}$ tal que $\mathbf{V}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathbf{V'}$.

Lema 1.12: $\mathbf{V}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathbf{V'}$ se, e somente se, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ cumprirem as seguintes condições, onde α e β são fórmulas fechadas arbitrárias em L_0, e γ é uma fórmula arbitrária de L_0:

- $\mathbf{V}(\neg\gamma) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\gamma) = 0$;
- $\mathbf{V'}(\neg\gamma) = 1$ sss $\mathbf{V}(\gamma) = 0$;
- $\mathbf{V}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V'}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V'}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V'}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V'}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V'}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V'}(\beta) = 1$;
- $\mathbf{V}(\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \delta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\delta(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})) = 1$, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$;
- $\mathbf{V'}(\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \delta) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\delta(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})) = 1$, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$;
- $\mathbf{V}(\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \delta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\delta(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})) = 1$, para algum termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$;
- $\mathbf{V'}(\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \delta) = 1$ sss $\mathbf{V'}(\delta(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})) = 1$, para algum termo fechado $\mathtt{t}$ em L_0 subordinado a $\mathtt{i}$.

Prova: basta usar o lema 1.6, bem como as definições 1.10 e 1.11.

Corolário 1.13: Duas funções $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ $\neg$-heterodoxas de $\overline{\mathsf{L}}^*$ em $\{0,1\}$ funcionam de forma idêntica para todas as fórmulas fechadas em $\overline{\mathsf{L}}^*$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas, para cada fórmula atômica $\mathbf{P}$ fechada em $\overline{\mathsf{L}}^*$:

- $\mathbf{V}_1(\mathbf{P}) = \mathbf{V}_2(\mathbf{P})$;
- $\mathbf{V}_1(\neg\mathbf{P}) = \mathbf{V}_2(\neg\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 1.12.

Corolário 1.14: Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ funções de $\overline{\mathsf{L}}^*$ em $\{0,1\}$ tais que $\mathbf{V}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathbf{V'}$. Se $\mathbf{V}(\mathbf{P}) \leq \mathbf{V'}(\mathbf{P})$, para cada fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\overline{\mathsf{L}}^*$, então $\mathbf{V}(\alpha) \leq \mathbf{V'}(\alpha)$, para cada fórmula α em $\overline{\mathsf{L}}^*$.

Definição 1.15: Uma função $\mathbf{V}$ de L_0 em $\{0,1\}$ é dita *regular* se $\mathbf{V}$ satisfaz à seguinte condição:
$\mathbf{V}(\alpha) = 1$ sss $\mathbf{V}(\alpha') = 1$, para toda instância fechada α' de α em L_0.

Lema 1.16: Duas funções $\neg$-heterodoxas regulares $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ de $\mathbf{L}^*$ em {0,1} são idênticas se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas, para cada fórmula atômica **P** fechada em $\mathbf{L}^*$:

- $\mathbf{V}_1(\mathbf{P}) = \mathbf{V}_2(\mathbf{P})$;
- $\mathbf{V}_1(\neg\mathbf{P}) = \mathbf{V}_2(\neg\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o corolário 1.13 e a definição 1.15.

Lema 1.17: Se **V** é uma função de $\mathbf{L_0}$ em {0,1}, de Henkin e bem comportada quantificacionalmente, então as seguintes proposições são equivalentes:

- **V** é regular;
- $\mathbf{V}(\forall \boldsymbol{x}_1,\ldots,\forall \boldsymbol{x}_n\, \alpha) = \mathrm{V}(\alpha)$, para qualquer fórmula α em $\mathbf{L_0}$ cujas variáveis livres são exatamente $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$.

Prova: basta usar as definições 1.9, 1.10 e 1.15.

§2. Conceitos Semânticos Gerais

Nesta seção analisamos os conceitos semânticos básicos, usados no decorrer de todo este trabalho.

Em toda esta seção, a menos que seja dito explicitamente o contrário, $\mathbb{L}$ é uma lógica quantificacional polissortida; $\mathbf{L_0}$, $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_*}$ são linguagens para $\mathbb{L}$ diferindo eventualmente apenas nos sinais não lógicos, possuindo pelo menos os conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$", e "$\neg$" como sinais primitivos, e os quantificadores universal e existencial pelo menos como sinais definidos para cada espécie em $\mathbb{L}$; $\mathcal{E}$ é a coleção de espécies em $\mathbf{L_0}$; $\mathtt{i}$ é uma espécie em $\mathbf{L_0}$; α e β são fórmulas em $\mathbf{L_0}$; **P** é uma fórmula atômica em $\mathbf{L_0}$; $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ são variáveis em $\mathbf{L_0}$; $\mathtt{t}$,$\mathtt{u}$ são termos em $\mathbf{L_0}$; e, sempre que alguns dentre os sinais "$\boldsymbol{x}$", "$\boldsymbol{y}$", "$\boldsymbol{z}$", "$\mathtt{t}$", "$\mathtt{u}$" e "$\mathtt{i}$" forem usados no mesmo contexto, consideramos subentendido que $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ subordinam $\mathtt{i}$, e $\mathtt{t}$,$\mathtt{u}$ são subordinados a $\mathtt{i}$; estas convenções continuam valendo mesmo que estes sinais sejam acrescidos de plicas ou índices.

Pré-Definição 2.1: Consideramos como previamente definidos os conceitos de *estrutura* ($\mathbb{L}$-*estrutura*) *para* $\mathbf{L_0}$, de interpretação ($\mathbb{L}$-*interpretação*) *para* $\mathbf{L_0}$, e de $\mathbb{L}$-*valoração para* $\mathbf{L_0}$.

Se Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$ e K é uma $\mathbb{L}$-estrutura para $\mathbf{L_0}$, consideramos também como previamente determinado quando Ω *está sobre* K. Consideramos também como previamente conhecido quando uma interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) Ω' para $\mathbf{L_0}$ é ***x****-similar em* `i` *a* uma interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) Ω para $\mathbf{L_0}$.

Definição 2.2: Uma $\mathbb{L}$-*correspondência semântica para* $\mathbf{L_0}$ é uma função da coleção das $\mathbb{L}$-interpretações para $\mathbf{L_0}$ em $\{0,1\}^{\mathbf{L_0}}$. Se $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica para $\mathbf{L_0}$, e Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$, notamos também $\mathcal{F}(\Omega)$ por $\Omega_{\mathcal{F}}$.

Definição 2.3: Sejam $\mathcal{F}$ uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica para $\mathbf{L_0}$, K uma $\mathbb{L}$-estrutura para $\mathbf{L_0}$, e Ω uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$. Dizemos que **V** é *a pré-valoração gerada por* Ω e $\mathcal{F}$ se **V** é uma função de $\mathbf{L_0}$ em $\{0,1\}$ tal que $\mathbf{V} = \Omega_{\mathcal{F}}$. Dizemos que **V** é *a valoração gerada por* K *e* $\mathcal{F}$ se **V** é uma função de $\mathbf{L_0}$ em $\{0,1\}$ cumprindo a seguinte condição:

- $\mathbf{V}(\alpha) = 1$ sss ($\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω para $\mathbf{L_0}$ sobre K).

Se $\mathcal{F}$ é previamente conhecido, dizemos simplesmente que **V** é *a (pré-)valoração gerada por* K (Ω).

Lema 2.4: Sejam $\mathcal{F}$ uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica para $\mathbf{L_0}$, K e K' $\mathbb{L}$-estruturas para $\mathbf{L_0}$, e **V** a valoração gerada por K e $\mathcal{F}$. Então as seguintes proposições são equivalentes:

- **V** é a valoração gerada por K' e $\mathcal{F}$;
- para toda interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ sobre K', existe uma interpretação Ω para $\mathbf{L_0}$ sobre K tal que, para toda fórmula α em $\mathbf{L_0}$, $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = \Omega'_{\mathcal{F}}(\alpha)$.

Definição 2.5: Dizemos que uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica $\mathcal{P}$ para $\mathbf{L_0}$ é *capital* se as seguintes cláusulas forem atendidas:

- para toda $\mathbb{L}$-estrutura K para $\mathbf{L_0}$, a valoração gerada por K e $\mathcal{P}$ é uma $\mathbb{L}$-valoração para $\mathbf{L_0}$;
- para toda $\mathbb{L}$-valoração **V** para $\mathbf{L_0}$, existe uma $\mathbb{L}$-estrutura K para $\mathbf{L_0}$ tal que **V** é a valoração gerada por K e $\mathcal{P}$.

Definição 2.6: Dizemos que **V** é uma $\mathbb{L}$-*pré-valoração para* $\mathbf{L_0}$ se existe uma $\mathbb{L}$-interpretação Ω para $\mathbf{L_0}$ e uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica capital $\mathcal{P}$ para $\mathbf{L_0}$ tal que **V** é a pré-valoração gerada por Ω e $\mathcal{P}$.

Definição 2.7: Uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica $\mathcal{F}$ para $\mathbf{L_0}$ é dita *bem comportada quantificacionalmente para a espécie* $\mathtt{i}$ se as seguintes condições forem cumpridas:

- $\Omega_{\mathcal{F}}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega'_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ x-similar em $\mathtt{i}$ a Ω;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega'_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$, para alguma $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ x-similar em $\mathtt{i}$ a Ω.

Se $\mathcal{F}$ for bem comportada quantificacionalmente para todas as espécies em $\mathbf{L_0}$, dizemos simplesmente que $\mathcal{F}$ é *bem comportada quantificacionalmente*.

Definição 2.8: Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ duas $\mathbb{L}$-correspondências semânticas para $\mathbf{L_0}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é $\neg$-*heterodoxa com respeito a* $\mathcal{G}$ se as seguintes condições forem cumpridas:

- $\Omega_{\mathcal{F}}$ é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente com respeito a $\Omega_{\mathcal{G}}$;
- $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são bem comportadas quantificacionalmente.

Dizemos também que $\mathcal{F}$ é $\neg$-*heterodoxa* se existe uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica $\mathcal{G}$ para $\mathbf{L_0}$ tal que $\mathcal{F}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathcal{G}$.

Lema 2.9: Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ duas $\mathbb{L}$-correspondências semânticas para $\mathbf{L_0}$. $\mathcal{F}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathcal{G}$ se, e somente se, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ possuem as seguintes propriedades:

- $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha) = 0$;
- $\Omega_{\mathcal{G}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 0$;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 0$ ou $\Omega_{\mathcal{F}}(\beta) = 1$;
- $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 0$ ou $\Omega_{\mathcal{G}}(\beta) = 1$;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$ e $\Omega_{\mathcal{F}}(\beta) = 1$;
- $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha) = 1$ e $\Omega_{\mathcal{G}}(\beta) = 1$;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$ ou $\Omega_{\mathcal{F}}(\beta) = 1$;
- $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha) = 1$ ou $\Omega_{\mathcal{G}}(\beta) = 1$;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega'_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ x-similar em $\mathtt{i}$ a Ω;
- $\Omega_{\mathcal{G}}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega'_{\mathcal{G}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ x-similar em $\mathtt{i}$ a Ω;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega'_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$, para alguma $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ x-similar em $\mathtt{i}$ a Ω.
- $\Omega_{\mathcal{G}}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega'_{\mathcal{G}}(\alpha) = 1$, para alguma $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ x-similar em $\mathtt{i}$ a Ω.

Prova: basta usar o lema 1.6, bem como as definições 2.7 e 2.8.

Corolário 2.10: Duas $\mathbb{L}$-correspondências semânticas $\neg$-heterodoxas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ para $\overline{\mathbf{L}}^{*}$ são idênticas se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas, para cada $\mathbb{L}$-interpretação Ω para $\overline{\mathbf{L}}^{*}$ e para toda fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\overline{\mathbf{L}}^{*}$:

- $\Omega_{\mathcal{F}}(\mathbf{P}) = \Omega_{\mathcal{G}}(\mathbf{P})$;
- $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\mathbf{P}) = \Omega_{\mathcal{G}}(\neg\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 2.9.

Corolário 2.11: Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são duas $\mathbb{L}$-correspondências semânticas para $\overline{\mathbf{L}}^{*}$ tais que $\mathcal{F}$ é -heterodoxa com respeito a $\mathcal{G}$ e $\Omega_{\mathcal{F}}(\mathbf{P}) \leq \Omega_{\mathcal{G}}(\mathbf{P})$, para cada fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\overline{\mathbf{L}}^{*}$, então $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) \leq \Omega_{\mathcal{G}}(\alpha)$, para toda fórmula α em $\overline{\mathbf{L}}^{*}$.

Prova: basta usar o lema 2.9.

Definição 2.12: Um *universo para* $\mathsf{L_0}$ é uma família Δ de conjuntos não vazios indiciada por $\mathcal{E}$ tal que, se $\mathtt{i}, \mathtt{j} \in \mathcal{E}$ e $\mathtt{i}$ é uma subespécie de $\mathtt{j}$, então $\Delta_{\mathtt{i}} \subseteq \Delta_{\mathtt{j}}$. No caso particular em que $\mathsf{L_0}$ é uma linguagem monossortida, e $\mathtt{i}_0$ é a única espécie em $\mathsf{L_0}$, identificamos $\Delta_{\mathtt{i}_0}$ com Δ.

Definição 2.13: Se Δ é um universo para $\mathsf{L_0}$, uma Δ-*atribuição para variáveis para* $\mathsf{L_0}$ é uma função que associa cada variável em $\mathsf{L_0}$ de uma espécie própria arbitrária $\mathtt{j}$ em $\mathsf{L_0}$ a um elemento de $\Delta_{\mathtt{j}}$. Uma *atribuição para variáveis para* $\mathsf{L_0}$ é uma Δ-atribuição para variáveis para $\mathsf{L_0}$, para algum universo Δ para $\mathsf{L_0}$. Uma Δ-atribuição $\mathbf{s'}$ é dita $\boldsymbol{x}$-*similar a* uma Δ-atribuição $\mathbf{s}$ respectivamente para linguagens possuindo as mesmas variáveis se $\mathbf{s}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{s'}(\boldsymbol{y})$, para qualquer variável $\boldsymbol{y}$ destas linguagens distinta de $\boldsymbol{x}$. $\mathbf{s'}$ é dita $\boldsymbol{x}$-*similar em* $\mathtt{i}$ a $\mathbf{s}$ se $\mathbf{s'}$ é $\boldsymbol{x}$-similar a $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s'}(\boldsymbol{x}) \in \Delta_{\mathtt{i}}$.

Escólio 2.14: Se $\mathsf{L_0}$ é uma linguagem polissortida simples e $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s'}$ são Δ-atribuições para $\mathsf{L_0}$, então, se $\boldsymbol{x}$ subordina $\mathtt{i}$, $\boldsymbol{x}$ é de espécie $\mathtt{i}$, e daí $\mathbf{s'}$ é $\boldsymbol{x}$-similar a $\mathbf{s}$ se, e somente se, $\mathbf{s'}$ é $\boldsymbol{x}$-similar a $\mathbf{s}$ em $\mathtt{i}$.

Definição 2.15: Se $\mathbf{s}$ é uma Δ-atribuição para L_0, e $\mathbf{d} \in \Delta_{\mathtt{i}}$, então $\mathbf{s}(x|\mathbf{d})$ é uma Δ-atribuição para L_0 definida por:

- $\mathbf{s}(x|\mathbf{d})(y) = \begin{cases} \mathbf{s}(y), \text{ se } y \neq x, \\ \mathbf{s}(\mathbf{d}), \text{ se } y = x, \end{cases}$ para cada variável y em L_0.

Pré-Definição 2.16: Antecipamos que uma *interpretação* (𝕃*-interpretação*) Ω *para* L_0 é uma tupla ordenada cujo último componente é uma atribuição para variáveis para L_0, também chamada de atribuição para variáveis de Ω.

Definição 2.17: Duas interpretações (𝕃-interpretações) Ω e Ω' para linguagens possuindo a mesma coleção de variáveis são ditas *isovariantes* se ambas possuem a mesma atribuição para variáveis. Considere agora Ω e Ω' interpretações (𝕃-interpretações) para a mesma linguagem sobre a mesma estrutura. Ω e Ω' são ditas *semelhantes* se elas forem isovariantes. Ω e Ω' são ditas *similares* se elas diferirem somente em suas atribuições para variáveis. Ω' é dita x*-similar* (x*-similar em* $\mathtt{i}$) *a* Ω se elas forem similares e a atribuição para variáveis de Ω' é x-similar (x-similar em $\mathtt{i}$) à atribuição para variáveis de Ω.

Escólio 2.18: Se L_0 é uma linguagem polissortida simples e Ω e Ω' são 𝕃-interpretações para L_0, então, se x subordina $\mathtt{i}$, x é de espécie $\mathtt{i}$, e daí Ω' é x-similar a Ω se, e somente se, Ω' é x-similar a Ω em $\mathtt{i}$.

Escólio 2.19: Duas interpretações (𝕃-interpretações) semelhantes não são necessariamente idênticas. Por exemplo, se 𝕃 é uma das lógicas **LEI** ou **LSR**, vistas respectivamente nos capítulos 4 e 5, então duas 𝕃-interpretações semelhantes são em geral distintas.

Pré-Definição 2.20: Dada uma estrutura (𝕃-estrutura) $\mathbf{K}$ para L_0, consideramos como previamente conhecido *o universo de* $\mathbf{K}$, o qual é um universo para L_0. Se Ω é uma interpretação (𝕃-interpretação) para L_0 sobre $\mathbf{K}$, *o universo de* Ω é o universo de $\mathbf{K}$, o qual notamos por $|\mathbf{K}|$ ou $|\Omega|$.

Definição 2.21: Seja Ω uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$, **s** a sua atribuição para variáveis, e $\mathbf{d} \in |\Omega|_{\mathtt{i}}$. Então notamos por $\Omega(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})$ a $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$ obtida de Ω substituindo **s** por $\mathbf{s}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})$.

Escólio 2.22: Considerando ainda as mesmas condições da definição 2.21, toda $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$ $\boldsymbol{x}$-similar em $\mathtt{i}$ a Ω é da forma $\Omega(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})$, onde $\mathbf{d} \in |\Omega|_{\mathtt{i}}$.

Pré-Definição 2.23: Para cada interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) Ω para $\mathbf{L_0}$ definimos uma função, notada por $\Omega_{\mathtt{t}}$, cujo domínio é a coleção dos termos em $\mathbf{L_0}$. A função $\Omega_{\mathtt{t}}$ é dita *a denotação* (*$\mathbb{L}$-denotação*) *para* $\mathbf{L_0}$ *gerada por* Ω. Notamos também, cometendo um abuso de linguagem, a função $\Omega_{\mathtt{t}}$ por Ω, a não ser nos casos em que seja dito explicitamente o contrário.

Definição 2.24: Para cada estrutura ($\mathbb{L}$-estrutura) **K** para $\mathbf{L_0}$ de um dos tipos definidos neste trabalho, notamos por $\mathbf{K}_{\mathtt{t}}$ à restrição de $\Omega_{\mathtt{t}}$ à coleção dos termos fechados em $\mathbf{L_0}$, onde Ω é uma interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) para $\mathbf{L_0}$ sobre **K**.

Definição 2.25: Dizemos que uma interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) Ω para $\mathbf{L_0}$ é *completa* se, para cada espécie $\mathtt{i}$ em $\mathbf{L_0}$ e para cada $\mathbf{d} \in |\Omega|_{\mathtt{i}}$, existe um termo fechado $\mathbf{u}$ em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\mathtt{i}$ tal que $\Omega_{\mathtt{t}}(\mathbf{u}) = \mathbf{d}$. Uma estrutura ($\mathbb{L}$-estrutura) **K** para $\mathbf{L_0}$ é dita *completa* se toda interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) para $\mathbf{L_0}$ sobre **K** é completa. Uma $\mathbb{L}$-valoração **V** para $\mathbf{L_0}$ é dita *completa* se há uma $\mathbb{L}$-estrutura completa **K** para $\mathbf{L_0}$ e uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica capital $\mathcal{P}$ para $\mathbf{L_0}$ tal que **V** é a valoração gerada por **K** e $\mathcal{P}$.

Escólio 2.26: Sejam **K** e Ω respectivamente uma estrutura ($\mathbb{L}$-estrutura) e uma interpretação ($\mathbb{L}$-interpretação) para $\mathbf{L_0}$ de algum dos tipos definidos neste trabalho, tal que Ω está sobre **K**. Então as seguintes proposições são equivalentes:

- **K** é completo;
- Ω é completo;
- para cada espécie $\mathtt{i}$ em $\mathbf{L_0}$ e para cada $\mathbf{d} \in |\mathbf{K}|_{\mathtt{i}}$, existe um termo fechado $\mathbf{u}$ em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\mathtt{i}$ tal que $\mathbf{K}_{\mathtt{t}}(\mathbf{u}) = \mathbf{d}$.

Definição 2.27: Uma *estrutura simples* U *para* $\mathbf{L_0}$ é um par $\langle\Delta,\sigma\rangle$, onde Δ é um universo para $\mathbf{L_0}$, dito *o universo da estrutura*, e σ é uma função, notada também por $\mathbf{U_s}$, cujo domínio é a coleção dos sinais não lógicos em $\mathbf{L_0}$, dita *a atribuição da estrutura simples*, atendendo às seguintes condições:

- para cada constante $\mathbf{c}$ em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\mathtt{i}$, $\sigma(\mathbf{c})$ é um elemento de $\Delta_{\mathtt{i}}$;
- para cada sinal funcional $\mathbf{f}$ em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\langle \mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_{n+1}\rangle$, onde $n \geq 1$, $\sigma(\mathbf{f})$ é uma função de $\Delta_{\mathtt{i}_1}\times\cdots\times\Delta_{\mathtt{i}_n}$ em $\Delta_{\mathtt{i}_{n+1}}$;
- para cada sinal predicativo $\mathbf{p}$ em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\langle \mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n\rangle$,onde $n \geq 0$, $\sigma(\mathbf{p})$ é um subconjunto de $\Delta_{\mathtt{i}_1}\times\cdots\times\Delta_{\mathtt{i}_n}$.

Definição 2.28: Uma *interpretação simples* $\mathtt{I}$ *para* $\mathbf{L_0}$ é um par $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$, onde U é uma estrutura simples para $\mathbf{L_0}$, e $\mathbf{s}$ é uma atribuição simples de variáveis para $\mathbf{L_0}$. Dizemos neste caso que $\mathtt{I}$ *está sobre* U. $\mathtt{I}_{\mathbf{t}}$ satisfaz às seguintes condições:

- $\mathtt{I}_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{s}(\boldsymbol{x}) \in \Delta_{\mathtt{i}}$, onde $\boldsymbol{x}$ é uma variável em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\mathtt{i}$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{t}}(\mathbf{c}) = \mathbf{U_s}(\mathbf{c}) \in \Delta_{\mathtt{i}}$, onde $\mathbf{c}$ é uma constante em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\mathtt{i}$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{t}}(\mathbf{f}(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)) = \mathbf{U_s}(\mathbf{f})(\mathtt{I}_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}_1),...,\mathtt{I}_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}_n)) \in \Delta_{\mathtt{i}_{n+1}}$, onde $\mathbf{f}$ é um sinal funcional em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\langle \mathtt{i}_1,\ldots,\mathtt{i}_{n+1}\rangle$ e $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$ são respectivamente termos em $\mathbf{L_0}$ de espécies $\mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n$.

$\mathtt{I}$ também define uma função, notada por $\mathtt{I}^{\mathbf{f}}$, da coleção das fórmulas atômicas próprias de $\mathbf{L_0}$ em $\{0,1\}$, pela seguinte condição:

- $\mathtt{I}^{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)) = 1$ sss $(\mathtt{I}(\mathbf{t}_1),...,\mathtt{I}(\mathbf{t}_n)) \in \mathbf{U_s}(\mathbf{p})$, onde $\mathbf{p}$ é um sinal predicativo em $\mathbf{L_0}$ de espécie $\langle \mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n\rangle$, e $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$ são respectivamente termos em $\mathbf{L_0}$ de espécies $\mathtt{i}_1,\ldots,\mathtt{i}_n$.

Notamos também a função $\mathbf{U_s} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}^{\mathbf{f}}$ por $\mathtt{I}$, e a restrição de $\mathbf{U_s} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}^{\mathbf{f}}$ à coleção de sinais, termos fechados e fórmulas fechadas em $\mathbf{L_0}$ por U.

Definição 2.29: Se $\mathsf{L_0}$ possui pelo menos uma constante, *o universo canônico para* $\mathsf{L_0}$, notado por $\mathbb{T}(\mathsf{L_0})$, é a coleção de todos os termos fechados em $\mathsf{L_0}$. Uma *estrutura canônica simples* para $\mathsf{L_0}$ é um par $\langle\mathbb{T}(\mathsf{L_0}),\sigma\rangle$ cumprindo as seguintes condições:

- para cada constante $\mathtt{c}$ em $\mathsf{L_0}$, $\sigma(\mathtt{c}) = \mathtt{c}$;
- para cada sinal funcional $\mathbf{f}$ em $\mathsf{L_0}$ de espécie $\langle\mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_{n+1}\rangle$, se $\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n$ são termos fechados em $\mathsf{L_0}$ de espécies $\mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n$, então $\sigma(\mathbf{f})(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n) = \mathrm{f}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)$ é um termo fechado de espécie $\mathtt{i}_{n+1}$.

Definição 2.30: Dada uma estrutura simples $\mathrm{U} = \langle\Delta,\sigma\rangle$ para $\mathsf{L_0}$, definimos uma estrutura canônica simples $\mathrm{U}_{\mathtt{c}} = \langle\Delta,\sigma'\rangle$ para $\mathsf{L_0}$, dita *a canonização de* U, pela seguinte condição:

- para cada sinal predicativo $\mathbf{p}$ em $\mathsf{L_0}$ de espécie $\langle\mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n\rangle$ e para quaisquer termos fechados $\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n$ em $\mathsf{L_0}$ respectivamente de espécies $\mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n$, $\langle\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \in \sigma'(\mathbf{p})$ sss $\langle\mathrm{U}_{\mathtt{t}}(\mathtt{t}_1),...,\mathrm{U}_{\mathtt{t}}(\mathtt{t}_n)\rangle \in \sigma(\mathbf{p})$.

Definição 2.31: Uma *interpretação canônica simples* para $\mathsf{L_0}$ é uma interpretação sobre uma estrutura canônica simples para $\mathsf{L_0}$. Se $\mathtt{I} = \langle\mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ é uma interpretação simples para $\mathsf{L_0}$, uma interpretação canônica simples $\mathtt{I}_{\mathtt{c}} = \langle\mathrm{U}_{\mathtt{c}},\mathbf{s'}\rangle$ para $\mathsf{L_0}$ é dita *uma canonização de* $\mathtt{I}$ se $\mathbf{s} = \mathtt{I}_{\mathtt{t}} \circ \mathbf{s'}$.

Definição 2.32: Uma *estrutura múltipla para* $\mathsf{L_0}$ é uma coleção não vazia de estruturas simples para $\mathsf{L_0}$ possuindo o mesmo universo, dito o universo da estrutura múltipla, cujas atribuições de todos os seus elementos concordam quanto às constantes e sinais funcionais em $\mathsf{L_0}$. Uma *interpretação múltipla* Υ para $\mathsf{L_0}$ é um par $\langle\mathbf{Y},\mathbf{s}\rangle$, onde $\mathbf{Y}$ é uma estrutura múltipla para $\mathsf{L_0}$, e $\mathbf{s}$ é uma atribuição para variáveis para $\mathsf{L_0}$. Dizemos neste caso que Υ *está sobre* $\mathbf{Y}$. Dizemos que uma interpretação simples $\mathtt{I}$ para $\mathsf{L_0}$ *figura em* Υ se $\mathtt{I}$ é da forma $\langle\mathrm{U},\mathrm{s}\rangle$, onde $\mathrm{U} \in \mathbf{Y}$. $\Upsilon_{\mathtt{t}}$ atende à seguinte condição:

- $\Upsilon_{\mathtt{t}}(\mathtt{u}) = \mathtt{I}_{\mathtt{t}}(\mathtt{u})$, onde $\mathtt{I}$ figura em Υ.

<u>Definição 2.33</u>: Uma interpretação múltipla Υ para L_0 define duas funções Υ^{max} e Υ^{min}, da coleção das fórmulas atômicas próprias de L_0 em $\{0,1\}$, segundo as duas condições abaixo:

- $\Upsilon^{max}(\mathbf{P}) = \mathbf{max}\{\mathcal{I}^{\mathbf{f}}(\mathbf{P}) \ / \ \mathcal{I}$ figura em $\Upsilon\}$;
- $\Upsilon^{min}(\mathbf{P}) = \mathbf{min}\{\mathcal{I}^{\mathbf{f}}(\mathbf{P}) \ / \ \mathcal{I}$ figura em $\Upsilon\}$.

<u>Definição 2.34</u>: Se L_0 possui pelo menos uma constante, uma *estrutura canônica múltipla* para L_0 é uma coleção de estruturas canônicas simples para L_0. Se $\mathbf{Y}$ é uma estrutura múltipla para L_0, definimos a estrutura canônica múltipla $\mathbf{Y}_{\mathsf{C}} = \{\mathbf{U}_{\mathsf{C}} \ / \ \mathbf{U} \in \mathbf{Y}\}$ para L_0, a qual é dita *a canonização de* $\mathbf{Y}$.

<u>Definição 2.35</u>: Uma *interpretação canônica múltipla para* L_0 é uma interpretação múltipla para L_0 sobre uma estrutura canônica múltipla para L_0. Se $\Upsilon = \langle \mathbf{Y}, \mathbf{s} \rangle$ é uma interpretação múltipla para L_0, uma interpretação canônica múltipla $\Upsilon_{\mathsf{C}} = \langle \mathbf{Y}_{\mathsf{C}}, \mathbf{s'} \rangle$ para L_0 é dita *uma canonização de* Υ se $\mathbf{s} = \Upsilon_{\mathsf{t}} \circ \mathbf{s'}$.

<u>Definição 2.36</u>: Uma *estrutura supermúltipla para* L_0 é uma coleção não vazia de estruturas múltiplas para L_0 possuindo o mesmo universo, dito o universo da estrutura supermúltipla, cujas atribuições de todos os elementos de seus elementos concordam quanto às constantes e sinais funcionais em L_0. Uma *interpretação supermúltipla* Ψ *para* L_0 é um par $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{s} \rangle$, onde $\mathbf{Z}$ é uma estrutura supermúltipla para L_0, e $\mathbf{s}$ é uma atribuição para variáveis para L_0. Dizemos neste caso que Ψ *está sobre* $\mathbf{Z}$. Dizemos que uma interpretação múltipla Υ para L_0 *figura em* Ψ se Υ é da forma $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{s} \rangle$, onde $\mathbf{Y} \in \mathbf{Z}$. Ψ_{t} atende à seguinte condição (análoga à expressa na definição 2.32):

- $\Psi_{\mathsf{t}}(\mathbf{u}) = \Upsilon(\mathbf{u})$, onde Υ figura em Ψ.

<u>Definição 2.37</u>: Uma interpretação supermúltipla $\Psi = \langle \mathbf{Z},\mathbf{s}\rangle$ para $\mathbf{L_0}$ define duas funções $\Psi^{\mathbf{max}}$ e $\Psi^{\mathbf{min}}$, da coleção das fórmulas atômicas próprias de $\mathbf{L_0}$ em $\{0,1\}$, segundo as duas condições abaixo:

- $\Psi^{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \mathbf{max}\{\Upsilon^{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) / \Upsilon$ figura em $\Psi\}$;
- $\Psi^{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \mathbf{min}\{\Upsilon^{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) / \Upsilon$ figura em $\Psi\}$.

<u>Definição 2.38</u>: Se $\mathbf{L_0}$ possui pelo menos uma constante, uma *estrutura canônica supermúltipla* para $\mathbf{L_0}$ é uma coleção de estruturas canônicas múltiplas para $\mathbf{L_0}$. Se $\mathbf{Z}$ é uma estrutura supermúltipla para $\mathbf{L_0}$, definimos a estrutura canônica supermúltipla $\mathbf{Z_c} = \{\mathbf{Y_c} / \mathbf{Y} \in \mathbf{Z}\}$ para $\mathbf{L_0}$, a qual é dita *a canonização de* $\mathbf{Z}$.

<u>Definição 2.39</u>: Uma *interpretação canônica supermúltipla* para $\mathbf{L_0}$ é uma interpretação supermúltipla para $\mathbf{L_0}$ sobre uma estrutura canônica supermúltipla para $\mathbf{L_0}$. Se $\Psi = \langle \mathbf{Z},\mathbf{s}\rangle$ é uma interpretação supermúltipla para $\mathbf{L_0}$, uma interpretação canônica supermúltipla $\Psi_\mathbf{c} = \langle \mathbf{Z_c},\mathbf{s'}\rangle$ para $\mathbf{L_0}$ é dita *uma canonização de* Ψ se $\mathbf{s} = \Psi_\mathbf{t} \circ \mathbf{s'}$.

<u>Definição 2.40</u>: Uma *interpretação híbrida* Φ *para* $\mathbf{L_0}$ é um terno $\langle \mathbf{Y},\mathbf{U},\mathbf{s}\rangle$ tal que $\mathbf{Y}$ é uma estrutura múltipla para $\mathbf{L_0}$, $\mathbf{U} \in \mathbf{Y}$, e $\mathbf{s}$ é uma atribuição simples de variáveis para $\mathbf{L_0}$. Dizemos neste caso que Φ está sobre $\mathbf{Y}$. $\Phi_\mathbf{t}$ é definido por $\langle \mathbf{U},\mathbf{s}\rangle_\mathbf{t}$.

<u>Definição 2.41</u>: Uma interpretação híbrida $\Phi = \langle \mathbf{Y},\mathbf{U},\mathbf{s}\rangle$ para $\mathbf{L_0}$ define uma função, notada por $\Phi^\mathbf{f}$, especificada por $\langle \mathbf{U},\mathbf{s}\rangle^\mathbf{f}$. Notamos também a função $\mathbf{U_s} \cup \Phi_\mathbf{t} \cup \Phi^\mathbf{f}$ por Φ.

<u>Definição 2.42</u>: Uma *interpretação canônica híbrida* para $\mathbf{L_0}$ é uma interpretação híbrida para $\mathbf{L_0}$ sobre uma estrutura canônica simples para $\mathbf{L_0}$. Se $\Phi = \langle \mathbf{Y},\mathbf{U},\mathbf{s}\rangle$ é uma interpretação híbrida para $\mathbf{L_0}$, uma interpretação canônica híbrida $\Phi_\mathbf{c} = \langle \mathbf{Y_c},\mathbf{U_c},\mathbf{s'}\rangle$ para $\mathbf{L_0}$ é dita *uma canonização de* Φ se $\mathbf{s} = \Phi_\mathbf{t} \circ \mathbf{s'}$.

<u>Definição 2.43</u>: Uma *estrutura bimúltipla* $\mathbf{H}$ para $\mathsf{L_0}$ é um par $\langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'}\rangle$, tal que Y e $\mathrm{Y'}$ são estruturas múltiplas para $\mathsf{L_0}$ sobre o mesmo universo, dito o universo da estrutura, e $\mathrm{Y'} \subseteq \mathrm{Y}$.

<u>Definição 2.44</u>: Uma *interpretação bi-híbrida* Θ *para* $\mathsf{L_0}$ é uma quádrupla $\langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ tal que Y é uma estrutura múltipla para $\mathsf{L_0}$, $\mathrm{Y'} \subseteq \mathrm{Y}$, $\mathbf{U} \in \mathbf{Y}$ e s é uma atribuição para variáveis para $\mathsf{L_0}$. Caso $\mathbf{U} \in \mathrm{Y'}$, Θ é dita uma *interpretação bi-híbrida especial para* $\mathsf{L_0}$. Dizemos que Θ está sobre a estrutura bimúltipla $\langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'}\rangle$. Θ_{t} é definido por $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle_{\mathsf{t}}$.

<u>Definição 2.45</u>: Uma interpretação bi-híbrida $\Theta = \langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ para $\mathsf{L_0}$ define uma função, notada por Θ^{f}, especificada por $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle^{\mathsf{f}}$. Notamos também a função $\mathbf{U}_{\mathsf{s}} \cup \Theta_{\mathsf{t}} \cup \Theta^{\mathsf{f}}$ por Θ.

<u>Definição 2.46</u>: Se $\mathsf{L_0}$ possui pelo menos uma constante, uma *estrutura canônica bimúltipla* para $\mathsf{L_0}$ é uma estrutura bimúltipla para $\mathsf{L_0}$ cujos componentes são ambos estruturas múltiplas canônicas para $\mathsf{L_0}$. Se $\mathbf{H} = \langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'}\rangle$ é uma estrutura bimúltipla para $\mathsf{L_0}$, definimos a estrutura canônica bimúltipla $\mathbf{H}_{\mathsf{c}} = \langle \mathrm{Y}_{\mathsf{c}},\mathrm{Y'}_{\mathsf{c}}\rangle$ para $\mathsf{L_0}$, a qual é dita *a canonização de* $\mathbf{H}$.

<u>Definição 2.47</u>: Uma *interpretação canônica bi-híbrida para* $\mathsf{L_0}$ é uma interpretação bi-híbrida para $\mathsf{L_0}$ sobre uma estrutura canônica bimúltipla para $\mathsf{L_0}$. Se $\Theta = \langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ é uma interpretação bi-híbrida para $\mathsf{L_0}$, uma interpretação canônica bi-híbrida $\Theta_{\mathsf{c}} = \langle \mathrm{Y}_{\mathsf{c}},\mathrm{Y'}_{\mathsf{c}},\mathrm{U}_{\mathsf{c}},\mathbf{s'}\rangle$ para $\mathsf{L_0}$ é dita *uma canonização de* Θ se $\mathbf{s} = \Theta_{\mathsf{t}} \circ \mathbf{s'}$.

<u>Lema 2.48</u>: Se Ω é uma interpretação simples ((bi-)híbrida) para $\mathsf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}(x|\mathtt{u})) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{u}))(\mathtt{t})$;
- $\Omega(\mathbf{P}(x|\mathtt{t})) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{t}))(\mathbf{P})$.

Lema 2.49: Se Ω é uma interpretação (super)múltipla para $\mathsf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}(x|\mathtt{u})) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{u}))(\mathtt{t})$;
- $\Omega^{max}(\mathbf{P}(x|\mathtt{t}) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{t}))^{max}(\mathbf{P})$;
- $\Omega^{min}(\mathbf{P}(x|\mathtt{t}) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{t}))^{min}(\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 2.48.

Definição 2.50: Dizemos que duas interpretações Ω e Ω' para $\mathsf{L_0}$ sobre a mesma estrutura *concordam em cada variável (livre) em um termo* $\mathtt{t}$ *(em uma fórmula* α*)* se as seguintes condições forem satisfeitas:

- $\Omega(x) = \Omega'(x)$, para cada variável (livre) em $\mathtt{t}$ (em α);
- se Ω e Ω' são (bi-)híbridas, então Ω e Ω' são similares.

Lema 2.51: Se Ω e Ω' são interpretações simples ((bi-)híbridas) para $\mathsf{L_0}$ sobre a mesma estrutura concordando em cada variável livre de um dado termo $\mathtt{t}$ e de uma dada fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\mathsf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$;
- $\Omega(\mathbf{P}) = \Omega'(\mathbf{P})$.

Lema 2.52: Se Ω e Ω' são interpretações (super)múltiplas para $\mathsf{L_0}$ concordando em cada variável livre de um dado termo $\mathtt{t}$ e de uma dada fórmula α em $\mathsf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$;
- $\Omega^{max}(\mathbf{P}) = \Omega'^{max}(\mathbf{P})$;
- $\Omega^{min}(\mathbf{P}) = \Omega'^{min}(\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 2.51.

<u>Definição 2.53</u>: Sejam $\mathbf{U} = \langle \Delta, \sigma \rangle$ e $\mathbf{U'} = \langle \Delta, \sigma' \rangle$ estruturas simples respectivamente para $\mathbf{L_0}$ e para $\mathbf{L_1}$ possuindo o mesmo universo. Dizemos que U *coincide com* U' *em* $\mathbf{L_*}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

- o alfabeto de $\mathbf{L_*}$ está contido nos alfabetos de $\mathbf{L_0}$ e $\mathbf{L_1}$;
- $\sigma(\mathbf{s}) = \sigma'(\mathbf{s})$, para cada sinal não lógico **s** em $\mathbf{L_*}$.

<u>Definição 2.54</u>: Sejam K e K' estruturas (super)múltiplas respectivamente para $\mathbf{L_0}$ e $\mathbf{L_1}$ (possuindo o mesmo universo). Dizemos que K *coincide com* K' em $\mathbf{L_*}$ se a seguinte proposição for válida:

- há uma correspondência biunívoca λ entre K e K' tal que, para cada $\mathbf{U} \in \mathbf{K}$, U coincide com $\lambda(\mathbf{U})$ em $\mathbf{L_*}$.

<u>Definição 2.55</u>: Sejam $\mathbf{H_0} = \langle \mathbf{Y_0}, \mathbf{Y_0'} \rangle$ e $\mathbf{H_1} = \langle \mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_1'} \rangle$ estruturas bimúltiplas respectivamente para $\mathbf{L_0}$ e para $\mathbf{L_1}$. Dizemos que $\mathbf{H_0}$ *coincide com* $\mathbf{H_1}$ *em* $\mathbf{L_*}$ se $\mathbf{Y_0}$ coincide com $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_0'}$ coincide com $\mathbf{Y_1'}$ em $\mathbf{L_*}$.

<u>Definição 2.56</u>: Sejam Ω e Ω' duas interpretações isovariantes respectivamente sobre K e sobre K', para $\mathbf{L_0}$ e para $\mathbf{L_1}$, tal que K coincide com K' em $\mathbf{L_*}$. Dizemos que Ω *coincide com* Ω' *em* $\mathbf{L_*}$ se uma das condições abaixo for satisfeita:

- Ω e Ω' são interpretações simples ((super)múltiplas);
- Ω e Ω' são interpretações híbridas e os seus segundos componentes coincidem em $\mathbf{L_*}$;
- Ω e Ω' são interpretações bi-híbridas e os seus terceiros componentes coincidem em $\mathbf{L_*}$.

<u>Definição 2.57</u>: Sejam K e K' (Ω e Ω') ($\mathbb{L}$-)estruturas (($\mathbb{L}$-)interpretações) respectivamente para $\mathbf{L_0}$ e para $\mathbf{L_1}$, coincidindo em $\mathbf{L_*}$. Se $\mathbf{L_*} = \mathbf{L_0}$, dizemos que K ($\Omega$) é *a restrição de* K' (Ω') *em* $\mathbf{L_0}$, ou que K' (Ω') é *uma extensão de* K (Ω) *em* $\mathbf{L_1}$.

Lema 2.58: Se Ω e Ω' são duas interpretações simples ((bi-)híbridas) coincidindo em $\mathbf{L}_*$, então valem as seguintes proposições:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$, para cada termo $\mathtt{t}$ em $\mathbf{L}_*$;
- $\Omega(\mathbf{P}) = \Omega'(\mathbf{P})$, para cada fórmula α em $\mathbf{L}_*$.

Lema 2.59: Se Ω e Ω' são duas $\mathbb{L}$-interpretações (super)múltiplas respectivamente para $\mathbf{L}_0$ e para $\mathbf{L}_1$ coincidindo em $\mathbf{L}_*$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$, para cada termo $\mathtt{t}$ em $\mathbf{L}_*$;
- $\Omega^{max}(\mathbf{P}) = \Omega'^{max}(\mathbf{P})$, para cada fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\mathbf{L}_*$;
- $\Omega^{min}(\mathbf{P}) = \Omega'^{min}(\mathbf{P})$, para cada fórmula atômica $\mathbf{P}$ em $\mathbf{L}_*$.

Prova: basta usar o lema 2.58.

Lema 2.60: Se $\mathbf{K}$ é uma estrutura para $\mathbf{L}_0$ de um dos tipos definidos neste trabalho, então as seguintes proposições são válidas:

- se $\mathbf{K}$ é completa e Ω é uma interpretação para $\mathbf{L}_0$ sobre $\mathbf{K}$, então existe uma interpretação $\Omega_{\mathtt{c}}$ para $\mathbf{L}_0$ sobre $\mathbf{K}_{\mathtt{c}}$, do mesmo tipo que Ω, tal que $\Omega_{\mathtt{c}}$ é uma canonização de Ω;
- se $\Omega_{\mathtt{c}}$ é uma estrutura sobre $\mathbf{K}_{\mathtt{c}}$, então existe uma interpretação Ω para $\mathbf{L}_0$ sobre $\mathbf{K}$, do mesmo tipo que $\Omega_{\mathtt{c}}$, tal que $\Omega_{\mathtt{c}}$ é uma canonização de Ω.

Lema 2.61: Se Ω é uma interpretação simples ((bi-)híbrida) para $\mathbf{L}_0$ e $\Omega_{\mathtt{c}}$ é uma canonização de Ω, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega_{\mathtt{t}} = \Omega_{\mathtt{t}} \circ (\Omega_{\mathtt{c}})_{\mathtt{t}}$;
- $\Omega^{\mathtt{f}} = (\Omega_{\mathtt{c}})^{\mathtt{f}}$.

Lema 2.62: Se Ω é uma interpretação (super)múltipla para $\mathbf{L}_0$ e $\Omega_{\mathtt{c}}$ é uma canonização de Ω, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega_{\mathtt{t}} = \Omega_{\mathtt{t}} \circ (\Omega_{\mathtt{c}})_{\mathtt{t}}$;
- $\Omega^{max} = (\Omega_{\mathtt{c}})^{max}$;
- $\Omega^{min} = (\Omega_{\mathtt{c}})^{min}$.

Prova: basta usar o lema 2.62.

§3. Resultados Semânticos Especiais

Expomos nesta seção alguns resultados semânticos específicos para as lógicas vistas neste trabalho. Fazemos isto por economia de pensamento, para evitar repetições desnecessárias. Aconselhamos o leitor a pular para a seção seguinte, consultando esta seção sempre que for necessário. A base conceitual para uma compreensão completa do que é aqui exposto são as definições de $\mathbb{L}$-estruturas, $\mathbb{L}$-interpretações e de $\mathbb{L}$-valorações, para todas as lógicas quantificacionais definidas neste trabalho.

As convenções utilizadas na seção anterior continuam valendo; acrescentamos aqui mais algumas. A menos que seja dito explicitamente o contrário, $\mathbb{L}$ é uma das lógicas quantificacionais definidas nesta tese; Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação em uma linguagem para $\mathbb{L}$; **max** e **min** são as $\mathbb{L}$-correspondências semânticas para uma mesma linguagem (dependendo do contexto) tal que as duas são usadas (neste trabalho) para uma definição recursiva de $\mathbb{L}$-valoração para esta linguagem; $\mathcal{M}$ é qualquer uma das correspondências **max** ou **min**, (onde a linguagem correspondente depende do contexto); e finalmente $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$' e $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$' são respectivamente as $\mathbb{L}$-correspondências semânticas principais e secundárias para duas linguagens eventualmente distintas, idênticas a **max** ou a **min**, conforme o caso (oriundas pela mesma definição, sempre que figurarem no mesmo contexto). Todas as semânticas quantificacionais especificadas nesta tese são definidas desta forma.

<u>Lema 3.1</u>: Se Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}(x|\mathtt{u})) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{u}))(\mathtt{t})$;
- $\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha(x|\mathtt{t})) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{t}))_{\mathcal{M}}(\alpha)$.

Prova: basta usar o escólio 2.48, o lema 2.49 e indução sobre fórmulas, levando em conta as definições de $\mathcal{M}$ em cada caso (especificadas em cada definição de $\mathbb{L}$-valoração). O leitor está encarregado de verificar a especificidade desta prova para cada uma das lógicas vistas neste trabalho.

<u>Definição 3.2</u>: Uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica $\mathcal{F}$ para $\mathbf{L_0}$ é dita *regular* se $\mathcal{F}$ satisfaz à seguinte cláusula:

- $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha(x|\mathtt{t})) = \Omega(x|\Omega(\mathtt{t}))_{\mathcal{F}}(\alpha)$.

<u>Escólio 3.3</u>: Conforme o lema 3.1, todas as $\mathbb{L}$-correspondências semânticas definidas neste trabalho são regulares.

<u>Lema 3.4</u>: Se Ω e Ω' são duas $\mathbb{L}$-interpretações para $\mathbf{L_0}$ concordando em cada variável livre de um termo $\mathtt{t}$ e uma fórmula α em $\mathbf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$;
- $\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha) = \Omega'_{\mathcal{M}}(\alpha)$.

Prova: basta usar os lemas 2.51, 2.52, e indução sobre fórmulas.

<u>Corolário 3.5</u>: Considere $\mathbb{L}$ distinta de **LEI** e **LSR** ($\mathbb{L}$ uma das lógicas **LEI** e **LSR**), e sejam **K** uma $\mathbb{L}$-estrutura para $\mathbf{L_0}$, Ω e Ω' duas $\mathbb{L}$-interpretações (similares) para $\mathbf{L_0}$ sobre **K**, e $\mathtt{t}$ e α respectivamente um termo fechado e uma fórmula fechada em $\mathbf{L_0}$. Então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$;
- $\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha) = \Omega'_{\mathcal{M}}(\alpha)$.

Prova: basta usar o lema 3.4.

<u>Corolário 3.6</u>: Se **K** é uma $\mathbb{L}$-estrutura para $\mathbf{L_0}$, Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$ sobre **K**, **V** é uma $\mathbb{L}$-valoração para $\mathbf{L_0}$ gerada por **K** e $\mathcal{P}$, **V'** é a função ($\neg$-conjugada com **V**) gerada por **K** e $\mathcal{S}$, e α é uma fórmula fechada em $\mathbf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- Se $\mathbb{L}$ é distinta de **LEI** e **LSR**, então $\begin{cases} \mathbf{V}(\alpha) = \Omega_{\mathcal{P}}(\alpha), \\ \mathbf{V'}(\alpha) = \Omega_{\mathcal{S}}(\alpha). \end{cases}$
- Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas **LEI** ou **LSR**, então as duas condições abaixo são equivalentes:
  - $\mathbf{V}(\alpha) = 1$;
  - $\Omega'_{\mathcal{P}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ semelhante a Ω.
- Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas **LEI** ou **LSR**, então as duas condições abaixo são equivalentes:
  - $\mathbf{V'}(\alpha) = 1$;
  - $\Omega'_{\mathcal{S}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ semelhante a Ω.

Prova: basta usar o corolário 3.5.

<u>Lema 3.7</u>: Sejam Ω e Ω' duas $\mathbb{L}$-interpretações respectivamente sobre $\mathbf{K}$ e sobre $\mathbf{K'}$, para $\mathbf{L_0}$ e para $\mathbf{L_1}$, coincidindo em $\mathbf{L_*}$; e $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V'}$ duas $\mathbb{L}$-valorações respectivamente para $\mathbf{L_0}$ e $\mathbf{L_1}$ geradas respectivamente por $\mathcal{P}$ e $\mathbf{K}$ e por $\mathcal{P'}$ e $\mathbf{K'}$, onde $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P'}$ são duas $\mathbb{L}$-correspondências semânticas principais (definidas neste trabalho), respectivamente para $\mathbf{L_0}$ e para $\mathbf{L_1}$. Então as seguintes proposições são válidas, para cada termo $\mathtt{t}$, para cada fórmula α, e para cada coleção de fórmulas Γ em $\mathbf{L_*}$:

- $\Omega(\mathtt{t}) = \Omega'(\mathtt{t})$;
- $\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha) = \Omega'_{\mathcal{M}}(\alpha)$;
- $\mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{V'}(\alpha)$;
- a semântica de $\mathbb{L}$ é invariante com respeito a mudanças de linguagem.

Prova: basta usar o escólio 2.58, o lema 2.59, e indução sobre fórmulas.

<u>Lema 3.8</u>: Se Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação completa para $\mathbf{L_0}$, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Omega_{\mathcal{M}}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha(x|\mathtt{t})) = 1$, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ em $\mathbf{L_0}$;
- $\Omega_{\mathcal{M}}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{M}}(\alpha(x|\mathtt{t})) = 1$, para algum termo fechado $\mathtt{t}$ em $\mathbf{L_0}$.

Prova: basta usar o lema 3.1.

Corolário 3.9: Se $\mathbb{L}$ é distinta de **LEI** e **LSR**, **V** é uma $\mathbb{L}$-valoração completa para $\mathbf{L_0}$, e δ é uma fórmula de $\mathbf{L_0}$ possuindo no máximo x como variável livre, então valem as seguintes asserções:

- $\mathbf{V}(\forall_{\mathtt{i}} x\ \delta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\delta(x|\mathtt{t})) = 1$, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ em $\mathbf{L_0}$ subordinado a $\mathtt{i}$;
- $\mathbf{V}(\exists_{\mathtt{i}} x\ \delta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\delta(x|\mathtt{t})) = 1$, para algum termo fechado $\mathtt{t}$ em $\mathbf{L_0}$ subordinado a $\mathtt{i}$.
- **V** é regular.

Prova: basta usar o lema 3.8 e o corolário 3.6.

Lema 3.10: Sejam **K** e Ω respectivamente uma $\mathbb{L}$-estrutura e uma $\mathbb{L}$-interpretação completa para $\mathbf{L_0}$ tal que Ω está sobre **K**, e seja **V** uma função regular de $\mathbf{L_0}$ em $\{0,1\}$. Então as seguintes proposições são equivalentes:

- **V** é (uma $\mathbb{L}$-valoração para $\mathbf{L_0}$) gerada por **K** e $\mathcal{P}$;
- para toda fórmula fechada α de $\mathbf{L_0}$, as seguintes condições são equivalentes:
    - ♦ $\mathbf{V}(\alpha) = 1$;
    - ♦ $\Omega'_{\mathcal{P}}(\alpha) = 1$, para toda $\mathbb{L}$-interpretação Ω' para $\mathbf{L_0}$ semelhante a Ω.

Em particular, se $\mathbb{L}$ é uma lógica distinta de **LEI** e **LSR**, então a segunda proposição acima pode ser formulada de um modo simplificado, dado abaixo:

- $\mathbf{V}(\alpha) = \Omega_{\mathcal{P}}(\alpha)$ para toda fórmula fechada α em $\mathbf{L_0}$.

Prova: basta usar os lemas 3.1 e 3.6.

Corolário 3.11: Duas $\mathbb{L}$-valorações completas $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ para $\overline{\mathbf{L}}^*$ são idênticas se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas, para cada fórmula atômica própria **P** fechada em $\overline{\mathbf{L}}^*$:

- $\mathbf{V_1}(\mathbf{P}) = \mathbf{V_2}(\mathbf{P})$;
- $\mathbf{V_1}(\neg\mathbf{P}) = \mathbf{V_2}(\neg\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 3.10, e o corolário 1.13[1].

---

[1] Note que neste caso $\mathbb{L}$ é distinta de **LEI** e **LSR**, pois $\overline{\mathbf{L}}^*$ não é uma linguagem para **LEI** ou para **LSR**.

<u>Corolário 3.12</u>: Se **K** e **V** são respectivamente uma $\mathbb{L}$-estrutura e uma $\mathbb{L}$-valoração completa para $\overline{\mathbb{L}}^*$[1], e Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$ sobre **K**, então as seguintes proposições são equivalentes:

- **V** é gerada por **K** e $\mathcal{P}$;
- para toda fórmula atômica própria fechada **P** de $\mathbf{L_0}$, valem as condições abaixo:
  - $\mathbf{V}(\mathbf{P}) = \Omega_{\mathcal{P}}(\mathbf{P})$;
  - $\mathbf{V}(\neg\mathbf{P}) = \Omega_{\mathcal{P}}(\neg\mathbf{P})$.

Prova: basta usar o lema 3.10 e o corolário 3.11.

<u>Lema 3.13</u>: Se Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$ e Ω_{c} é uma canonização de Ω, então valem as seguintes asserções:

- $\Omega_{\mathsf{t}} = \Omega_{\mathsf{t}} \circ (\Omega_{\mathsf{c}})_{\mathsf{t}}$;
- se Ω é completa, então $\Omega_{\mathcal{M}} = (\Omega_{\mathsf{c}})_{\mathcal{M}}$.

Prova: basta usar os lemas 2.61, 2.62 e 3.8.

<u>Lema 3.14</u>: Se **K** é uma $\mathbb{L}$-estrutura completa para $\mathbf{L_0}$ e **V** é a $\mathbb{L}$-valoração para $\mathbf{L_0}$ gerada por **K** e $\mathcal{P}$, então **V** é também gerada por $\mathbf{K_c}$ e $\mathcal{P}$.

Prova: basta aplicar os lemas 2.4, 2.60 (a segunda proposição) e 3.13.

§4. Semânticas para as Lógicas LI*, PCL* e NALL*

Definimos e estudamos nesta seção semânticas para as lógicas **LI***, **PCL*** e **NALL***. Especificamos também, brevemente, a fim de ilustrar novas aplicações para alguns dos conceitos semânticos definidos neste trabalho, semânticas para as lógicas quantificacionais clássica e positiva clássica.

---

[1] Considere a nota anterior.

No final de 1989, tivemos uma intuição básica acerca de como definir uma semântica recursiva para lógicas paraconsistentes; posteriormente, considerando algumas variações conceituais em torno desta percepção inicial, definimos semânticas recursivas para uma família inteira de lógicas paraconsistentes e/ou paracompletas.

Transcrevemos abaixo uma história sufi, intitulada *"Dois Lados"*, que encontramos em [34], pgs. 197-198, a qual reflete com muita fidelidade a nossa intuição original:

"Os mantos coloridos dos dervixes, desenhados com propósito de ensino, e às vezes imitados como mera decoração, foram introduzidos na Espanha, na Idade Média, da seguinte forma: um rei cristão, que gostava de desfiles pomposos e também se orgulhava de seu saber filosófico, pediu a um sufi, conhecido como El-Agarin, que o iniciasse em sua ciência.

"— Nós lhe oferecemos observação e reflexão — disse-lhe El-Agarin. — Mas antes deves aprender toda a extensão do seu significado.

"— Já sabemos como prestar atenção. Temos estudado bastante, através de nossa tradição, todos os passos preliminares para chegar ao conhecimento — disse o rei.

"— Muito bem — respondeu El-Agarin. — Durante o desfile de amanhã daremos uma demonstração de nosso ensinamento para Vossa Majestade.

"Fizeram-se os preparativos, e no dia seguinte os dervixes do 'ribat' (centro de ensino) de El-Agarin desfilaram pelas ruas estreitas da cidade andaluza. O rei e seus cortesãos estavam postados em ambos os lados do trajeto: os nobres à direita, os cavaleiros à esquerda.

"Quando a procissão terminou El-Agarin se dirigiu ao rei e disse:

"*— Por favor, majestade, pergunte aos fidalgos do lado esquerdo de que cor era o manto dos dervixes.*

"Todos os cavaleiros juraram pelas escrituras e por sua honra que as vestimentas eram azuis.

"O rei e os nobres se mostraram surpresos e confusos. Aquela não era, de modo algum, a cor que tinham visto.

“— Todos nós vimos perfeitamente que usavam mantos castanhos – disse o rei. — E entre nós há homens muito respeitados, homens de grande santidade e fé.

“O rei ordenou então que todos os cavaleiros se preparassem para ser castigados e degradados. Os que tinham visto os mantos castanhos foram separados: seriam premiados. O processo durou algum tempo, findo o qual o rei disse a El-Agarin:

“— Que feitiçaria você fez, homem malvado? Que atos do demônio são os seus que podem fazer com que os fidalgos mais honrados do cristianismo neguem a verdade, abandonem suas esperanças de redenção e traiam nossa confiança, ficando incapacitados para a batalha?

“— Na metade visível do lado em que estávamos — disse o sufi — os mantos eram de cor castanha. Na outra metade eram de cor azul. Sem preparação, sua predisposição o induz a enganar-se a si mesmo e a interpretar-nos mal. Como podemos ensinar a alguém nestas circunstâncias?”

Em toda esta seção, $\mathbf{L}^*$ é uma linguagem quantificacional monossortida.

Definição 4.1: Denotamos a *lógica positiva quantificacional clássica* por **CPL** (do inglês “*Classical Positive Logic*”). $\mathbf{L_P}$ é uma linguagem quantificacional monossortida cujos únicos conectivos são “$\rightarrow$”, “$\wedge$” e “$\vee$”, e cujos únicos quantificadores são “$\forall$” e “$\exists$”. $\mathbf{L_P}$ é uma linguagem para **CPL**. Uma **CPL**-*estrutura* (**CPL**-*interpretação*) *para* $\mathbf{L_P}$ é uma estrutura (interpretação) simples para $\mathbf{L_P}$. Uma interpretação simples $\mathtt{I}$ para $\mathbf{L_P}$ define uma função adicional de $\mathbf{L_P}$ em $\{0,1\}$, notada por $\mathtt{I}_\mathbf{P}$. A função que associa a cada interpretação simples $\mathtt{I}$ para $\mathbf{L_P}$ a função $\mathtt{I}_\mathbf{P}$ é dita a *correspondência semântica positiva clássica canônica* para $\mathbf{L_P}$. $\mathtt{I}_\mathbf{P}$ atende às seguintes condições:

- $\mathtt{I}_\mathbf{P}(\mathbf{P}) = \mathtt{I}^\mathbf{f}(\mathbf{P})$;
- $\mathtt{I}_\mathbf{P}$ é bem comportada proposicionalmente;
- a correspondência semântica positiva clássica canônica para $\mathbf{L_P}$ é bem comportada quantificacionalmente.

Uma função **V** de $\mathsf{L_P}$ em {0,1} é dita ser uma **CPL**-*valoração para* $\mathsf{L_P}$ se existe uma estrutura simples U para $\mathsf{L_P}$ tal que **V** é a valoração gerada por U e pela correspondência semântica positiva clássica canônica para $\mathsf{L_P}$. Dizemos também que U gera **V** em **CPL**.

<u>Definição 4.2</u>: Denotamos a lógica quantificacional clássica por **CL** (do inglês "*Classical Logic*"). L^* é uma linguagem para **CL**. Uma **CL**-*estrutura* (**CL**-*interpretação*) *para* L^* é uma estrutura (interpretação) simples para L^*. Uma interpretação simples $\mathtt{I}$ para L^* define uma função adicional de L^* em {0,1}, notada por $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}$. A função que associa a cada interpretação simples $\mathtt{I}$ para L^* a função $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}$ é dita a *correspondência semântica clássica canônica* para L^*. $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}$ atende às seguintes condições:

- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\mathbf{P}) = \mathtt{I}^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$;
- a correspondência semântica clássica canônica para L^* é $\neg$-heterodoxa com respeito a si própria.

Uma função **V** de L^* em {0,1} é dita ser uma **CL**-*valoração para* L^* se existe uma estrutura simples **U** para L^* tal que **V** é a valoração gerada por **U** e pela correspondência semântica clássica canônica para L^*; dizemos também que **U** gera **V** em **CL**. Para cada interpretação simples $\mathtt{I}$ para L^* sobre uma estrutura simples **U** para L^*, notamos a função $\mathbf{U_s} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{f}}$ por $\mathtt{I}$, e a restrição de $\mathbf{U_s} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{t}} \cup \mathtt{I}_{\mathbf{f}}$ à coleção de sinais, termos fechados e fórmulas fechadas em L^* por **U**.

<u>Escólio 4.3</u>: Se $\mathtt{I}$ é uma interpretação simples para L^*, então as seguintes condições são satisfeitas:

- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha) = 0$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha \to \beta) = 1$ sss $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha) = 0$ ou $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\beta) = 1$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha) = 1$ e $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\beta) = 1$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\alpha) = 1$ ou $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\beta) = 1$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\forall \boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\mathtt{I}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{f}}(\alpha) = 0$, para todo $\mathbf{d} \in |\mathtt{I}|$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{f}}(\exists \boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\mathtt{I}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{f}}(\alpha) = 0$, para algum $\mathbf{d} \in |\mathtt{I}|$;

- se $\mathbf{L_P} \subseteq \mathbf{L^*}$, então $\mathbb{I}_{\mathbf{P}}$ é a restrição de $\mathbb{I}_{\mathbf{f}}$ em $\mathbf{L_P}$.

<u>Definição 4.4</u>: $\mathbf{L^*}$ é uma linguagem para as lógicas $\mathbf{LI^*_1}$ e $\mathbf{PCL^*}$; e $\mathbf{L^{*\prime}}$ é uma linguagem para a lógica $\mathbf{LI^*_2}$. Sejam $\mathbb{L}$ uma das lógicas $\mathbf{LI^*}$ ou $\mathbf{PCL^*}$, e $\mathbf{\bar{L}^*}$ uma linguagem para $\mathbb{L}$. Uma $\mathbb{L}$-estrutura (interpretação) para $\mathbf{L^*}$ é uma estrutura (interpretação) múltipla para $\mathbf{L^*}$.

<u>Definição 4.5</u>: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma $\mathbf{LI^*_1}$-valoração para $\mathbf{L^*}$ se $\mathbf{V}$ é uma função de $\mathbf{L^*}$ em $\{0,1\}$, há uma estrutura múltipla $\mathbf{Y}$ para $\mathbf{L^*}$ e duas $\mathbf{LI^*_1}$-correspondências semânticas **max** e **min** para $\mathbf{L^*}$ de modo que valham as seguintes condições:

- $\mathbf{V}$ é a valoração gerada por $\mathbf{Y}$ e **max**;
- $\Upsilon_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Upsilon^{\mathbf{max}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação múltipla Υ para $\mathbf{L^*}$;
- $\Upsilon_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Upsilon^{\mathbf{min}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação múltipla Υ para $\mathbf{L^*}$;
- **max** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **min**.

Dizemos também que $\mathbf{Y}$ *gera* $\mathbf{V}$ *em* $\mathbf{LI^*_1}$.

$\mathbf{V}$ é uma $\mathbf{LI^*_2}$-valoração para $\mathbf{L^{*\prime}}$ se forem cumpridas todas as condições acima, com a diferença de que **max** e **min** são $\mathbf{LI^*_2}$-correspondências semânticas para $\mathbf{L^{*\prime}}$, valendo também a seguinte condição adicional:

- $\Upsilon_{\mathbf{max}}(\perp) = \Upsilon_{\mathbf{min}}(\perp) = 0$, para cada interpretação múltipla Υ.

Neste último caso, dizemos também que $\mathbf{Y}$ *gera* $\mathbf{V}$ *em* $\mathbf{LI^*_2}$.

<u>Definição 4.6</u>: Dizemos que $\mathbf{V}$ é uma $\mathbf{PCL^*}$-valoração para $\mathbf{L^*}$ se $\mathbf{V}$ é uma função de $\mathbf{L^*}$ em $\{0,1\}$, há uma estrutura múltipla $\mathbf{Y}$ para $\mathbf{L^*}$ e duas $\mathbf{PCL^*}$-correspondências semânticas **min** e **max** para $\mathbf{L^*}$, de modo que valham as seguintes condições:

- $\mathbf{V}$ é a valoração gerada por $\mathbf{Y}$ e **min**;
- $\Upsilon_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Upsilon^{\mathbf{min}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação múltipla Υ para $\mathbf{L^*}$;
- $\Upsilon_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Upsilon^{\mathbf{max}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação múltipla Υ para $\mathbf{L^*}$;
- **min** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **max**.

Dizemos também que $\mathbf{Y}$ *gera* $\mathbf{V}$ *em* $\mathbf{PCL^*}$.

Definição 4.7: $\mathcal{L}^*$ é uma linguagem para a lógica $\mathbf{NALL}_1^*$, e $\mathcal{L}^{*\prime}$ é uma linguagem para a lógica $\mathbf{NALL}_2^*$. Sejam $\mathbb{L}$ uma das lógicas $\mathbf{NALL}_1^*$ ou $\mathbf{NALL}_2^*$, e $\mathcal{L}^*$ uma linguagem para $\mathbb{L}$. Uma $\mathbb{L}$-estrutura (interpretação) para $\mathcal{L}^*$ é uma estrutura (interpretação) supermúltipla para $\mathcal{L}^*$.

Definição 4.8: Seja **V** uma função de $\mathcal{L}^*$ em {0,1}, e Z uma estrutura supermúltipla para $\mathcal{L}^*$. Dizemos que Z *gera* **V** *em* $\mathbf{NALL}_1^*$ *por maximização*, ou que **V** *é gerada em* $\mathbf{NALL}_1^*$ *por maximização*, se existem duas $\mathbf{NALL}_1^*$-correspondências semânticas **max** e **min** para $\mathcal{L}^*$, de modo que valham as seguintes condições:

- **V** é a valoração gerada por Z e **max**;
- $\Psi_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Psi^{\mathbf{max}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação supermúltipla Ψ para $\mathcal{L}^*$;
- $\Psi_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Psi^{\mathbf{min}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação supermúltipla Ψ para $\mathcal{L}^*$;
- **max** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **min**.

Se **V** é uma função de $\mathcal{L}^{*\prime}$ em {0,1}, dizemos que Z *gera* **V** *em* $\mathbf{NALL}_2^*$ *por maximização*, ou que **V** *é gerada em* $\mathbf{NALL}_2^*$ *por maximização*, se forem cumpridas todas as condições acima, com a diferença de que **max** e **min** são $\mathbf{NALL}_2^*$-correspondências semânticas para $\mathcal{L}^{*\prime}$, valendo também a seguinte condição adicional:

- $\Psi_{\mathbf{max}}(\perp) = \Psi_{\mathbf{min}}(\perp) = 0$, para cada interpretação supermúltipla Ψ para $\mathcal{L}^{*\prime}$.

Definição 4.9: Seja **V** uma função de $\mathcal{L}^*$ em {0,1}, e Z uma estrutura supermúltipla para $\mathcal{L}^*$. Dizemos que Z *gera* **V** (*em* $\mathbf{NALL}_1^*$) *por minimização*, ou que **V** *é gerada em* $\mathbf{NALL}_1^*$ *por minimização*, se existem duas $\mathbf{NALL}_1^*$-correspondências semânticas **max** e **min** para $\mathcal{L}^*$, de modo que valham as seguintes condições:

- **V** é a valoração gerada por Z e **min**;
- $\Psi_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Psi^{\mathbf{min}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação supermúltipla Ψ para $\mathcal{L}^*$;
- $\Psi_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Psi^{\mathbf{max}}(\mathbf{P})$, para cada interpretação supermúltipla Ψ para $\mathcal{L}^*$;
- **min** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **max**.

Se **V** é uma função de $\mathcal{L}^{*\prime}$ em {0,1}, dizemos que Z *gera* **V** (*em* $\mathbf{NALL}_2^*$) *por minimização*, ou que **V** *é gerada em* $\mathbf{NALL}_2^*$ *por minimização*, se forem cumpridas todas as condições acima, com a diferença de que **min** e **max** são $\mathbf{NALL}_2^*$-correspondências semânticas para $\mathcal{L}^{*\prime}$, valendo também a seguinte condição adicional:

- $\Psi_{\mathbf{max}}(\perp) = \Psi_{\mathbf{min}}(\perp) = 0$, para cada interpretação supermúltipla Ψ para $\mathcal{L}^{*\prime}$.

Definição 4.10: Uma função **V** de $\overline{\mathcal{L}}^*$ em {0,1} é dita uma $\mathbf{NALL}_j^*$-valoração para $\overline{\mathcal{L}}^*$ (j $\in$ {1,2}) se **V** é gerada em $\mathbf{NALL}_j^*$ por maximização ou por minimização.

Escólio 4.11: Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas $\mathbf{LI}_2^*$ ou $\mathbf{NALL}_2^*$ e $\mathbf{V}$ é uma $\mathbb{L}$-valoração para $\mathbf{L}^{*\prime}$, então $\mathbf{V}(\bot) = 0$ e $\mathbf{V}(\neg\bot) = 1$.

Prova: basta observar as definições 4.5 e 4.10.

Lema 4.12: Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}^*$ e $\mathbf{V}$ é uma $\mathbb{L}$-valoração completa para $\overline{\mathbf{L}}^*$, então $\mathbf{V}$ é uma função $\neg$-heterodoxa regular.

Prova: basta considerar o corolários 3.6 e 3.9.

Lema 4.13: Seja $\mathbb{L}$ uma das lógicas $\mathbf{LI}^*$ ou $\mathbf{PCL}^*$. Se **max** e **min** são as $\mathbb{L}$-correspondências semânticas para $\overline{\mathbf{L}}^*$ especificadas em uma das definições 4.5 ou 4.6, e Υ é uma estrutura múltipla para $\overline{\mathbf{L}}^*$, então $\Upsilon_{\mathbf{min}}(\alpha) \leq \Upsilon_{\mathbf{max}}(\alpha)$, para qualquer fórmula α em $\overline{\mathbf{L}}^*$.

Prova: basta considerar o corolário **2.11** e a definição **2.33**.

Corolário 4.14: Se α é uma fórmula fechada em $\overline{\mathbf{L}}^*$, então as seguintes proposições são válidas:

- Se $\mathbf{V}$ é uma $\mathbf{LI}^*$-valoração para $\overline{\mathbf{L}}^*$, então $V(\alpha) = 1$ ou $V(\neg\alpha) = 1$;
- Se $\mathbf{V}$ é uma $\mathbf{PCL}^*$-valoração para $\overline{\mathbf{L}}^*$, então $V(\alpha) = 0$ ou $V(\neg\alpha) = 0$.

Prova: basta usar os lemas 4.13 e 3.6.

Corolário 4.15: Para quaisquer fórmulas α e β em $\overline{\mathbf{L}}^*$, as seguintes proposições são válidas:

- $\models_{\mathbf{LI}^*} \alpha \vee \neg\alpha$; $\quad \models_{\mathbf{PCL}^*} \alpha \to \neg\alpha \to \beta$.

Prova: basta usar o lema 4.13.

Escólio 4.16: Se **max** e **min** são as $\mathbf{NALL}_j^*$-correspondências semânticas para $\overline{\mathbf{L}}^*$ especificadas em qualquer uma das definições 4.8 ou 4.9, então nem sempre $\Psi_{\mathbf{min}}(\alpha) \leq \Psi_{\mathbf{max}}(\alpha)$, dada uma interpretação supermúltipla Ψ para $\overline{\mathbf{L}}^*$ e uma fórmula α em $\overline{\mathbf{L}}^*$.

Prova:

Sejam $\mathbf{c}$ uma constante e $\mathbf{p}$ um sinal de predicativo de aridade 1 em $\overline{\mathbf{L}}^*$, e U_1, U_2, U_3 e U_4 estruturas canônicas simples obedecendo às seguintes condições:

- $\mathbf{c} \notin U_1(\mathbf{p})$; $\mathbf{c} \notin U_2(\mathbf{p})$; $\mathbf{c} \in U_3(\mathbf{p})$; $\mathbf{c} \in U_4(\mathbf{p})$.

Se $\Psi = \langle\{\{U_1,U_3\},\{U_2,U_4\}\},\mathbf{s}\rangle$, então $\Psi_{\mathbf{min}}(\mathbf{p}(\mathbf{c})) = 1$ e $\Psi_{\mathbf{max}}(\mathbf{p}(\mathbf{c})) = 0$.

●

<u>Lema 4.17</u>: Considerando **V** e **V’** funções respectivamente de L^* em {0,1} e de L^{*}’ em {0,1}, temos que as seguintes proposições são válidas:

- toda estrutura múltipla para $\overline{\mathsf{L}}^*$ gera **V** em $\mathbf{LI}_1^*$ e **V’** em $\mathbf{LI}_2^*$ de modo que **V** é a restrição de **V’** em L^*;
- toda estrutura supermúltipla para $\overline{\mathsf{L}}^*$ gera **V** em $\mathbf{NALL}_1^*$ por maximização e **V’** em $\mathbf{NALL}_2^*$ por maximização de modo que **V** é a restrição de **V’** em L^*;
- toda estrutura supermúltipla para $\overline{\mathsf{L}}^*$ gera **V** em $\mathbf{NALL}_1^*$ por minimização e **V’** em $\mathbf{NALL}_2^*$ por minimização de modo que **V** é a restrição de **V’** em L^*.

Prova: basta usar o lema 2.10.

<u>Corolário 4.18</u>: Se $\mathbb{L}_1$ é uma das lógicas $\mathbf{LI}_1^*$ ou $\mathbf{NALL}_1^*$, e $\mathbb{L}_2$ é respectivamente uma das lógicas $\mathbf{LI}_2^*$ ou $\mathbf{NALL}_2^*$, então $\mathbb{L}_2$ é uma extensão conservativa de $\mathbb{L}_1$.

Prova: basta usar o lema 4.17.

<u>Definição 4.19</u>: Dada uma linguagem proposicional ou quantificacional L_0 possuindo pelo menos o conectivo “¬”, notamos a coleção das fórmulas de L_0 de uma das formas **P** ou ¬**P**, onde **P** é uma fórmula atômica fechada própria de L_0, por **lit**(L_0).

<u>Definição 4.20</u>: Dada uma transformação **V** de **lit**(L^*) em {0,1}, definimos as seguintes estruturas canônicas simples para L^*, as quais satisfazem as cláusulas abaixo, para todo sinal predicativo n-ário **p** em L^* (n ≥ 0), e para quaisquer termos fechados $\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n$ em L^*:

- $\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n \rangle \in \mathbf{V}^1(\mathbf{p})$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1$;
- $\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n \rangle \in \mathbf{V}^2(\mathbf{p})$ sss $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0$;
- $\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n \rangle \in \mathbf{V}^3(\mathbf{p})$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1$ ou $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0$;
- $\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n \rangle \in \mathbf{V}^4(\mathbf{p})$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1$ e $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0$.

<u>Lema 4.21</u>: Se **V** é uma transformação de **lit**(L^*) em {0,1}, e **V’** é uma função de $\overline{\mathsf{L}}^*$ em {0,1}, então **V** coincide com **V’** em **lit**(L^*) se uma das seguintes condições for satisfeita:

(i) $\begin{cases} \text{para cada fórmula atômica fechada } \mathbf{P} \text{ em } \mathcal{L}^*,\ \mathbf{V}(\mathbf{P}) = 1 \text{ ou } \mathbf{V}(\neg\mathbf{P}) = 1, \\ \{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2\} \text{ gera } \mathbf{V'} \text{ em } \mathbf{LI}^*; \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \text{para cada fórmula atômica fechada } \mathbf{P} \text{ em } \mathcal{L}^*,\ \mathbf{V}(\mathbf{P}) = 0 \text{ ou } \mathbf{V}(\neg\mathbf{P}) = 0, \\ \{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2\} \text{ gera } \mathbf{V'} \text{ em } \mathbf{PC}\mathcal{L}^*; \end{cases}$

(iii) $\{\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^3\},\{\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^4\}\}$ gera $\mathbf{V'}$ em $\mathbf{NAL}\mathcal{L}^*$ por maximização;

(iv) $\{\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^4\},\{\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^3\}\}$ gera $\mathbf{V'}$ em $\mathbf{NAL}\mathcal{L}^*$ por minimização.

Prova:

Sejam $\mathbf{n} \geq 0$, $\mathbf{p}$ um sinal predicativo $\mathbf{n}$-ário e $\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n$ termos fechados arbitrários em $\mathcal{L}^*$.

Caso $\mathbf{V'}$ é gerada em $\mathbf{LI}^*$ por $\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2\}$:

$*$ $\mathbf{V'}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ sss $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^1(\mathbf{p})$ ou $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^2(\mathbf{p})$

sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ ou $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$.

$*$ $\mathbf{V'}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ sss $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^1(\mathbf{p})$ ou $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^2(\mathbf{p})$

sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0$ ou $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ sss $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$.

Caso $\mathbf{V'}$ é a valoração gerada em $\mathbf{PC}\mathcal{L}^*$ por $\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2\}$:

$*$ $\mathbf{V'}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ sss $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^1(\mathbf{p})$ e $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^2(\mathbf{p})$

sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ e $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$.

$*$ $\mathbf{V'}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ sss $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^1(\mathbf{p})$ e $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^2(\mathbf{p})$

sss $\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0$ e $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ sss $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$.

Caso $\mathbf{V'}$ é a valoração gerada em $\mathbf{NAL}\mathcal{L}^*$ por maximização, tal que $\{\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^3\},\{\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^4\}\}$ gera $\mathbf{V'}$:

$*$ $\mathbf{V'}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$

sss

$[\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^1(\mathbf{p})$ e $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^3(\mathbf{p})]$ ou $[\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^2(\mathbf{p})$ e $\langle \mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^4(\mathbf{p})]$ **sss**

$\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ e $[(\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ ou $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0)]$

ou

$\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0)$ e $[\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$ e $\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 0]$

sss

$\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = 1$.

$$* \quad \mathbf{V'}(\neg \mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1$$

sss

$$[\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^1(\mathbf{p}) \text{ e } \langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^3(\mathbf{p})] \text{ ou } [\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^2(\mathbf{p}) \text{ e } \langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^4(\mathbf{p})]$$

sss

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ e } [\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ e } \mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1]$$

ou

$$\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1 \text{ e}[\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ ou } \mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1]$$

sss

$$\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1.$$

Caso **V'** é a valoração gerada em $\mathbf{NALL}^*$ por minimização, tal que $\{\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^4\},\{\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^3\}\}$ gera **V'**.

$$* \quad \mathbf{V'}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1$$

sss

$$[\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^1(\mathbf{p}) \text{ ou } \langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^4(\mathbf{p})] \text{ e } [\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^2(\mathbf{p}) \text{ ou } \langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \in \mathbf{V}^3(\mathbf{p})]$$

sss

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1 \text{ ou } [\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1 \text{ e } \mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0]$$

e

$$\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ ou } [\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1 \text{ ou } \mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0]$$

sss

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1.$$

$$* \quad \mathbf{V'}(\neg \mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1$$

sss

$$[\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^1(\mathbf{p}) \text{ ou } \langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^4(\mathbf{p})] \text{ e } [\langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^2(\mathbf{p}) \text{ ou } \langle \mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n\rangle \notin \mathbf{V}^3(\mathbf{p})]$$

sss

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ ou } [\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ ou } \mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1]$$

e

$$\mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1 \text{ ou } [\mathbf{V}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 0 \text{ e } \mathbf{V}(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1]$$

sss

$$V(\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)) = 1.$$

●

Corolário 4.22: Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas **LI***, **PCL*** ou **NALL***, e **V** é uma $\mathbb{L}$-valoração completa para $\overline{\mathbf{L}}^*$, então as seguintes proposições são válidas:

(i) $\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2\}$ gera **V** em **LI***;

(ii) $\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^2\}$ gera **V** em **PCL***;

(iii) $\{\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^3\},\{\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^4\}\}$ gera **V** em **NALL*** por maximização;

(iv) $\{\{\mathbf{V}^1,\mathbf{V}^4\},\{\mathbf{V}^2,\mathbf{V}^3\}\}$ gera **V** em **NALL*** por minimização.

Prova:

Para cada uma das proposições acima, seja **K** a $\mathbb{L}$-estrutura para $\overline{\mathbf{L}}^*$ que queremos mostrar que gera **V**. Se **V'** é a $\mathbb{L}$-valoração para $\overline{\mathbf{L}}^*$ gerada por **K**, devemos mostrar que **V** = **V'**.

Se $\perp \in \overline{\mathbf{L}}^*$, temos, segundo o escólio 4.11, que $\mathbf{V}(\perp) = \mathbf{V'}(\perp) = 0$.

Dados $\mathbf{n} \geq 0$, um sinal predicativo **p** n-ário e **n** termos fechados arbitrários $\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n$ em $\overline{\mathbf{L}}^*$, temos que, segundo o corolário 4.14 e o lema 4.21, **V** e **V'** coincidem em $\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)$ e $\neg\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,...,\mathtt{t}_n)$, e daí, segundo o lema 3.11, **V** = **V'**.

●

Corolário 4.23: Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas **LI***, **PCL*** ou **NALL***, e **V** é uma $\mathbb{L}$-valoração para $\overline{\mathbf{L}}^*$, então as seguintes proposições são válidas:

- se $\mathbb{L}$ é **LI*** ou **PCL***, então existe uma estrutura múltipla para $\overline{\mathbf{L}}^*$ possuindo dois elementos que gera **V** em $\mathbb{L}$;
- se $\mathbb{L}$ é **NALL*** então existe uma estrutura supermúltipla para $\overline{\mathbf{L}}^*$ possuindo dois elementos, onde cada um destes possui dois elementos, que gera **V** em **NALL*** por maximização (por minimização).[1]

Prova:

Para cada uma das proposições acima, seja **K** uma $\mathbb{L}$-estrutura para $\overline{\mathbf{L}}^*$ descrita que gera **V** em $\mathbb{L}$ em condições análogas às descritas na proposição em questão.

---

[1] Gostaríamos de citar aqui um trecho de [7], página 52, acerca da filosofia de Alcmeão de Cróton:

"… a multiplicidade das coisas humanas pode ser reduzida a pares, mas os contrários mencionados não são, como no caso dos pitagóricos, por ele definidos com precisão, e sim escolhidos ao acaso, como branco e preto, doce e amargo, bom e mau, grande e pequeno."

Seja $\overline{\overline{\mathbb{L}^*}}$ a linguagem obtida de $\overline{\mathbb{L}^*}$ acrescentando, para cada elemento de $|\mathbf{K}|$, o seu nome como uma nova constante. Seja $\overline{\mathbf{K}}$ uma extensão de $\mathbf{K}$ em $\overline{\overline{\mathbb{L}^*}}$ que associa cada nova constante de $\overline{\overline{\mathbb{L}^*}}$ ao objeto que ela designa, e $\overline{\mathbf{V}}$ a valoração gerada por $\overline{\mathbf{K}}$ e pela mesma correspondência semântica usada para gerar $\mathbf{V}$, a menos da mudança de linguagem.

Temos que $\overline{\mathbf{V}}$ é uma $\mathbb{L}$-valoração completa para $\overline{\overline{\mathbb{L}^*}}$, e daí, pelos lemas 4.22 e 3.7, temos que:

* a restrição de $\{\overline{\mathbf{V}}^1,\overline{\mathbf{V}}^2\}$ em $\overline{\mathbb{L}^*}$ gera $\mathbf{V}$ em $\mathbf{LI}^*$;
* a restrição de $\{\overline{\mathbf{V}}^1,\overline{\mathbf{V}}^2\}$ em $\overline{\mathbb{L}^*}$ gera $\mathbf{V}$ em $\mathbf{PC}\mathbb{L}^*$;
* a restrição de $\{\{\overline{\mathbf{V}}^1,\overline{\mathbf{V}}^3\}\{\overline{\mathbf{V}}^2,\overline{\mathbf{V}}^4\}\}$ em $\overline{\mathbb{L}^*}$ gera $\mathbf{V}$ em $\mathbf{NAL}\mathbb{L}^*$ por maximização;
* a restrição de $\{\{\overline{\mathbf{V}}^1,\overline{\mathbf{V}}^4\}\{\overline{\mathbf{V}}^2,\overline{\mathbf{V}}^3\}\}$ em $\overline{\mathbb{L}^*}$ gera $\mathbf{V}$ em $\mathbf{NAL}\mathbb{L}^*$ por minimização.

●

<u>Corolário 4.24</u>: Sendo $\mathbf{V}$ uma função de $\overline{\mathbb{L}^*}$ em $\{0,1\}$, as seguintes proposições são equivalentes:

- $\mathbf{V}$ é uma $\mathbf{NAL}\mathbb{L}^*$-valoração para $\overline{\mathbb{L}^*}$;
- $\mathbf{V}$ é gerada em $\mathbf{NAL}\mathbb{L}^*$ por maximização;
- $\mathbf{V}$ é gerada em $\mathbf{NAL}\mathbb{L}^*$ por minimização.

Prova: basta usar o corolário 4.23.

Lema 4.25: Sendo $\mathbb{L}$ uma das lógicas **LI***, **PCL*** ou **NALL***, as seguintes proposições caracterizam $\mathbb{L}$-valorações completas para $\bar{\mathbf{L}}^*$:

(i) **V** é uma $\mathbf{LI}_1^*$-valoração completa para $\mathbf{L}^*$

sss

$$\begin{cases} \mathbf{V} \text{ é uma função } \neg\text{-heterodoxa regular de } \mathbf{L}^* \text{ em } \{0,1\}, \\ \mathbf{V}(\alpha \vee \neg\alpha) = 1, \text{ para qualquer fórmula } \alpha \text{ em } \mathbf{L}^*; \end{cases}$$

(ii) **V** é uma $\mathbf{LI}_2^*$-valoração completa para $\mathbf{L}^{*\prime}$

sss

$$\begin{cases} \mathbf{V} \text{ é uma função } \neg\text{-heterodoxa regular de } \mathbf{L}^{*\prime} \text{ em } \{0,1\}, \\ \mathbf{V}(\alpha \vee \neg\alpha) = 1, \text{ para qualquer fórmula } \alpha \text{ em } \mathbf{L}^{*\prime}, \\ \mathbf{V}(\perp) = 0; \end{cases}$$

(iv) **V** é uma **PCL***-valoração completa para $\mathbf{L}^*$

sss

$$\begin{cases} \mathbf{V} \text{ é uma função } \neg\text{-heterodoxa regular de } \mathbf{L}^* \text{ em } \{0,1\}, \\ \mathbf{V}(\alpha \to \neg\alpha \to \beta) = 1, \text{ para quaisquer fórmulas } \alpha \text{ e } \beta \text{ em } \mathbf{L}^*; \end{cases}$$

(v) **V** é uma $\mathbf{NALL}_1^*$-valoração completa para $\mathbf{L}^*$

sss

V é uma função $\neg$-heterodoxa regular de $\mathbf{L}^*$ em $\{0,1\}$;

(iv) **V** é uma $\mathbf{NALL}_2^*$-valoração completa para $\mathbf{L}^*$

sss

$$\begin{cases} \mathbf{V} \text{ é uma função } \neg\text{-heterodoxa regular de } \mathbf{L}^* \text{ em } \{0,1\}, \\ \mathbf{V}(\perp) = 0. \end{cases}$$

Prova:

Pelo lema 4.12, pelo corolário 4.15 e pelo escólio 4.11, temos que valem as idas das proposições (i), (ii), (iii) (iv) e (v).

Reciprocamente, para cada uma das proposições acima, suponhamos agora o seu segundo membro. Pelo lema 4.21, temos que existe uma estrutura **K**, construída adequadamente segundo ensina o lema em questão, tal que **K** gera uma $\mathbb{L}$-valoração **V'** para $\bar{\mathbf{L}}^*$, onde $\mathbb{L}$ é a lógica referida em cada proposição considerada, tal que **V** e **V'** coincidem em $\mathbf{lit}(\mathbf{L}^*)$. Como **K** é uma estrutura completa, temos que **V'** é completa, e daí, novamente segundo o lema 4.12, **V'** é uma função ¬-heterodoxa regular, e portanto, pelo lema **1.16**, **V** = **V'**, ou seja, **V** é uma $\mathbb{L}$-valoração completa para $\overline{\mathbf{L}}^{*}$.

●

3. Cálculos Básicos da Inconsistência e da Incompletude

Neste capítulo estudamos alguns conceitos comuns concernentes aos cálculos considerados neste trabalho e, em especial, os cálculos **LI***, **PCL*** e **NALL***.

§1. Variação e Dependência

Realizamos aqui um estudo exaustivo do Teorema da Dedução e de certos conceitos a ele relacionados, com a abrangência necessária para abarcar todos os cálculos vistos nesta tese.

Em toda esta seção, C é um cálculo aplicado, α,β,γ são fórmulas em C, e Γ,ϑ,ζ são coleções de fórmulas em C; as mesmas convenções continuam valendo se usarmos os sinais citados acrescidos de índices ou plicas.

<u>Pré-Definição 1.1</u>: Para cada aplicação de uma regra de inferência **r** em C, consideramos como previamente conhecidos *os objetos variantes em* C *desta aplicação*. Se **r** é uma regra em C cujas aplicações não possuem objetos variantes, dizemos que **r** *é uma regra constante em* C, caso contrário dizemos que **r** *é uma regra variante em* C. Dizemos que ***o*** é *um objeto variante em* C se existe uma aplicação de uma regra em C tal que ***o*** é um objeto variante desta aplicação. Consideramos também como previamente conhecido quando um objeto variante ***o*** *é livre em* uma dada fórmula α; e quando α *está no escopo de **o***. Se C é um dos cálculos quantificacionais definidos neste trabalho, antecipamos que toda variável em C é um objeto variante em C. As seguintes condições adicionais devem ser cumpridas:

- o número de objetos variantes de toda aplicação de alguma regra variante em C é finito e não vazio;
- todo objeto variante de uma aplicação de regra variante não é livre na conseqüência desta aplicação.

<u>Definição 1.2</u>: Seja $\mathcal{D} = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_n \rangle$ uma demonstração em C. Dizemos que $\alpha_\mathbf{i}$ *depende de* $\alpha_\mathbf{j}$ *em* $\mathcal{D}$ ($\mathbf{i},\mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\}$) se uma das seguintes condições for cumprida:

- $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ e $\alpha_\mathbf{i}$ é justificado em $\mathcal{D}$ como uma premissa;
- $\alpha_\mathbf{i}$ é justificado em $\mathcal{D}$ como uma conseqüência de uma aplicação $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_\mathbf{p}}{\alpha_\mathbf{i}}$ de uma regra em C e existe uma hipótese da aplicação $\beta_\mathbf{k}$ ($\mathbf{k} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}$) tal que $\beta_\mathbf{k}$ depende de $\alpha_\mathbf{j}$ em $\mathcal{D}$.

<u>Definição 1.3</u>: Dizemos que uma demonstração $\mathcal{D}$ em C *depende de* uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes se $\mathcal{V}$ contém a coleção dos objetos variantes $\mathcal{O}$ de aplicações de regras em $\mathcal{D}$ possuindo alguma hipótese na qual $\mathcal{O}$ seja livre de modo que esta hipótese dependa em $\mathcal{D}$ de alguma premissa na qual $\mathcal{O}$ seja livre. Se existir uma demonstração em C de α a partir de Γ tal que esta dependa de $\mathcal{V}$, dizemos que α *depende de* $\mathcal{V}$ *a partir de* Γ *em* C, e notamos isto por $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_n\}$ e $\mathbf{n} \geq 1$, notamos $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ também por $\Gamma \vdash^{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_n}_{\mathsf{C}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \varnothing$, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *demonstração invariante* em C. Se α depende de $\varnothing$ a partir de Γ em C, dizemos que α é uma *conseqüência invariante* de Γ em C.

<u>Escólio 1.4</u>: Uma fórmula α depende de $\mathcal{V}$ a partir de Γ em C se, e somente se, pelo menos uma das seguintes condições for cumprida:

- α é um axioma de C;
- $\alpha \in \Gamma$;
- existe uma aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C tal que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_\mathbf{n}$ e, para todo objeto variante $\mathcal{O}$ desta aplicação tal que $\mathcal{O} \notin \mathcal{V}$ e para todo $\alpha_\mathbf{i}$ ($1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$), se $\mathcal{O}$ é livre em $\alpha_\mathbf{i}$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\mathcal{O}$ não é livre em Γ' e $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_\mathbf{i}$.

Se $\mathcal{V} = \varnothing$, podemos substituir a terceira cláusula pela seguinte condição:

- existe uma aplicação de uma regra $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ em C, tal que $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_\mathbf{n}$ e, para todo objeto variante $\mathcal{O}$ desta aplicação e para todo $\alpha_\mathbf{i}$ ($1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$), se $\mathcal{O}$ é livre em $\alpha_\mathbf{i}$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\mathcal{O}$ não é livre em Γ' e $\Gamma' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_\mathbf{i}$.

<u>Escólio 1.5</u>: As seguintes propriedades são válidas para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{C}$":

(i) se existe uma demonstração $\mathcal{D}$ em C de α a partir de Γ cuja coleção de objetos variantes de aplicações de regras de C em $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$;

(ii) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$ então $\Gamma \vdash_{C} \alpha$;

(iii) se $\Gamma \vdash_{C} \alpha$, então existe uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes tal que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$;

(iv) $\vdash_{C} \alpha$ sss $\vdash^{\varnothing}_{C} \alpha$;

(v) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}'}_{C} \alpha$;

(vi) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$;

(vii) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$, então existe $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}'$ é finito e $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}'}_{C} \alpha$;

(viii) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que Γ' é finito e $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$;

(ix) se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha$ e, para cada $\boldsymbol{o} \in \mathcal{W}$, $\boldsymbol{o}$ não é livre em Γ, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}-\mathcal{W}}_{C} \alpha$;

(x) se $\begin{cases} \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha, \\ \text{para cada } \boldsymbol{o} \in \mathcal{W}, \text{ existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha, \end{cases}$

então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}-\mathcal{W}}_{C} \alpha$.

<u>Escólio 1.6</u>: As seguintes asserções não são válidas para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{C}$":

- se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1}_{C} \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash^{\mathcal{V}_n}_{C} \alpha_n$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash^{\mathcal{W}}_{C} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}}_{C} \beta$;
- se $\begin{cases} * \ \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \vdash^{\boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n}_{C} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1, \ldots, \mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1, \ldots, \mathbf{p}\}, \text{ se } \boldsymbol{o}_i \notin \mathcal{V} \text{ e } \boldsymbol{o}_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } \boldsymbol{o}_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \alpha_j, \end{cases}$

  então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{C} \beta$.

Prova:

Seja C um cálculo cujos axiomas são dados pelos esquemas "$\alpha \to \alpha \vee \beta$" e "$\forall \boldsymbol{x}\, \alpha \to \alpha(\boldsymbol{x}|\mathbf{t})$", e cujas regras de inferência são $\frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$ e $\frac{\alpha}{\forall \boldsymbol{x}\, \alpha}$, de modo que a primeira é uma regra constante e a segunda é uma regra variante cujo objeto variante de cada aplicação é a variável quantificada correspondente.

Temos que $\begin{cases} \{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z),\ \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}y\} \mathrel{|\!\!\frac{\varnothing}{\mathsf{C}}} \mathbf{R}y, \\ \mathbf{R}y \mathrel{|\!\frac{\varnothing}{\mathsf{C}}} \forall z\ (\mathbf{R}y \vee \mathbf{S}z), \end{cases}$ contudo não é verdade que $\{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z),\ \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}y\} \mathrel{|\!\!\frac{\varnothing}{\mathsf{C}}} \forall z\ (\mathbf{R}y \vee \mathbf{S}z)\}$, daí temos um contra-exemplo para a primeira proposição.

Da mesma forma, temos que $\begin{cases} \{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z),\ \forall y\ (\mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}y)\} \mathrel{|\!\!\frac{\varnothing}{\mathsf{C}}} \mathbf{R}y, \\ \mathbf{R}y \mathrel{|\!\frac{y}{\mathsf{C}}} \forall y \forall z\ (\mathbf{R}y \vee \mathbf{S}z), \end{cases}$ todavia não é verdade que $\{\forall y\ \mathbf{Q}(y,z),\ \forall y\ \mathbf{Q}(y,z) \to \mathbf{R}y\} \mathrel{|\!\!\frac{\varnothing}{\mathsf{C}}} \forall y \forall z\ (\mathbf{R}y \vee \mathbf{S}z)\}$, daí temos um contraexemplo para a segunda proposição.

●

<u>Definição 1.7</u>: Dizemos que uma demonstração $\mathcal{D}$ em C *é sustentada por* uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes se $\mathcal{V}$ contém a coleção de objetos variantes de aplicações de regras em $\mathcal{D}$ tais que as suas conclusões dependem em $\mathcal{D}$ de alguma premissa. Se existir uma demonstração em C de α a partir de Γ tal que esta seja sustentada por $\mathcal{V}$, dizemos que α *é sustentada por* $\mathcal{V}$ a partir de Γ em C, e notamos isto por $\Gamma \mathrel{\|\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \{o_1,\ldots,o_n\}$ e $\mathbf{n} \geq 1$, notamos $\Gamma \mathrel{\|\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}} \alpha$ também por $\Gamma \mathrel{\|\!\frac{o_1,\ldots,o_n}{\mathsf{C}}} \alpha$. Se $\mathcal{V} = \varnothing$, dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *demonstração estável* em C. Se α é sustentada por $\varnothing$ em C, dizemos que α é uma *conseqüência estável* de Γ em C.

<u>Escólio 1.8</u>: Se $\mathcal{V}$ é uma coleção de objetos variantes em C, α é sustentada por $\mathcal{V}$ a partir de Γ em C se, e somente se, pelo menos uma das seguintes cláusulas for cumprida:

- α é um axioma de C;
- $\alpha \in \Gamma$;
- existe uma aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C tal que $\Gamma \mathrel{\|\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \mathrel{\|\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}} \alpha_n$ e, se existe um objeto variante o desta aplicação tal que $o \notin \mathcal{V}$, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_n$.

Se $\mathcal{V} = \varnothing$, podemos substituir a terceira cláusula acima pela seguinte condição:

- existe uma aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C tal que $\Gamma \mathrel{|\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \mathrel{|\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}} \alpha_n$ e, se existe um objeto variante o desta aplicação, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\vdash_{\mathsf{C}} \alpha_n$.

<u>Escólio 1.9</u>: As seguintes propriedades são válidas para a relação "$\Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}}$":

(i) se existe uma demonstração $\mathcal{D}$ em $\mathbf{C}$ de α a partir de Γ cuja coleção de objetos variantes de aplicações de regras de $\mathbf{C}$ em $\mathcal{D}$ é $\mathcal{V}$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(ii) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$;

(iii) se $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$, então existe uma coleção $\mathcal{V}$ de objetos variantes tal que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(iv) $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha$ sss $\Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(v) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}'}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(vi) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$ e $\Gamma \subseteq \Gamma'$, então $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(vii) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$, então existe $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}'$ é finito e $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}'}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(viii) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$, então existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que Γ' é finito e $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$;

(ix) se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}_1}_{\mathbf{C}} \alpha_1, \ldots, \Gamma \Vdash^{\mathcal{V}_n}_{\mathbf{C}} \alpha_n$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Vdash^{\mathcal{W}}_{\mathbf{C}} \beta$, então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}}_{\mathbf{C}} \beta$.

O escólio abaixo descreve uma forma de expansão para a relação "$\vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}}$" em um cálculo genérico.

<u>Escólio 1.10</u>: Se $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1}_{\mathbf{C}} \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash^{\mathcal{V}_n}_{\mathbf{C}} \alpha_n$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \Vdash^{\mathcal{W}}_{\mathbf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}}_{\mathbf{C}} \beta$.

<u>Lema 1.11</u>: Se $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$.

Prova:

Se α é axioma de $\mathbf{C}$ ou $\alpha \in \Gamma$, não há o que provar.

Suponhamos então há uma aplicação $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\alpha}$ de uma regra de $\mathbf{C}$ preenchendo as condições do escólio 1.8. Por hipótese de indução, temos que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha_n$. Dado um objeto variante o desta aplicação tal que $o \notin \mathcal{V}$, temos que $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha_1, \ldots, \vdash_{\mathbf{C}} \alpha_n$, e daí $\vdash_{\mathbf{C}} \alpha$, o que é, segundo o escólio 1.9, uma condição suficiente para concluirmos que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathbf{C}} \alpha$.

●

<u>Definição 1.12</u>: Um cálculo $\mathbf{C}$ é dito *semi-estável* se as seguintes condições forem válidas:

- toda regra variante de $\mathbf{C}$ é unária, o seu domínio é a coleção de todas as fórmulas em $\mathbf{C}$, e cada aplicação da mesma possui exatamente um objeto variante;

- para cada aplicação $\frac{\alpha'}{\alpha}$ de uma regra variante em C, se o seu objeto variante não é livre em α', então $\alpha' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- para cada aplicação $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra constante em C, se $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$, α' são respectivamente conclusões de aplicações de uma regra variante a partir de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, α usando os mesmos objetos variantes, então $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

<u>Lema 1.13</u>: Se C é semi-estável e $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$, então, para toda aplicação $\frac{\alpha}{\alpha'}$ de uma regra variante em C, se o seu objeto variante não for livre em Γ, $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Prova: é semelhante à prova do lema 1.22.

<u>Teorema 1.14</u>: Se C é semi-estável, então $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$.

Prova: é semelhante à prova do teorema 1.23.

<u>Teorema 1.15</u>: Se C é semi-estável, então "$\Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}}$" possui a seguinte propriedade adicional:

- se $\begin{cases} * \ \Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \Vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}, \text{ se } o_i \text{ é livre em } \alpha_j, \text{ então} \\ \quad \text{existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } o_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_j, \end{cases}$

  então $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$.

Prova: é semelhante à prova do teorema 1.24.

<u>Corolário 1.16</u>: Se C é semi-estável, então valem as seguintes propriedades adicionais para a relação "$\vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}}$":

- se $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$, então $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$;
- se $\begin{cases} * \ \Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathsf{C}} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}, \text{ se } o_i \text{ é livre em } \alpha_j, \text{ então} \\ \quad \text{existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } o_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_j, \end{cases}$

  então $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$.

Prova: basta usar o teorema 1.14, a nona proposição do escólio 1.9 e o teorema 1.15.

<u>Definição 1.17</u>: Um cálculo C é dito *semiforte* se as seguintes cláusulas forem satisfeitas:

(i) $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \alpha$;

(ii) $\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$;

(iii) $\alpha, \alpha \to \beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$;

(iv) para cada aplicação $\frac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra constante de C,

$\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$.

<u>Teorema 1.18</u>: As seguintes proposições são equivalentes:

(i) C é um cálculo semiforte;

(ii) para quaisquer Γ,α e β tais que Γ é uma coleção de fórmulas em C e α,β são fórmulas em C, $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$ sss $\Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$.

Prova: é semelhante à prova do teorema 1.27.

<u>Definição 1.19</u>: Um cálculo C é dito *quaseforte* se C é semiforte e semi-estável.

<u>Teorema 1.20</u>: Se C é um cálculo quaseforte, então $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$ implica em $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$.

Prova: basta usar os teoremas 1.14 e 1.18.

<u>Definição 1.21</u>: Um cálculo semi-estável C é dito *estável* se este possuir a seguinte propriedade adicional:

- para cada aplicação $\frac{\beta}{\alpha}$ de uma regra variante em C, onde $\boldsymbol{o}$ é o seu objeto variante, se β' e α' são respectivamente conclusões de aplicações de uma regra variante em C sobre β,α usando o mesmo objeto variante distinto de $\boldsymbol{o}$, então $\beta' \Vdash^{\boldsymbol{o}}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

<u>Lema 1.22</u>: Se C é estável e $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então, para toda aplicação $\frac{\alpha}{\alpha'}$ de uma regra variante em C, se o seu objeto variante não for livre em Γ, $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Prova:

Se α é um axioma de C, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, e daí $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Se $\alpha \in \Gamma$, então o objeto variante da aplicação considerada não é livre em α, e daí, como C é estável, $\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Se existe uma aplicação de uma regra constante $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ em C tal que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_n$, temos, por hipótese de indução, que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1',\ldots,\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_n'$, onde $\alpha_1',\ldots,\alpha_n'$ são respectivamente conseqüências de $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ pela mesma regra em que α' é conseqüência de α. Como C é estável, temos que $\alpha_1',\ldots,\alpha_n' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha'$, e daí $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

Suponhamos então que existe uma aplicação $\frac{\beta}{\alpha}$ de uma regra variante de C tal que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta$, e, se o seu objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$, então $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$. Seja $\boldsymbol{o}$ o objeto variante de $\frac{\beta}{\alpha}$. Se $\boldsymbol{o} \notin \mathcal{V}$, $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, daí $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha'$. Considere β' conseqüência de β pela mesma regra em que α' é conseqüência de α. Se $\boldsymbol{o} \in \mathcal{V}$, como $\beta \Vdash^{\boldsymbol{o}}_{\mathsf{C}} \beta'$, $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta'$, e daí, como C é estável temos que $\beta' \Vdash^{\boldsymbol{o}}_{\mathsf{C}} \alpha'$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha'$.

●

<u>Teorema 1.23</u>: Se C é estável, então $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$.

Prova:

Pelo lema 1.11, temos que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, daí resta provar a recíproca.

Suponhamos que $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$.

Sejam $\mathcal{D}$ uma demonstração em C de α a partir de Γ dependente de $\mathcal{V}$, β a primeira ocorrência de uma fórmula em $\mathcal{D}$ justificada como conseqüência de uma aplicação de regra variante $\frac{\beta'}{\beta}$ tal que o seu objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e β' depende em $\mathcal{D}$ de alguma premissa. Seja $\boldsymbol{o}$ o objeto variante desta aplicação.

Se $\boldsymbol{o}$ não é livre em β', então, como C é estável, temos que $\beta' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$, e daí, como a ocorrência considerada de β' precede β em $\mathcal{D}$, temos que $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta'$, e portanto, pela transitividade de "$\Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}}$", $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta$.

Se $\mathcal{O}$ é livre em β', então, como $\mathcal{O} \notin \mathcal{V}$, existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tal que $\mathcal{O}$ não é livre em Γ' e $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta'$, e daí, como C é estável e pelo lema 1.22, $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta$, e portanto $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta$.

Em qualquer caso, existe uma demonstração $\mathcal{D}_\beta$ em C de β a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$. Substituindo a ocorrência considerada de β em $\mathcal{D}$ por $\mathcal{D}_\beta$, obtemos, dado $\mathcal{D}$, uma demonstração em C de α a partir de Γ possuindo uma aplicação de regra variante a menos cujo objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e cuja hipótese depende de alguma premissa. Repetindo o mesmo processo um número finito de vezes, obtemos uma demonstração em C de α a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$, ou seja, $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$.

●

<u>Teorema 1.24</u>: Se C é estável, então " $\Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}}$ " possui a seguinte propriedade adicional:

- se $\begin{cases} * \ \Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_1, \ldots, \Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \Vdash^{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n}_{\mathsf{C}} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1, \ldots, \mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1, \ldots, \mathbf{p}\}, \text{ se } \mathcal{O}_i \notin \mathcal{V} \text{ e } \mathcal{O}_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } \mathcal{O}_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha_j, \end{cases}$

  então $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \beta$.

Prova:

Sejam $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_p$ respectivamente demonstrações em C de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ a partir de Γ sustentadas por $\mathcal{V}$, e seja $\mathcal{E}$ uma demonstração de β a partir de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ sustentada por $\{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n\}$. Concatenando $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_p, \mathcal{E}$, obtemos uma demonstração $\mathcal{D}$ de β em C a partir de Γ.

Seja γ a primeira ocorrência de uma fórmula em $\mathcal{D}$ justificada como conseqüência de uma aplicação $\frac{\gamma'}{\gamma}$ de regra variante, tal que o seu objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e γ' depende em $\mathcal{D}$ de algum elemento de Γ. Como $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_p$ são demonstrações sustentadas por $\mathcal{V}$, temos que a ocorrência considerada de γ' figura em $\mathcal{E}$, e daí, considerando $\mathcal{O}$ o objeto variante da aplicação, temos que $\mathcal{O} \in \{\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_n\}$.

Sejam $\begin{cases} \vartheta = \{\alpha_j \,/\, j \in \{1, \ldots, p\} \text{ e } \mathcal{O} \text{ é livre em } \alpha_j\}, \\ \zeta = \{\alpha_j \,/\, j \in \{1, \ldots, p\} \text{ e } \mathcal{O} \text{ não é livre em } \alpha_j\}. \end{cases}$

É fácil verificar que existe Γ' finito tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\mathcal{O}$ não é livre em Γ' e, para todo $\delta \in \vartheta$, $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \delta$, e portanto, pela construção de ζ, $\Gamma' \cup \zeta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_1, \ldots, \Gamma' \cup \zeta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha_p$, e $\mathcal{O}$ não é livre em $\Gamma' \cup \zeta$.

Como a ocorrência considerada de γ' precede γ em $\mathcal{D}$, temos que $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \gamma'$, e daí, pela transitividade de "$\Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}}$", temos que $\Gamma' \cup \zeta \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \gamma'$, e portanto, pelo lema 1.22, $\Gamma' \cup \zeta \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \gamma$. Para cada $\delta \in \Gamma' \cup \zeta$, temos que $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \delta$, e daí, novamente pela transitividade de "$\Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}}$", $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \gamma$. Ou seja, existe uma demonstração $\mathcal{D}_\gamma$ em C de γ a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$. Substituindo a ocorrência considerada de γ em $\mathcal{D}$ por $\mathcal{D}_\gamma$, temos uma demonstração $\mathcal{D}'$ em C de β a partir de Γ possuindo uma aplicação a menos de uma regra variante cujo objeto variante não pertence a $\mathcal{V}$ e cuja hipótese dependa de alguma premissa. Repetindo o mesmo processo um número finito de vezes, obtemos uma demonstração em C de β a partir de Γ sustentada por $\mathcal{V}$, ou seja, $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \beta$.

●

<u>Corolário 1.25</u>: Se C é estável, então valem as seguintes propriedades adicionais para a relação "$\vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}}$":

- se $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}_1} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}_n} \alpha_p$, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{W}} \beta$, então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{V}_n \cup \mathcal{W}} \beta$;
- se $\begin{cases} * \ \Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_1,\ldots,\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_p, \\ * \ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \vdash_{\mathsf{C}}^{o_1,\ldots,o_n} \beta, \\ * \ \text{para todo } \mathbf{i} \in \{1,\ldots,\mathbf{n}\} \text{ e para todo } \mathbf{j} \in \{1,\ldots,\mathbf{p}\}, \text{ se } o_i \notin \mathcal{V} \text{ e } o_i \text{ é livre em } \alpha_j, \\ \quad \text{então existe } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ tal que } o_i \text{ não é livre em } \Gamma' \text{ e } \Gamma' \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha_j, \end{cases}$

  então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$.

Prova: basta usar o teorema 1.23, a nona proposição do escólio 1.9 e o teorema 1.24.

<u>Definição 1.26</u>: Um cálculo semiforte C é dito *forte* se este possuir a seguinte propriedade adicional:

- para cada aplicação $\dfrac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra variante de C, $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$, onde $\mathcal{V}$ é a coleção de objetos variantes da aplicação e nenhum elemento de $\mathcal{V}$ é livre em α.

<u>Teorema 1.27</u>: As seguintes proposições são equivalentes:

(i) C é um cálculo forte;

(ii) para quaisquer Γ, α, β e $\mathcal{V}$, $\begin{cases} \Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta, \\ \text{para cada } \boldsymbol{o} \in \mathcal{V},\ \boldsymbol{o} \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ sss $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$.

Prova de (i) implica (ii):

Suponhamos que C é um cálculo forte, $\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$ e, para cada $\boldsymbol{o} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{o}$ não é livre em α

Se β é axioma de C, então $\vdash_{\mathsf{C}} \beta$, e daí, pela cláusula (ii) da definição 1.17, $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$, e portanto $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$.

Se $\beta \in \Gamma$, então $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$, e daí, pela cláusula (ii) da definição 1.27, $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$.

Se $\beta = \alpha$, então, pela cláusula (i) da definição 1.27, $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \alpha$, e portanto $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$.

Se existe uma aplicação $\dfrac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ de uma regra de C tal que

$\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta_1,\ldots,\Gamma \cup \{\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta_n$, temos, por hipótese de indução, que $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta_1,\ldots,\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta_n$. Se existe um objeto variante desta aplicação que não pertence a $\mathcal{V}$, então, conforme o escólio 1.8, $\vdash_{\mathsf{C}} \beta$, e daí, novamente pela cláusula (ii) da definição 1.17, $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$, e portanto $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$. Se todo objeto variante desta aplicação pertence a $\mathcal{V}$, então, como C é forte, concluímos que $\Gamma \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta$.

Prova de (ii) implica (i):

Suponhamos (ii).

Como $\alpha \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$, temos que $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \alpha$.

Como $\{\beta,\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \beta$, temos que $\beta \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \alpha \to \beta$.

Finalmente, seja $\dfrac{\beta_1,\ldots,\beta_n}{\beta}$ uma aplicação de uma regra de C cuja coleção de objetos variantes é $\mathcal{V}$, e α uma fórmula de C onde nenhum elemento de $\mathcal{V}$ é livre.

Temos que $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n,\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \beta_1,\ldots,\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n,\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \beta_n$, e daí, como $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$, temos que $\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n,\alpha\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \beta$, e portanto

$$\{\alpha \to \beta_1,\ldots,\alpha \to \beta_n\} \Vdash_{\mathsf{C}}^{\mathcal{V}} \alpha \to \beta.$$

●

<u>Definição 1.28</u>: Um cálculo C é dito *superforte* se C é forte e estável.

Teorema 1.29:

- Se $\begin{cases} \mathsf{C} \text{ é um cálculo superforte,} \\ \text{para cada } o \in \mathcal{V},\ o \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma \cup \{\alpha\} \mid\!\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}\ \beta$ sss $\Gamma \mid\!\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}\ \alpha \to \beta$.

Prova: basta usar os teoremas 1.27 e 1.23.

Definição 1.30: Notamos por $\mathsf{C}[\Gamma]$ o cálculo aplicado obtido de C acrescentando Γ como postulado. Se Γ é um conjunto unitário da forma $\{\alpha\}$, então notamos $\mathsf{C}[\Gamma]$ também por $\mathsf{C}[\alpha]$.

Escólio 1.31: As seguintes asserções são válidas para $\mathsf{C}[\Gamma]$:

- $\Gamma' \cup \Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma' \vdash_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- $\Gamma' \cup \Gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- se $\Gamma' \cup \Gamma \mid\!\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}\ \alpha$, então $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- se $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$, então existe $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{V}$ tal que $\Gamma' \cup \Gamma \mid\!\!\frac{\mathcal{W}}{\mathsf{C}}\ \alpha$;
- se $\Gamma' \cup \Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$, então $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$;
- se $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha$, então existe $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{V}$ tal que $\Gamma' \cup \Gamma \Vdash^{\mathcal{W}}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- se C é semi-estável, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é semi-estável;
- se C é semiforte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é semiforte;
- se C é quaseforte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é quaseforte;
- se C é estável, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é estável;
- se C é forte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é forte;
- se C é superforte, então $\mathsf{C}[\Gamma]$ é superforte.

Escólio 1.32: $\mathsf{C}[\Gamma]$ possui as seguintes propriedades para a introdução da implicação:

- se C é semiforte e $\Gamma' \cup \{\alpha\} \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta$, então $\Gamma' \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \to \beta$;
- se C é quaseforte e $\Gamma' \cup \{\alpha\} \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta$, então $\Gamma' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \to \beta$;
- se C é forte e $\begin{cases} \Gamma' \cup \{\alpha\} \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta, \\ \text{para cada } o \in \mathcal{V},\ o \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma' \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \to \beta$;
- se C é superforte e $\begin{cases} \Gamma' \cup \{\alpha\} \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \beta, \\ \text{para cada } o \in \mathcal{V},\ o \text{ não é livre em } \alpha, \end{cases}$ então $\Gamma' \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}[\Gamma]} \alpha \to \beta$.

§2. Axiomáticas Clássicas

São estudados aqui alguns dos aspectos axiomáticos comuns em todos os cálculos vistos neste trabalho.

Em toda esta seção, a menos que seja dito explicitamente o contrário, C é um cálculo, $\mathsf{L}_0,\mathsf{L}_1$ são linguagens para C, α,β,γ são fórmulas em C de uma mesma linguagem (dependendo do contexto), $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ são variáveis, $\mathtt{t},\mathtt{u}$ são termos em C em uma mesma linguagem, Γ é uma coleção de fórmulas em C, e, sempre que alguns dentre os sinais "$\boldsymbol{x}$", "$\boldsymbol{y}$", "$\boldsymbol{z}$", "$\mathtt{t}$", "$\mathtt{u}$" e "$\mathtt{i}$" forem usados no mesmo contexto, consideramos subentendido que $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ subordinam $\mathtt{i}$, e $\mathtt{t},\mathtt{u}$ são subordinados a $\mathtt{i}$; as mesmas convenções continuam valendo mesmo que estes sinais sejam acrescidos de plicas ou índices.

Definição 2.1: Os *postulados proposicionais básicos*, adotados em todos os cálculos descritos neste trabalho, são dados abaixo:

(**→-1**) $\alpha \to \beta \to \alpha$;

(**→-2**) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$;

(**MP**) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$;

(**∧-1**) $\alpha \wedge \beta \to \alpha$;

(**∧-2**) $\alpha \wedge \beta \to \beta$;

(**∧-3**) $\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$;

(**∨-1**) $\alpha \to \alpha \vee \beta$;

(**∨-2**) $\beta \to \alpha \vee \beta$;

(**∨-3**) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$;

(**→-3**) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$;

A regra **MP** é constante.

<u>Definição 2.2</u>: A regra **Gen**, presente em todos os cálculos quantificacionais descritos neste trabalho, é dada abaixo:

(**Gen**) $\dfrac{\alpha}{\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha}$.

Uma aplicação da regra **Gen** possui como único objeto de variância a variável quantificada.

<u>Definição 2.3</u>: Os *postulados universais básicos*, presentes em alguns dos cálculos quantificacionais descritos neste trabalho, são dados abaixo:

(**∀-1**) $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \rightarrow \alpha(\boldsymbol{x}|\mathtt{t})$, onde $\boldsymbol{x}$ é $\mathtt{i}$-substituível por $\mathtt{t}$ em α;

(**∀-2**) $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \rightarrow \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;

(**∀-3**) $\alpha \rightarrow \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ não é livre em α.

<u>Definição 2.4</u>: Os *postulados existenciais básicos*, presentes em alguns dos cálculos quantificacionais descritos neste trabalho, são dados abaixo:

(**∃-1**) $\alpha(\boldsymbol{x}|\mathtt{t}) \rightarrow \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ é $\mathtt{i}$-substituível por $\mathtt{t}$ em α;

(**∃-2**) $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \rightarrow \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;

(**∃-3**) $\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \rightarrow \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ não é livre em α.

<u>Definição 2.5</u>: Os postulados universais e existenciais básicos, juntamente com **Gen**, são ditos *postulados quantificacionais básicos*.

<u>Escólio 2.6</u>: As linguagens para todos os cálculos quantificacionais estudados neste trabalho são polissortidas simples, com exceção das linguagens do cálculo auxiliar para a prova de completude de **LSR**; no primeiro caso considere respectivamente "$\forall$" e "$\exists$" ao invés de "$\forall_{\mathtt{i}}$" e "$\exists_{\mathtt{i}}$" na escrita dos postulados universais e existenciais básicos, conforme a última proposição da definição 1.2.30.

<u>Definição 2.7</u>: Os *postulados universais extras*, eventualmente presentes em alguns dos cálculos polissortidos complexos estudados neste trabalho, são dados abaixo:

($\forall$**-4**) $\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \rightarrow \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ não é livre em α;

($\forall$**-5**) $\forall_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ (\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \rightarrow \alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}))$, onde $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ é isosubstituível por } \boldsymbol{y} \text{ em } \alpha, \\ \mathtt{j} \text{ é uma subespécie de } \mathtt{i}; \end{cases}$

($\forall$**-6**) $\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \forall_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ \alpha \rightarrow \forall_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas.

<u>Definição 2.8</u>: Os *postulados existenciais extras*, eventualmente presentes em alguns dos cálculos polissortidos complexos estudados neste trabalho, são dados abaixo:

($\exists$**-4**) $\alpha \rightarrow \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ não é livre em α;

($\exists$**-5**) $\forall_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ (\alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \rightarrow \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\,\alpha)$, onde $\begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ é isosubstituível por } \boldsymbol{y} \text{ em } \alpha, \\ \mathtt{j} \text{ é uma subespécie de } \mathtt{i}; \end{cases}$

($\exists$**-6**) $\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \exists_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ \alpha \rightarrow \exists_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são variáveis distintas.

<u>Definição 2.9</u>: Os postulados universais e existenciais extras são ditos *postulados quantificacionais extras*.

<u>Definição 2.10</u>: Estendemos os conceitos de conseqüência vistos na seção anterior:

- $\Gamma \mid\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}\ \alpha \rightleftharpoons \Gamma \mid\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C(L)}}\ \alpha$, para cada linguagem L para C tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$;
- $\Gamma \parallel\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}\ \alpha \rightleftharpoons \Gamma \parallel\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C(L)}}\ \alpha$, para cada linguagem L para C tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$.

<u>Definição 2.11</u>: Um cálculo quantificacional C é dito *firme* se as cláusulas abaixo forem satisfeitas:

- para quaisquer sinais predicativos **p** e **q** em C tais que **q** é de uma espécie arbitrária $\langle \mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n \rangle$, e para quaisquer variáveis $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$ respectivamente de espécies $\mathtt{i}_1,...,\mathtt{i}_n$, valem as seguintes propriedades:
    - ♦ se α é um axioma arbitrário em C e α' é obtido de α substituindo todas as fórmulas atômicas em que **p** ocorre por $\mathbf{q}(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$, então $\mid\!\frac{}{\mathsf{C}}\ \alpha'$;
    - ♦ para cada uma aplicação arbitrária $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C, cuja coleção de objetos variantes é $\mathcal{V}$, se $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n,\alpha'$ são obtidos de α substituindo todas as fórmulas atômicas em que **p** ocorre por $\mathbf{q}(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$, então $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n \mid\!\frac{\mathcal{V}}{\mathsf{C}}\ \alpha'$;

- para cada termo $\mathtt{t}$ em C de uma espécie arbitrária $\mathtt{i}$ e para cada variável $\boldsymbol{x}$ subordinando $\mathtt{i}$, valem as seguintes propriedades:
  - se $\boldsymbol{x}$ não ocorre em um axioma arbitrário α em C, então $\vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha(\mathtt{t}|\boldsymbol{x})$;
  - se $\boldsymbol{x}$ não ocorre nem nas hipóteses nem na conclusão de uma aplicação arbitrária $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C, cuja coleção de objetos variantes é $\mathcal{V}$, então $\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha_1(\mathtt{t}|\boldsymbol{x}),\ldots,\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha_n(\mathtt{t}|\boldsymbol{x}) \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha(\mathtt{t}|\boldsymbol{x})$.

<u>Escólio 2.12</u>: Todos os cálculos quantificacionais definidos neste trabalho são firmes.

<u>Escólio 2.13</u>: Se C é um cálculo firme possuindo como geradores de teoremas **∀-3**, **∀-4** e **MP** (este é o caso em todos os cálculos quantificacionais definidos neste trabalho), então as seguintes proposições são válidas:

- $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ sss existe uma linguagem L para C tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$ e $\Gamma \vdash_{\mathsf{C(L)}} \alpha$;
- $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss existe uma linguagem L para C tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$ e $\Gamma \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C(L)}} \alpha$;
- $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \alpha$ sss existe uma linguagem L para C tal que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathsf{L}$ e $\Gamma \Vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C(L)}} \alpha$.

<u>Lema 2.14</u>: Se C possui como geradores de teoremas os postulados **→-1**, **→-2** e **MP**, então as seguintes proposições são válidas:

- $\vdash_{\mathsf{C}} \alpha \to \alpha$;
- $\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \beta$;
- $\alpha \to \beta, \alpha \to (\beta \to \gamma) \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \to \gamma$.

<u>Teorema 2.15</u>: Se C possui como geradores de teoremas os postulados **→-1** e **→-2**, e **MP** como a única regra de inferência, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ sss $\Gamma \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- C é um cálculo superforte.

Prova: basta usar o lema 2.14.

<u>Lema 2.16</u>: Se C possui como geradores de teoremas os postulados **→-1, →-2**, **∀-2**, **∀-3, MP** e **Gen**, então valem as seguintes proposições:

- $\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha$, onde $\boldsymbol{x}$ não é livre em α;

- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\ \alpha, \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\ (\alpha \to \beta) \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\ \beta$;
- $\alpha \to \beta \Vdash^{x}_{\mathsf{C}} \alpha \to \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\ \beta$, onde $\boldsymbol{x}$ não é livre em α.

<u>Teorema 2.17</u>: Se C possui como geradores de teoremas os postulados **→-1**, **→-2**, **∀-2** e **∀-3**, e como únicas regras de inferência **MP** e **Gen**, então C é um cálculo semi-estável e forte (e daí é quaseforte).

Prova: basta usar os lemas 2.14 e 2.16.

<u>Lema 2.18</u>: Se C é polissortido simples e possui como geradores de teoremas os postulados **→-1**, **→-2**, **∀-1**, **∀-2**, **∀-3**, **MP** e **Gen**, então $\forall \boldsymbol{x}\ \alpha \Vdash^{y}_{\mathsf{C}} \forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}\ \alpha$.

<u>Teorema 2.19</u>: Se C é polissortido simples e possui como geradores de teoremas os postulados **→-1**, **→-2**, **∀-1**, **∀-2** e **∀-3**, e como únicas regras de inferência **MP** e **Gen**, então C é um cálculo superforte.

Prova: basta usar os lemas 2.14, 2.16 e 2.18.

<u>Teorema 2.20</u>: Se C é um cálculo possuindo como geradores de teoremas pelo menos os postulados proposicionais básicos concernentes aos conectivos "∧" e "∨", juntamente com a regra **MP**, então valem em C as regras de introdução e eliminação para os conectivos "∧" e "∨", ou seja:

- $\alpha, \beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \wedge \beta$;
- $\alpha \wedge \beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha$;
- $\alpha \wedge \beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta$;

$\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \vee \beta$;

$\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \alpha \vee \beta$;

$\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \beta \to \gamma \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \gamma$.

Teorema 2.21: Se C é um cálculo possuindo como geradores de teoremas **∀-1**, **∃-1**, **∃-2**, **∃-3**, **MP** e **Gen**, então valem em C as regras de introdução e eliminação para os quantificadores universal e existencial, e a regra da instanciação, ou seja:

- $\alpha \Vdash_{\mathsf{C}}^{x} \forall_{\mathtt{i}} x\ \alpha$;
- $\forall_{\mathtt{i}} x\ \alpha \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \alpha(x|\mathtt{t})$, onde x é $\mathtt{i}$-substituível por $\mathtt{t}$ em α;
- $\alpha(x|\mathtt{t}) \Vdash_{\mathsf{C}}^{\varnothing} \exists_{\mathtt{i}} x\ \alpha$, onde x é $\mathtt{i}$-substituível por $\mathtt{t}$ em α;
- $\exists_{\mathtt{i}} x\ \alpha, \alpha \to \beta \Vdash_{\mathsf{C}}^{x} \beta$, onde x não é livre em β;
- $\alpha \Vdash_{\mathsf{C}}^{x} \alpha(x|\mathtt{t})$, onde x é substituível por $\mathtt{t}$ em α.

Escólio 2.22: Se C é um cálculo polissortido simples possuindo como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, os universais básicos, e **Gen**, então C também possui como geradores de teoremas os postulados universais extras.

Escólio 2.23: Se C é um cálculo polissortido simples possuindo como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, os existenciais básicos, e **Gen**, então C também possui como geradores de teoremas os postulados existenciais extras.

Definição 2.24: Dizemos que "~" *funciona para* $\mathsf{L_0}$ *em* C *como a negação clássica* se "~" é um conectivo unário primitivo em C ou, para qualquer fórmula γ em $\mathsf{L_0}$, a expressão "$\sim\gamma$" pode ser abreviada em $\mathsf{L_0}$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas, para quaisquer fórmulas α e β em $\mathsf{L_0}$:

- $\alpha \to \beta, \alpha \to \sim\beta \Vdash_{\mathsf{C(L_0)}}^{\varnothing} \sim\alpha$; $\qquad \sim\sim\alpha \Vdash_{\mathsf{C(L_0)}}^{\varnothing} \alpha$.

Se, para qualquer conjunto finito Γ de fórmulas em C, existe uma linguagem $\mathsf{L_0}$ para C tal que $\Gamma \subseteq \mathsf{L_0}$ e "~" funciona para $\mathsf{L_0}$ em C como a negação clássica, dizemos então que "~" *funciona localmente em* C *como a negação clássica*.

Se "~" funciona para L em C como a negação clássica, para qualquer linguagem L em C, dizemos então que "~" *funciona em* C *como a negação clássica*.

Se "~" funciona para em C como a negação clássica e, para qualquer fórmula α em C e para quaisquer linguagens L_0 e L_1 para C tais que α é fórmula tanto de L_0 como de L_1, se a desabreviação de "$\sim\alpha$" em L_0 é idêntica à desabreviação de "$\sim\alpha$" em L_1, dizemos então que "~" *funciona globalmente em* C *como a negação clássica*.

Teorema 2.25: Se C é quaseforte, todos os objetos variantes de C são variáveis, "~" funciona em C como a negação clássica, **MP** gera teoremas em C, e α é uma sentença em C, então $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \sim\alpha$ sss $\Gamma \cup \{\alpha\}$ é trivial em C.

Teorema 2.26: Se C é quaseforte, "~" funciona para L_0 em C como a negação clássica, e C possui como geradores de teoremas os nove primeiros postulados proposicionais básicos, então os seguintes esquemas geram teoremas de C em L_0:

- $\alpha \vee \sim\alpha$; $\alpha \to \beta \leftrightarrow \sim\beta \to \sim\alpha$;
- $\alpha \to \sim\alpha \to \beta$; $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\sim\alpha \leftrightarrow \sim\beta)$;
- $\sim\sim\alpha \leftrightarrow \alpha$; $\alpha \to \beta \leftrightarrow \sim\alpha \vee \beta$;
- $(\alpha \to \sim\alpha) \to \sim\alpha$; $\sim(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \sim\beta$;
- $(\sim\alpha \to \alpha) \to \alpha$; $\sim(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \sim\alpha \vee \sim\beta$;
- $(\alpha \leftrightarrow \sim\alpha) \to \beta$; $\sim(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \sim\alpha \wedge \sim\beta$.

Teorema 2.27: Se C é quaseforte, "~" funciona para L_0 em C como a negação clássica, e C possui como geradores de teoremas os postulados **→-1**, **→-2**, **∀-2**, **∃-2**, **∃-3**, **∃-5**, **MP** e **Gen**, então os seguintes esquemas geram teoremas de C em L_0:

- $\sim\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x} \sim\alpha$; $\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow \sim\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x} \sim\alpha$;
- $\sim\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x} \sim\alpha$; $\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow \sim\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x} \sim\alpha$.

<u>Teorema 2.28</u>: Se C é quaseforte, "~" funciona localmente em C como a negação clássica, e C possui como geradores de teoremas os primeiros nove postulados proposicionais básicos, e os postulados quantificacionais básicos e extras, então os seguintes esquemas geram teoremas de C:

- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \wedge \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta$;
- $\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \vee \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta$;
- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \to \beta) \to (\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \to \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;
- $(\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \to \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta) \to (\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \to \beta))$;
- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \vee \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta \to \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \vee \beta)$;
- $\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \wedge \beta) \to \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \wedge \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta$;
- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \leftrightarrow \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;
- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \to \beta) \to (\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \to \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;
- $\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \leftrightarrow \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$.

<u>Teorema 2.29</u>: Nas mesmas condições do teorema 2.28, valem as seguintes proposições, referentes ao transporte de quantificadores, onde $\# \in \{\to, \wedge, \vee\}$ e $* \in \{\wedge, \vee\}$:

- Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em α, então as seguintes asserções se realizam:
  - $\vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \# \beta) \leftrightarrow (\alpha \# \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;
  - $\vdash_{\mathsf{C}} \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \# \beta) \leftrightarrow (\alpha \# \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;
- Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em β, então as seguintes asserções se realizam:
  - $\vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \to \beta)$;
  - $\vdash_{\mathsf{C}} \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \to \beta)$;
  - $\vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha * \beta) \leftrightarrow (\alpha * \forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$;
  - $\vdash_{\mathsf{C}} \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, (\alpha * \beta) \leftrightarrow (\alpha * \exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \beta)$.

<u>Teorema 2.30</u>: Se C é quaseforte, "~" funciona para $\mathbf{L_0}$ em C como a negação clássica, "$\exists_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x}\, \alpha \leftrightarrow \sim\forall_{\mathtt{i}} \boldsymbol{x} \sim\alpha$" é um esquema válido em C, e C possui como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, os universais básicos e extras, e **Gen**, então os postulados existenciais básicos e extras geram teoremas de C em $\mathbf{L_0}$.

<u>Escólio 2.31</u>: Se C é polissortido simples e quaseforte, "~" funciona para $\mathsf{L_0}$ em C como a negação clássica, "$\exists \boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow {\sim}\forall \boldsymbol{x}\ {\sim}\alpha$" é um esquema válido em C, e C possui como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, os universais básicos, e **Gen**, então os postulados existenciais básicos geram teoremas de C em $\mathsf{L_0}$.

<u>Teorema 2.32</u>: Se C é quaseforte, "~" funciona para $\mathsf{L_0}$ em C como a negação clássica, "$\forall_1 \boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow {\sim}\exists_1 \boldsymbol{x}\ {\sim}\alpha$" é um esquema válido em C, e C possui como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, os existenciais básicos e extras, e **Gen**, então os postulados universais básicos e extras geram teoremas de C em $\mathsf{L_0}$.

<u>Escólio 2.33</u>: Se C é polissortido simples e quaseforte, "~" funciona para $\mathsf{L_0}$ em C como a negação clássica, "$\forall \boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow {\sim}\exists \boldsymbol{x}\ {\sim}\alpha$" é um esquema válido em C, e C possui como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, os existenciais básicos, e **Gen**, então os postulados universais básicos geram teoremas de C em $\mathsf{L_0}$.

<u>Teorema 2.34</u>: Se C é um cálculo possuindo como geradores de teoremas os postulados **→-1**, **→-2**, **→-3**, e **MP**, **f** é uma função que associa cada fórmula em $\mathsf{L_0}$ a uma fórmula em $\mathsf{L_0}$, "~" é um conectivo definido em $\mathsf{L_0}$ por "${\sim}\alpha \rightleftharpoons \alpha \to \mathbf{f}(\alpha)$", e "$\alpha \to \mathbf{f}(\alpha) \to \beta$" é um esquema válido em C para $\mathsf{L_0}$, então "~" funciona para $\mathsf{L_0}$ em C como a negação clássica.

Prova:

(da primeira propriedade):

Pelo postulado **→-2**, temos que $\vdash_{\mathsf{C(L_0)}} (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \mathbf{f}(\beta)) \to (\alpha \to \mathbf{f}(\beta))$, e daí, aplicando-se duas vezes a regra **MP**, segue-se que $\alpha \to \beta, \alpha \to {\sim}\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C(L_0)}} \alpha \to \mathbf{f}(\beta)$.

Mas como $\vdash_{\mathsf{C(L_0)}} \beta \to \mathbf{f}(\beta) \to \mathbf{f}(\alpha)$, segue-se de imediato que $\alpha \to \beta, \alpha \to {\sim}\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C(L_0)}} {\sim}\alpha$.

(da segunda propriedade):

Por definição, temos que ${\sim}{\sim}\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C(L_0)}} (\alpha \to \mathbf{f}(\alpha)) \to \mathbf{f}(\alpha \to \mathbf{f}(\alpha))$.

Como $\vdash_{\mathsf{C(L_0)}} (\alpha \to \mathbf{f}(\alpha)) \to \mathbf{f}(\alpha \to \mathbf{f}(\alpha)) \to \alpha$, temos que ${\sim}{\sim}\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C(L_0)}} (\alpha \to \mathbf{f}(\alpha)) \to \alpha$, e daí, pelo postulado **→-3**, temos que ${\sim}{\sim}\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C(L_0)}} \alpha$.

●

<u>Teorema 2.35</u>: Se C possui como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, $\wedge$**-3**, e os quantificacionais básicos, então as seguintes proposições são válidas:

- se x não é livre em α, então $\vdash_{\mathsf{C}} \forall x\, \alpha \leftrightarrow \alpha$ e $\vdash_{\mathsf{C}} \exists x\, \alpha \leftrightarrow \alpha$;
- se $\begin{cases} y \text{ não é livre em } \alpha, \\ x \text{ é isosubstituível por } y \text{ em } \alpha, \end{cases}$ então $\begin{cases} \vdash_{\mathsf{C}} \forall x\, \alpha \leftrightarrow \forall y\, \alpha(x|y), \\ \vdash_{\mathsf{C}} \exists x\, \alpha \leftrightarrow \exists y\, \alpha(x|y). \end{cases}$

<u>Teorema 2.36</u>: Se C possui como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, $\wedge$**-3**, $\forall$**-2**, $\forall$**-3**, $\forall$**-4**, $\forall$**-5**, $\exists$**-2**, $\exists$**-3**, $\exists$**-4**, $\exists$**-5**, e **Gen**, então as seguintes proposições são válidas:

- se x não é livre em α, então $\vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}} x\, \alpha \leftrightarrow \alpha$ e $\vdash_{\mathsf{C}} \exists_{\mathtt{i}} x\, \alpha \leftrightarrow \alpha$;
- se $\begin{cases} y \text{ não é livre em } \alpha, \\ x \text{ é isosubstituível por } y \text{ em } \alpha, \end{cases}$ então $\begin{cases} \vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}} x\, \alpha \leftrightarrow \forall_{\mathtt{i}} y\, \alpha(x|y), \\ \vdash_{\mathsf{C}} \exists_{\mathtt{i}} x\, \alpha \leftrightarrow \exists_{\mathtt{i}} y\, \alpha(x|y). \end{cases}$

<u>Definição 2.37</u>: Se $x_1,\dots,x_n$ ($\mathbf{n} \geq 0$) são as únicas variáveis livres em α, dizemos que $\forall x_1 \dots \forall x_n\, \alpha$ é uma aderência de α.

<u>Teorema 2.38</u>: Se C possui como geradores de teoremas os postulados **MP**, **Gen** e $\forall$**-1**, e α' é uma aderência de α, então $\alpha \vdash_{\mathsf{C}} \alpha'$ e $\alpha' \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$.

<u>Definição 2.39</u>: Sejam C um cálculo, $\mathsf{L_0}$ uma linguagem para C, α uma fórmula de $\mathsf{L_0}$, e Γ uma coleção de fórmulas de $\mathsf{L_0}$. Dizemos que Γ é α-saturado em $\mathsf{L_0}$ para C se Γ atender às seguintes condições:

- $\Gamma \nvdash_{\mathsf{C(L_0)}} \alpha$;
- dada uma fórmula β de $\mathsf{L_0}$, se $\beta \notin \Gamma$, então $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{\mathsf{C(L_0)}} \alpha$.

Se existe uma fórmula α de $\mathsf{L_0}$ tal que Γ é α-saturado para $\mathsf{L_0}$ em C, dizemos também que Γ é saturado para $\mathsf{L_0}$ em C. Finalmente, se existe uma linguagem $\mathsf{L_0}$ para C tal que Γ é saturado (α-saturado) em $\mathsf{L_0}$ para C, dizemos simplesmente que Γ é saturado (α-saturado) em C.

<u>Lema 2.40</u>: Considere $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathbf{L_0}$. As seguintes propriedades básicas são válidas para conjuntos saturados:

- se Γ é saturado em $\mathbf{L_0}$ para $\mathbf{C}$, então, dada uma fórmula β de $\mathbf{L_0}$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \beta$ sss $\beta \in \Gamma$;
- se $\Gamma \nvdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha$, então existe um conjunto α-saturado Γ' para $\mathbf{L_0}$ em $\mathbf{C}$ tal que $\Gamma \subseteq \Gamma$'.

<u>Definição 2.41</u>: Um cálculo $\mathbf{C}$ é dito *isoclássico* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- todos os objetos variantes de $\mathbf{C}$ são variáveis;
- os postulados **MP** e **→-3** são geradores de teoremas em $\mathbf{C}$;
- $\mathbf{C}$ é quaseforte.

<u>Lema 2.42</u>: Sejam $\mathbf{C}$ um cálculo isoclássico; α, β e γ fórmulas fechadas de $\mathbf{L_0}$ e Γ um conjunto α-saturado em $\mathbf{L_0}$ para $\mathbf{C}$. Então Γ possui as seguintes propriedades:

(i) $\beta \in \Gamma$ ou $\beta \to \alpha \in \Gamma$;

(ii) para qualquer β, $\alpha \to \beta \in \Gamma$;

(iii) para quaisquer β e γ, se $\beta \notin \Gamma$, então $\beta \to \gamma \in \Gamma$.

Prova:

De (i):

Se $\beta \notin \Gamma$, então, como Γ é α-saturado em $\mathbf{L_0}$, temos que $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha$, e daí, pela primeira e terceira condições da definição 2.41, $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \beta \to \alpha$, ou seja, $\beta \to \alpha \in \Gamma$.

De (ii):

Se $\alpha \to \beta \notin \Gamma$, então, de (i), $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} (\alpha \to \beta) \to \alpha$, e portanto, pela segunda condição da definição 2.41, $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha$, o que é um absurdo.

De (iii):

De (ii) temos que $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha \to \gamma$, e portanto $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \gamma$. Como Γ é α-saturado em $\mathbf{L_0}$, $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \alpha$, logo $\Gamma \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \gamma$, e portanto, novamente pela primeira e terceira condições da definição 2.41, segue-se que $\Gamma \vdash_{\mathbf{C(L_0)}} \beta \to \gamma$.

●

<u>Lema 2.43</u>: Se C é um cálculo isoclássico possuindo como geradores de teoremas pelo menos os dez primeiros postulados proposicionais básicos e Γ é um conjunto saturado em C, então a função característica de Γ é bem comportada de modo restrito.

Prova: basta usar os lemas 2.40 e 2.42.

<u>Lema 2.44</u>: Se C é um cálculo possuindo como geradores de teoremas pelo menos os postulados **MP**, $\forall$**-1**, $\exists$**-1** e **Gen**, e Γ é um conjunto de Henkin saturado em C, então a função característica de Γ é de Henkin, bem comportada quantificacionalmente, e regular.

<u>Definição 2.45</u>: Um cálculo C é dito *semifirme* se as seguintes condições forem satisfeitas, para cada constante $\mathbf{c}$ de uma espécie arbitrária $\mathtt{i}$ e para cada variável $\boldsymbol{y}$ em C subordinando $\mathtt{i}$:

- se $\boldsymbol{y}$ não ocorre em um axioma arbitrário α em C, então $\vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{y}\ \alpha(\mathbf{c}|\boldsymbol{y})$;
- se $\boldsymbol{y}$ não ocorre nem nas hipóteses nem na conclusão de uma aplicação arbitrária $\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha}$ de uma regra em C, cuja coleção de objetos variantes é $\mathcal{V}$, então $\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{y}\ \alpha_1(\mathbf{c}|\boldsymbol{y}),\ldots,\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{y}\ \alpha_n(\mathbf{c}|\boldsymbol{y}) \vdash^{\mathcal{V}}_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{y}\ \alpha(\mathbf{c}|\boldsymbol{y})$.

<u>Escólio 2.46</u>: Todo cálculo firme é semifirme.

<u>Escólio 2.47</u>: Todos os cálculos definidos neste trabalho são semifirmes.

<u>Lema 2.48</u>: Se C é um cálculo semifirme, então as seguintes proposições são verdadeiras:

$$\text{(i)}\quad \text{se} \begin{cases} \mathbf{c} \text{ é uma constante de espécie } \mathtt{j} \text{ em } \mathsf{C}, \\ \mathbf{c} \text{ não ocorre em } \Gamma, \\ \boldsymbol{y} \text{ subordina } \mathtt{j}, \\ \boldsymbol{y} \text{ não ocorre nem em } \Gamma \text{ nem em } \alpha, \\ \Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha, \end{cases} \qquad \text{então } \Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{j}}\boldsymbol{y}\ \alpha(\mathbf{c}|\boldsymbol{y});$$

$$\text{(ii)}\quad \text{se} \begin{cases} \mathbf{c} \text{ é uma constante de espécie } \mathtt{j} \text{ em } \mathsf{C}, \\ \mathbf{c} \text{ não ocorre nem } \Gamma \text{ nem em } \alpha, \\ \boldsymbol{x} \text{ subordina } \mathtt{j}, \\ \forall\textbf{-2}, \forall\textbf{-3}, \forall\textbf{-5} \text{ e } \textbf{MP} \text{ geram teoremas em } \mathsf{C}, \\ \Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha(\boldsymbol{x}|\mathbf{c}), \end{cases} \qquad \text{então } \Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{j}}\boldsymbol{x}\ \alpha;$$

$$\text{(iii) se} \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{C} \text{ é quaseforte,} \\ \mathsf{c} \text{ é uma constante de espécie } \mathsf{j}, \\ \mathsf{c} \text{ não ocorre nem em } \Gamma \text{ nem em } \beta, \\ \boldsymbol{x} \text{ subordina } \mathsf{j}, \\ \beta \text{ possui no máximo } \boldsymbol{x} \text{ como objeto variante livre,} \\ \boldsymbol{x} \text{ não é livre em } \gamma, \\ \forall\textbf{-2}, \forall\textbf{-3}, \forall\textbf{-5}, \exists\textbf{-2}, \exists\textbf{-3} \text{ e } \textbf{MP} \text{ geram teoremas em } \mathsf{C}, \\ \Gamma, \exists_{\mathsf{j}}\boldsymbol{x}\, \beta, \beta(\boldsymbol{x}|\mathsf{c}) \vdash_{\mathsf{C}} \gamma, \end{array} \right. \quad \text{então } \Gamma, \exists_{\mathsf{j}}\boldsymbol{x}\, \beta \vdash_{\mathsf{C}} \gamma;$$

$$\text{(iv) se} \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{L}_0 \text{ é uma linguagem para } \mathsf{C}, \\ \mathsf{L}_1 \text{ é obtida de } \mathsf{L}_0 \text{ acrescentando novas constantes,} \\ \Gamma \cup \alpha \subseteq \mathsf{L}_0, \\ \forall\textbf{-3}, \forall\textbf{-4} \text{ e } \textbf{MP} \text{ geram teoremas em } \mathsf{C}, \\ \Gamma \vdash_{\mathsf{C}(\mathsf{L}_1)} \alpha, \end{array} \right. \quad \text{então } \Gamma \vdash_{\mathsf{C}(\mathsf{L}_0)} \alpha.$$

Definição 2.49: Dizemos que um cálculo C é *abrangente* se as seguintes cláusulas forem satisfeitas:

- C é isoclássico;
- C é semifirme;
- "~" funciona localmente em C como a negação clássica;
- cada um dos sinais "$\forall_{\mathsf{j}}$" e "$\exists_{\mathsf{j}}$" é primitivo ou definido, para cada espécie j e para cada linguagem em C;
- **→-1**, **→-2**, **∀-1**, **∀-2**, **∀-3**, **∀-4**, **∀-5**, **∃-2**, **∃-3**, **∃-5**, **MP** e **Gen** geram teoremas em C.

Lema 2.50: Se C é abrangente, $\Gamma \subseteq \mathsf{L}_0$, α é uma fórmula em L_0 e $\Gamma \nvdash_{\mathsf{C}(\mathsf{L}_0)} \alpha$, então existe uma linguagem L_1 para C e um conjunto Σ de Henkin α-saturado em L_1 para C tal que $\mathsf{L}_0 \subseteq \mathsf{L}_1$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$.

Prova:

É fácil mostrar que, se n_1 é a cardinalidade do alfabeto de L_0, então a cardinalidade da coleção de fórmulas fechadas de L_0 é também n_1. Seja n_2 a cardinalidade da coleção de espécies em L_0, e L_1 a linguagem obtida de L_0 acrescentando ao alfabeto de L_0, para cada espécie em $\mathbf{L_0}$, $n_1 \times n_2$ novas constantes. Então a cardinalidade da coleção de fórmulas fechadas em $\mathbf{L_1}$ é $n_1 \times n_2$.

Seja $n = n_1 \times n_2$.

Seja $(\alpha_i)_{i<n}$ uma boa ordem para a coleção de fórmulas fechadas em $\mathbf{L_1}$.

Sejam também, para cada espécie $\mathtt{j}$ em $\mathbf{L_1}$:

$\mathfrak{C}_{\mathtt{j}} \rightleftharpoons \{\mathbf{c} \,/\, \mathbf{c}$ é uma nova constante em $\mathbf{L_1}$ de espécie $\mathtt{j}\}$;

$\mathbf{f}_{\mathtt{j}}$ uma função-escolha para $\mathfrak{C}_{\mathtt{j}}$.

Para cada fórmula β e para cada coleção de fórmulas ϑ em $\mathbf{L_1}$, adotamos as seguintes abreviaturas:

$\mathbf{ad}(\beta) \rightleftharpoons \{\alpha \,/\, \alpha$ é fórmula em $\mathbf{L_1}$ e β é uma aderência de $\alpha\}$;

$\mathbf{ad}(\vartheta) \rightleftharpoons \bigcup_{\beta\in\vartheta} \mathbf{ad}(\beta)$.

Adotamos também as seguintes abreviaturas, para cada espécie $\mathtt{j}$ e cada ordinal $i < n$:

$\mathfrak{C}_{\mathtt{j},i} \rightleftharpoons \{\mathbf{c} \,/\, \mathbf{c}$ é uma nova constante de espécie $\mathtt{j}$ que não figura em $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}\}$;

$\mathbf{c}_{\mathtt{j},i} \rightleftharpoons \mathbf{f}_{\mathtt{j}}(\mathfrak{C}_{\mathtt{j},i})$.

Seja γ uma aderência para α.

Por recursão transfinita, para cada ordinal $i < n$, definimos uma coleção Γ_i de fórmulas em $\mathbf{L_1}$:

$\Gamma_0 = \Gamma \cup \mathbf{ad}(\Gamma)$;

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i, \text{ se } \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \vdash_{\mathbf{C(L_1)}} \gamma; \\ \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \cup \mathbf{ad}(\alpha_i), \text{ se } \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \nvdash_{\mathbf{C(L_1)}} \gamma \text{ e } \alpha_i \text{ não é da forma } \exists_{\mathtt{j}}\boldsymbol{x}\ \beta; \\ \Gamma_i \cup \{\alpha_i, \beta(\boldsymbol{x}|\mathbf{c}_{\mathtt{j},i})\} \cup \mathbf{ad}(\alpha_i), \text{ se } \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \nvdash_{\mathbf{C(L_1)}} \gamma,\ \alpha_i \text{ é da forma } \exists_{\mathtt{j}}\boldsymbol{x}\ \beta, \text{ e } \mathfrak{C}_{\mathtt{j},i} \neq \varnothing; \\ \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \cup \mathbf{ad}(\alpha_i), \text{ se } \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \nvdash_{\mathbf{C(L_1)}} \gamma,\ \alpha_i \text{ é da forma } \exists_{\mathtt{j}}\boldsymbol{x}\ \beta, \text{ e } \mathfrak{C}_{\mathtt{j},i} = \varnothing. \end{cases}$$

Seja $\Sigma = \bigcup_{i<n} \Gamma_i$. Temos de imediato que $\Gamma \subseteq \Sigma$.

Por indução transfinita, é fácil verificar que, para cada ordinal $i < n$ e para cada espécie $\mathtt{j}$ em $\mathbf{L_1}$, a cardinalidade da coleção de novas constantes em $\mathbf{L_1}$ de espécie $\mathtt{j}$ que ocorrem em $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}$ é finita ou é menor ou igual à cardinalidade de i, e daí $\mathfrak{C}_{\mathtt{j},i} \neq \varnothing$.

Considerando que $\mathbf{C}$ é isoclássico, semifirme, usando o teorema 2.38, a terceira e a quarta proposições do lema 2.13, e os postulados **∀-1**, **∀-2**, **∀-3**, **∀-5**, **∃-2**, **∃-3**, **MP** e **Gen**, temos que $\Gamma_i \nvdash_{\mathbf{C(L_1)}} \gamma$, para cada $i < n$, e daí $\Sigma \nvdash_{\mathbf{C(L_1)}} \gamma$. Dada uma fórmula β em $\mathbf{L_1}$ tal que $\beta \notin \Gamma_{i+1}$, existe $i < n$ tal que α_i é uma aderência de β, e daí, pela construção de Γ_{i+1},

$\Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \vdash_{\mathbf{C}(\mathbf{L}_1)} \gamma$, e portanto, pelo teorema 2.38, $\Gamma_i \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{C}(\mathbf{L}_1)} \gamma$, ou seja, $\Sigma \cup \{\beta\} \vdash_{\mathbf{C}(\mathbf{L}_1)} \gamma$, logo Σ é γ-saturado em $\mathbf{L}_1$ para $\mathbf{C}$, e portanto, novamente pelo teorema 2.38, Σ é α-saturado em $\mathbf{L}_1$ para $\mathbf{C}$.

Seja β uma fórmula em $\mathbf{L}_1$ possuindo no máximo x como variável livre.

Supondo que $\exists_{\mathtt{j}} x\, \beta \in \Sigma$, temos que existe $i < n$ tal que α_i é $\exists_{\mathtt{j}} x\, \beta$, e daí, pela construção de Γ_{i+1}, $\beta(x|\mathtt{c}_{\mathtt{j},i}) \in \Gamma_{i+1}$, ou seja, $\beta \in \Sigma$.

Suponhamos agora que, para todo termo fechado $\mathtt{t}$ subordinado a $\mathtt{j}$ em $\mathbf{L}_1$, $\beta(x|\mathtt{t}) \in \Sigma$. Como $\mathbf{C}$ é isoclássico e Σ é saturado, temos que $\forall_{\mathtt{j}} x\, \beta \in \Sigma$ ou $\forall_{\mathtt{j}} x\, \beta \rightarrow \gamma \in \Sigma$. Se $\forall_{\mathtt{j}} x\, \beta \rightarrow \gamma \in \Sigma$, então, como $\mathbf{C}$ é isoclássico, "~" funciona localmente em $\mathbf{C}$ como a negação clássica e pelos postulados **→-1**, **→-2**, **∀-2**, **∀-4**, **∃-5**, **MP** e **Gen**, temos que

$\vdash_{\mathbf{C}(\mathbf{L}_1)} (\forall_{\mathtt{j}} x\, \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \exists_{\mathtt{j}} x\, (\beta \rightarrow \gamma)$, e portanto $\exists_{\mathtt{j}} x\, (\beta \rightarrow \gamma) \in \Sigma$.

Conforme provamos no parágrafo anterior, existe uma constante $\mathtt{c}$ de espécie $\mathtt{j}$ tal que "$\beta(x|\mathtt{c}) \rightarrow \gamma$" $\in \Sigma$, e portanto $\gamma \in \Sigma$, o que é um absurdo, logo $\forall_{\mathtt{j}} x\, \beta \in \Sigma$.

Acabamos de mostrar que Σ é um conjunto de Henkin α-saturado em $\mathbf{L}_1$ para $\mathbf{C}$.

●

<u>Corolário 2.51</u>: Se $\mathbf{C}$ é um cálculo abrangente, a lógica $\mathbb{L}$ e $\mathbf{C}$ possuem as mesmas linguagens, $\mathbf{L}_0$ é uma linguagem para $\mathbf{C}$, $\mathbb{L}$ é definida por uma semântica invariante para mudanças de linguagem, e a função característica de todo conjunto de Henkin saturado em alguma linguagem para $\mathbf{C}$ é uma $\mathbb{L}$-valoração para esta linguagem, então as seguintes proposições são válidas:

- $\Gamma \models_{\mathbb{L}(\mathbf{L}_0)} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}(\mathbf{L}_0)} \alpha$;
- $\Gamma \models_{\mathbb{L}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{C}} \alpha$.

Prova:

Se $\Gamma \nvdash_{\mathbf{C}(\mathbf{L}_0)} \alpha$, temos, pelo lema 2.50, que existe um conjunto Σ α-saturado em uma linguagem $\mathbf{L}_1$ para $\mathbf{C}$ tal que $\Gamma \subseteq \Sigma$. Se **f** é a função característica de Σ em $\mathbf{L}_1$, temos, por hipótese, que **f** é uma $\mathbb{L}$-valoração para $\mathbf{L}_1$. Como **f** satisfaz Γ e não satisfaz α, temos que $\Gamma \not\models_{\mathbb{L}(\mathbf{L}_1)} \alpha$, e daí, pela invariabilidade da semântica de $\mathbb{L}$ para mudanças de linguagem (expressa para as lógicas vistas neste trabalho no lema 2.3.7), $\Gamma \not\models_{\mathbb{L}(\mathbf{L}_0)} \alpha$.

●

Definição 2.52: Especificamos uma axiomática para **CPL**. Os postulados de **CPL** são os proposicionais e quantificacionais básicos.

Escólio 2.53: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CPL}} \alpha$ sss $\Gamma \vDash_{\mathbf{CPL}} \alpha$.

Definição 2.54: Especificamos uma axiomática para **CL**. Os postulados de **CL** são os nove primeiros postulados proposicionais, os quantificacionais básicos, mais os dois postulados específicos dados abaixo:

(**¬-int**) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$;

(**¬-el**) $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

Escólio 2.55: $\Gamma \vdash_{\mathbf{CL}} \alpha$ sss $\Gamma \vDash_{\mathbf{CL}} \alpha$.

§3. Os Cálculos LI^*, PCL^* e $NALL^*$

Especificamos e estudamos aqui os cálculos $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$.

Em toda esta seção, $\mathcal{L}^*$ é uma linguagem quantificacional monossortida cujos únicos conectivos são "$\to$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", possuindo como quantificadores "$\forall$" e "$\exists$"; $\mathcal{L}^{*\prime}$ é a linguagem obtida de $\mathcal{L}^*$ acrescentando "$\bot$" ao alfabeto de $\mathcal{L}^*$; e finalmente $\overline{\mathcal{L}}^*$ é uma das linguagens $\mathcal{L}^*$ ou $\mathcal{L}^{*\prime}$.

Definição 3.1: Os *postulados proposicionais da negação*, adotados em todos os cálculos paraconsistentes e/ou paracompletos descritos neste trabalho, são dados abaixo:

(**¬-1**) $\neg(\alpha \to \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$;

(**¬-2**) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$;

(**¬-3**) $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$;

(**¬-4**) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$.

<u>Definição 3.2</u>: Os *postulados quantificacionais da negação*, presentes em todos os cálculos quantificacionais não auxiliares paraconsistentes e/ou paracompletos descritos neste trabalho, são dados abaixo:

(**¬-5**) $\neg\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \neg\alpha$;

(**¬-6**) $\neg\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha \leftrightarrow \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \neg\alpha$.

<u>Definição 3.3</u>: O cálculo $\mathbf{LI}_1^*$ possui como postulados todos os proposicionais e quantificacionais básicos, os proposicionais e quantificacionais da negação, bem como o seguinte postulado adicional (dito também o *princípio do terceiro excluído*), todos expressos em $\mathbf{L}^*$:

(**te**) $\alpha \vee \neg\alpha$.

O cálculo $\mathbf{LI}_2^*$ possui como postulados todos os postulados do cálculo $\mathbf{LI}_1^*$, mais o seguinte postulado adicional, todos expressos em $\mathbf{L}^{*}$':

(**⊥-1**) $\bot \rightarrow \alpha$.

<u>Definição 3.4</u>: O cálculo $\mathbf{PCL}^*$ possui como postulados todos os proposicionais e quantificacionais básicos, os proposicionais e quantificacionais da negação, bem como o seguinte postulado adicional (dito também o *princípio da não contradição*), todos expressos em $\mathbf{L}^*$:

(**nc**) $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$.

<u>Definição 3.5</u>: O cálculo $\mathbf{NALL}_1^*$ possui como postulados exatamente os proposicionais e quantificacionais básicos, e os proposicionais e quantificacionais da negação, todos expressos em $\mathbf{L}^*$. O cálculo $\mathbf{NALL}_2^*$ possui como postulados todos os postulados do cálculo $\mathbf{NALL}_1^*$, mais os seguintes postulados adicionais, todos expressos em $\mathbf{L}^{*}$':

(**⊥-1**) $\bot \rightarrow \alpha$;

(**⊥-2**) $\neg\bot$.

Definição 3.6: Adotamos as seguintes abreviaturas:

- $\sim\alpha \rightleftharpoons \alpha \to \bot$; para as lógicas $\mathbf{LI}_2^*$ e $\mathbf{NALL}_2^*$;
- $\sim\alpha \rightleftharpoons \alpha \to \neg\alpha$; para a lógica $\mathbf{PCL}^*$.

Escólio 3.7: O conectivo "~", da forma definida acima, funciona globalmente como a negação clássica nos cálculos $\mathbf{LI}_2^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}_2^*$.

Prova: basta aplicar o teorema 2.34.

Definição 3.8: Uma linguagem quantificacional é dita *finita* se a mesma possuir um número finito de sinais predicativos.

Teorema 3.9: O conectivo "~" funciona localmente como a negação clássica para qualquer um dos cálculos $\mathbf{LI}_1^*$ ou $\mathbf{NALL}_1^*$.

Prova:

Seja C um dos cálculos $\mathbf{LI}_1^*$ ou $\mathbf{NALL}_1^*$.

Dada uma coleção finita Γ de fórmulas em C, seja $\mathsf{L_0}$ uma linguagem para C contendo todos os sinais predicativos, funcionais e constantes ocorrendo em Γ. Como Γ é finito, temos que $\mathsf{L_0}$ é uma linguagem finita.

Seja $\bot(\mathsf{L_0})$ uma conjunção das aderências das fórmulas das formas $\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)$ e $\neg\mathbf{p}(x_1,\ldots,x_n)$, onde $\mathbf{p}$ é um sinal predicativo arbitrário de aridade arbitrária $\mathbf{n}$ em $\mathsf{L_0}$.

É fácil verificar que, para cada fórmula α em $\mathsf{L_0}$, $\vdash_{\mathsf{C}} \bot(\mathsf{L_0}) \to \alpha$. Definindo "$\sim\alpha$" em $\mathsf{L_0}$ por "$\alpha \to \bot(\mathsf{L_0})$", temos que "~" funciona em $\mathsf{L_0}$ como a negação clássica.

●

Lema 3.10: Se $\mathcal{F}$ é uma $\mathbb{L}$-correspondência semântica $\neg$-heterodoxa regular para $\mathbf{L_0}$, e Ω é uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$, então $\Omega_{\mathcal{F}}$ satisfaz os postulados proposicionais, universais e existenciais básicos, bem como os postulados proposicionais e quantificacionais da negação.

Prova:

Como $\Omega_{\mathcal{F}}$ é bem comportada proposicionalmente, temos que $\Omega_{\mathcal{F}}$ satisfaz os primeiros dez postulados proposicionais básicos.

Como $\Omega_{\mathcal{F}}$ é regular e bem comportada quantificacionalmente, temos que $\Omega_{\mathcal{F}}$ satisfaz os primeiros sete postulados quantificacionais básicos.

Seja $\mathcal{G}$ a $\mathbb{L}$-correspondência semântica para $\mathbf{L_0}$ tal que $\mathcal{F}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathcal{G}$.

* $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg(\alpha \to \beta)) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha \to \beta)) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\neg\alpha) = 0$ e $\Omega_{\mathcal{G}}(\beta) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$ e $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha \wedge \neg\beta) = 1$.
* $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha \wedge \beta)) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha) = 0$ ou $\Omega_{\mathcal{G}}(\beta) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\alpha) = 1$ ou $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\alpha \vee \neg\beta) = 1$.
* $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg(\alpha \vee \beta)) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha \vee \beta)) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\alpha) = 0$ e $\Omega_{\mathcal{G}}(\beta) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\alpha) = 1$ e $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\beta) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = 1$.
* $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\neg\alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\neg\alpha) = 0$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\alpha) = 1$.
* $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha) = 0$ sss existe Ω' $\boldsymbol{x}$-similar em $\mathtt{i}$ a Ω tal que $\Omega'_{\mathcal{G}}(\alpha) = 0$ sss existe Ω' $\boldsymbol{x}$-similar em $\mathtt{i}$ a Ω tal que $\Omega'_{\mathcal{F}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \neg\alpha) = 1$.
* $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{G}}(\exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \alpha) = 0$ sss para todo Ω' $\boldsymbol{x}$-similar em $\mathtt{i}$ a Ω, $\Omega'_{\mathcal{G}}(\alpha) = 0$ sss para todo Ω' $\boldsymbol{x}$-similar em $\mathtt{i}$ a Ω, $\Omega'_{\mathcal{F}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Omega_{\mathcal{F}}(\forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\ \neg\alpha) = 1$.

Acabamos de mostrar que $\Omega_{\mathcal{F}}$ satisfaz também os postulados **¬-1**, **¬-2**, **¬-3**, **¬-4**, **¬-5** e **¬-6**.

●

Lema 3.11: Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ $\mathbb{L}$-correspondências semânticas para $\mathbf{L_0}$, e Ω uma $\mathbb{L}$-interpretação para $\mathbf{L_0}$, tal que $\mathcal{F}$ é $\neg$-heterodoxa com respeito a $\mathcal{G}$ e $\Omega_{\mathcal{F}}$ e $\Omega_{\mathcal{G}}$ não satisfazem $\perp$, então $\Omega_{\mathcal{F}}$ satisfaz os postulados **⊥-1** e **⊥-2**.

Prova:

Como $\Omega_{\mathcal{F}}(\bot) = 0$, temos que $\Omega_{\mathcal{F}}(\bot \to \alpha) = 1$.

Como $\Omega_{\mathcal{G}}(\bot) = 0$, temos que $\Omega_{\mathcal{F}}(\neg\bot) = 1$.

●

Teorema 3.12: Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas **LI***, **PCL*** ou **NALL*** e $\mathbf{L_0}$ é uma linguagem para $\mathbb{L}$, então valem as seguintes proposições:

- $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$ implica em $\Gamma \models_{\mathbb{L}(\mathbf{L_0})} \alpha$;
- $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$ implica em $\Gamma \models_{\mathbb{L}} \alpha$.

Prova: basta usar o escólio 2.3.3 e os lemas 3.10, 3.11 e 2.4.15.

Lema 3.13: Seja C um cálculo possuindo como geradores de teoremas pelo menos os nove primeiros postulados proposicionais básicos, os postulados quantificacionais básicos, e os postulados proposicionais e quantificacionais da negação. Então são válidas as seguintes proposições:

- $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \neg\beta \Leftrightarrow \neg\beta'$;
- $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta \to \gamma \Leftrightarrow \beta' \to \gamma$;
- $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \gamma \to \beta \Leftrightarrow \gamma \to \beta'$;
- $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow \beta' \wedge \gamma$;
- $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \gamma \wedge \beta \Leftrightarrow \gamma \wedge \beta'$;

$\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \beta \vee \gamma \Leftrightarrow \beta' \vee \gamma$;

$\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\varnothing}_{\mathsf{C}} \gamma \vee \beta \Leftrightarrow \gamma \vee \beta'$;

$\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\boldsymbol{x}}_{\mathsf{C}} \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\, \beta \Leftrightarrow \forall_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\, \beta'$;

$\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\boldsymbol{x}}_{\mathsf{C}} \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\, \beta \Leftrightarrow \exists_{\mathtt{i}}\boldsymbol{x}\, \beta'$.

Teorema 3.14: Se C é um dos cálculos **LI***, **PCL*** ou **NALL***, então $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n}_{\mathsf{C}} \alpha(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \alpha(\gamma|\beta')$, onde $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ são as variáveis tais que γ está nos seus escopos, e $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ são livres em β ou em β'.

Prova:

Se γ não ocorre em α, temos que $\alpha(\gamma|\beta) = \alpha(\gamma|\beta') = \alpha$, e daí não há mais nada a provar.

Sem perder a generalidade, podemos portanto passar a supor que γ ocorre em α.

Se α é uma fórmula atômica, então $\alpha(\gamma|\beta) = \beta$ e $\alpha(\gamma|\beta') = \beta'$.

Se α é da forma $\neg\delta$, então $\alpha(\gamma|\beta) = \neg\delta(\gamma|\beta)$ e $\alpha(\gamma|\beta') = \neg\delta(\gamma|\beta')$. Por hipótese de indução, temos que $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n}_{\mathsf{C}} \delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta(\gamma|\beta')$, e daí, pela primeira proposição do lema 3.13, $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n}_{\mathsf{C}} \neg\delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \neg\delta(\gamma|\beta')$.

Se α é da forma $\delta_1 \# \delta_2$, onde $\# \in \{\rightarrow,\wedge,\vee\}$, então $\alpha(\gamma|\beta) = \delta_1(\gamma|\beta) \# \delta_2(\gamma|\beta)$ e $\alpha(\gamma|\beta') = \delta_1(\gamma|\beta') \# \delta_2(\gamma|\beta')$. Por hipótese de indução, temos que $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \delta_1(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta_1(\gamma|\beta')$ e $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \delta_2(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta_2(\gamma|\beta')$, e daí, pela segunda, quarta e sexta proposições do lema 3.13, $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \delta_1(\gamma|\beta) \# \delta_2(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta_1(\gamma|\beta') \# \delta_2(\gamma|\beta)$, e portanto, pela terça, quinta e sétima proposições do lema 3.13, $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \delta_1(\gamma|\beta') \# \delta_2(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta_1(\gamma|\beta') \# \delta_2(\gamma|\beta')$; pelas duas últimas conclusões finalmente concluímos que $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \delta_1(\gamma|\beta) \# \delta_2(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta_1(\gamma|\beta') \# \delta_2(\gamma|\beta')$.

Se α é da forma $\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta$, onde $\mathbf{Q}$ é $\forall_{\mathtt{i}}$ ou $\exists_{\mathtt{i}}$, para alguma espécie $\mathtt{i}$ em C, então $\alpha(\gamma|\beta) = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta)$ e $\alpha(\gamma|\beta') = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta')$. Por hipótese de indução, temos que $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta(\gamma|\beta')$. Se $\boldsymbol{x} \in \{x_1,\ldots,x_n\}$, então, pela oitava e nona proposições do lema 3.13, $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta')$. Se $\boldsymbol{x} \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$, então γ não ocorre em δ ou $\boldsymbol{x}$ não é livre em β nem em β'. Se γ não ocorre em δ, então $\alpha(\gamma|\beta) = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta$ e $\alpha(\gamma|\beta') = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta$. Se $\boldsymbol{x}$ não é livre em β nem em β', então, novamente aplicando as oitava e nona proposições do lema 3.13, temos que $\delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \delta(\gamma|\beta') \mathrel{\vdash^{x}_{\mathsf{C}}} \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta')$, e daí, pela hipótese de indução, e como $\boldsymbol{x}$ não é livre em β nem em β', temos finalmente que $\beta \Leftrightarrow \beta' \mathrel{\vdash^{x_1,\ldots,x_n}_{\mathsf{C}}} \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\,\delta(\gamma|\beta')$.

●

<u>Teorema 3.15</u>: Se C é um cálculo monossortido possuindo como geradores de teoremas os três primeiros postulados proposicionais básicos, **∧-3**, os quantificacionais e existenciais básicos, os postulados proposicionais e quantificacionais da negação, e **Gen** (como por exemplo $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$), então as seguintes proposições são válidas:

- se $\boldsymbol{x}$ não é livre em α, então $\vdash_{\mathsf{C}} \forall\boldsymbol{x}\,\alpha \Leftrightarrow \alpha$ e $\vdash_{\mathsf{C}} \exists\boldsymbol{x}\,\alpha \Leftrightarrow \alpha$;
- se $\begin{cases} \boldsymbol{y} \text{ não é livre em } \alpha, \\ \boldsymbol{x} \text{ é substituível por } \boldsymbol{y} \text{ em } \alpha, \end{cases}$ então $\begin{cases} \vdash_{\mathsf{C}} \forall\boldsymbol{x}\,\alpha \Leftrightarrow \forall\boldsymbol{y}\,\alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}); \\ \vdash_{\mathsf{C}} \exists\boldsymbol{x}\,\alpha \Leftrightarrow \exists\boldsymbol{y}\,\alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}). \end{cases}$

<u>Teorema 3.16</u>: Sejam C_1 um cálculo monossortido possuindo como geradores de teoremas pelo menos os postulados básicos proposicionais, universais e existenciais, os postulados da negação proposicionais e quantificacionais, e **Gen** (como por exemplo $\mathbf{LI}_1^*$ e $\mathbf{NALL}_1^*$), e C_2 um

cálculo possuindo como geradores todos os postulados de $\mathbf{C}_1$, bem como o conectivo definido "~" apresentando as propriedades da negação clássica (como por exemplo $\mathbf{LI}_2^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}_2^*$). Então os seguintes esquemas são válidos em $\mathbf{C}_2$, e os esquemas abaixo não possuindo o sinal "~" são válidos em $\mathbf{C}_1$, onde $\# \in \{\rightarrow,\wedge,\vee\}$, $\triangle \in \{\circ,*\}$, e $\mathbf{Q} \in \{\forall,\exists\}$:

- $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$; $\neg\alpha^o \Leftrightarrow {\sim}\alpha^o$;
- $\neg{\sim}\alpha \leftrightarrow \alpha$; α^{oo};
- $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow {\sim}\alpha \vee \beta$; $({\sim}\alpha)^{\triangle}$;
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$; $\alpha^{\triangle} \Leftrightarrow (\neg\alpha)^{\triangle}$;
- $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$; $\beta^{\triangle} \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)^{\triangle}$;
- $\alpha^o \Leftrightarrow {\sim}\alpha \vee {\sim}\neg\alpha$; $\alpha^{\triangle} \wedge \beta^{\triangle} \Rightarrow (\alpha \# \beta)^{\triangle}$;
- $\alpha^* \Leftrightarrow \alpha \vee \neg\alpha$; $(\alpha \# \beta)^{\triangle} \Rightarrow \alpha^{\triangle} \vee \beta^{\triangle}$;
- $\alpha^o \leftrightarrow (\neg\alpha \rightarrow {\sim}\alpha)$; $\neg\forall \boldsymbol{x}\alpha \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\, \neg\alpha$;
- $\alpha^* \leftrightarrow ({\sim}\alpha \rightarrow \neg\alpha)$; $\neg\exists \boldsymbol{x}\alpha \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\, \neg\alpha$;
- $\neg\alpha^o \leftrightarrow \neg\alpha^*$; $\forall \boldsymbol{x}\, (\alpha^{\triangle}) \Rightarrow (\mathbf{Q}x\, \alpha)^{\triangle}$;
- $\alpha^o \vee \alpha^*$; $(\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\, \alpha)^{\triangle} \Rightarrow \exists \boldsymbol{x}(\alpha^{\triangle})$.
- $\alpha^* \wedge \beta^o \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$;

<u>Teorema 3.17</u>: Se $\mathbf{C}$ é um cálculo possuindo como geradores de teoremas pelo menos os postulados **→-1**, **→-2**, **MP**, **∧-1**, **∨-2**, **⊥-1** e **⊥-2**, bem como o conectivo definido "~" apresentando as propriedades da negação clássica (como por exemplo os cálculos $\mathbf{LI}_2^*$ e $\mathbf{NALL}_2^*$), então os seguintes esquemas são válidos:

- $\neg\bot$; ${\sim}\bot$; $\bot^o$; $\bot^*$.

Os cinco resultados seguintes fornecem listas de teoremas e não teoremas das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$. Não daremos destes provas explícitas, mas sim indicações para o leitor interessado realizar as provas correspondentes em cada caso.

O meio básico de verificar se uma fórmula é teorema de um dos cálculos $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}^*$, bem como de outros semelhantes, é pelo uso dos teoremas 2.19, 2.20, 2.21 e 2.34, os quais fornecem técnicas de prova direta de teoremas dos cálculos considerados, juntamente com os seis postulados básicos da negação, o postulado **te** (no caso das lógicas $\mathbf{LI}^*$) e o postulado **nc** (no caso da lógica $\mathbf{PCL}^*$).

O meio básico de verificar se uma dada fórmula não é teorema de uma das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}^*$ é exibir uma $\mathbb{L}$-valoração (onde $\mathbb{L}$ é uma das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}^*$) que não satisfaz a fórmula dada (tal procedimento é uma aplicação do teorema 3.12).

Na 4ª seção deste capítulo são dadas semânticas matriciais para as lógicas proposicionais **LI**, **PCL** e **NALL**, das quais as lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$ são respectivamente as extensões conservativas quantificacionais, conforme veremos adiante. Dispomos assim de um algoritmo para decidir se uma dada fórmula não possuindo quantificadores nem variáveis é ou não teorema de uma das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}^*$.

Com sistemas de tableaux ou de resolução adequados também podemos verificar se uma dada fórmula é teorema de uma destas lógicas, e, na maioria dos casos relevantes, se uma dada fórmula não é teorema de uma destas lógicas. Para todas as lógicas vistas neste trabalho, dispomos de sistemas de tableaux e de resolução, porém a sua apresentação não será vista nesta tese.

Teorema 3.18: Entre outros, os seguintes esquemas são válidos em $\mathbf{LI}_2^*$, e os esquemas abaixo expressáveis em $\mathbf{L}^*$ são válidos em $\mathbf{LI}_1^*$:

- α^*; $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$;
- $\beta^o \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$; $(\alpha \to \neg\alpha) \Rightarrow \neg\alpha$;
- $\neg\alpha \leftrightarrow {\sim}\alpha \vee {\sim}\alpha^o$; $(\alpha \to \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.
- ${\sim}\alpha \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge {\sim}\alpha^o$;

Teorema 3.19: Entre outros, os seguintes esquemas não são válidos em $\mathbf{LI}_2^*$, e os esquemas abaixo expressáveis em $\mathbf{L}^*$ não são válidos em $\mathbf{LI}_1^*$:

- $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$; $\neg\alpha \to {\sim}\alpha$;
- $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$; α^o;

- $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$;
- $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$;
- $(\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \to \beta$;
- $\neg\alpha \vee \beta \to (\alpha \to \beta)$;
- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$;

$(\alpha \wedge \neg\alpha)^{o}$;
$\alpha^{o} \to (\alpha \to \beta)^{o}$;
$(\alpha \to \beta)^{o} \to \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$;
$(\alpha \wedge \beta)^{o} \to \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$;
$(\alpha \vee \beta)^{o} \to \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$.

Teorema 3.20: Entre outros, os seguintes esquemas são válidos em $\mathbf{PCL}^{*}$:

- α^{o};
- $\alpha^{*} \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$;
- $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \sim\alpha$;
- $\sim(\alpha \wedge \neg\alpha)$;

$\neg\alpha \Leftrightarrow \sim\alpha \wedge \alpha^{*}$;
$\sim\alpha \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \sim(\alpha^{*})$;
$\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$;
$(\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

Teorema 3.21: Entre outros, os seguintes esquemas não são válidos em $\mathbf{PCL}^{*}$:

- $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$;
- $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$;
- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$;
- $(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha \vee \beta$;
- $\sim\alpha \to \neg\alpha$;
- $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$;

α^{*};
α^{**};
$\alpha^{*} \to (\alpha \to \beta)^{*}$;
$(\alpha \to \beta)^{*} \to \alpha^{*} \vee \beta^{*}$;
$(\alpha \wedge \beta)^{*} \to \alpha^{*} \wedge \beta^{*}$;
$(\alpha \vee \beta)^{*} \to \alpha^{*} \wedge \beta^{*}$.

Teorema 3.22: Entre outros, os seguintes esquemas não são válidos em $\mathbf{NALL}_2^{*}$, e os esquemas abaixo expressáveis em $\mathbf{L}^{*}$ não são válidos em $\mathbf{NALL}_1^{*}$:

- $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$;
- $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$;
- $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$;
- $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$;
- $(\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \to \beta$;
- $\alpha \vee \neg\alpha$;

α^{o};
α^{*};
α^{**};
$\alpha^{o} \to (\alpha \to \beta)^{o}$;
$\alpha^{*} \to (\alpha \to \beta)^{*}$;
$(\alpha \to \beta)^{*} \to \alpha^{*} \wedge \beta^{*}$;

- $(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha \vee \beta$; $(\alpha \to \beta)^{o} \to \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$;
- $\neg\alpha \vee \beta \to (\alpha \to \beta)$; $(\alpha \wedge \beta)^{o} \to \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$;
- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$; $(\alpha \wedge \beta)^{*} \to \alpha^{*} \wedge \beta^{*}$;
- $\neg\alpha \to {\sim}\alpha$; $(\alpha \vee \beta)^{o} \to \alpha^{o} \wedge \beta^{o}$;
- ${\sim}\alpha \to \neg\alpha$; $(\alpha \vee \beta)^{*} \to \alpha^{*} \wedge \beta^{*}$.

Lema 3.23: Se **C** é um cálculo isoclássico possuindo como geradores de teoremas pelo menos os postulados proposicionais básicos e da negação, e Γ é um conjunto saturado em **C**, então a função característica de Γ é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente de modo restrito.

Prova:

Seja **V** a função característica de Γ.

Pelo lema 2.43, **V** é bem comportada de modo restrito.

Pelo escólio 1.3 e pelo postulado ($\neg$-4), temos que existe uma única função **V'** tal que **V** e **V'** são $\neg$-conjugadas.

Sejam α e β fórmulas fechadas em **C** pertencentes ao domínio de **V**.

* $\mathbf{V}'(\alpha \to \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\neg(\alpha \to \beta)) = 0$ sss $\mathbf{V}(\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V}(\neg\beta) = 0$ sss $\mathbf{V}'(\neg\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}'(\beta) = 1$.
* $\mathbf{V}'(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 0$ sss $\mathbf{V}(\neg\alpha) = 0$ e $\mathbf{V}(\neg\beta) = 0$ sss $\mathbf{V}'(\alpha) = 1$ e $\mathbf{V}'(\beta) = 1$.
* $\mathbf{V}'(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\mathbf{V}(\neg(\alpha \vee \beta)) = 0$ sss $\mathbf{V}(\neg\alpha) = 0$ ou $\mathbf{V}(\neg\beta) = 0$ sss $\mathbf{V}'(\alpha) = 1$ ou $\mathbf{V}'(\beta) = 1$.

Logo **V'** é quase bem comportada de modo restrito.

Acabamos de mostrar que **V** é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente de modo restrito com respeito a **V'**.

●

Lema 3.24: Se C é um cálculo isoclássico possuindo como geradores de teoremas pelo menos os postulados básicos proposicionais, universais e existenciais, e os da negação proposicionais e quantificacionais, e Γ é um conjunto de Henkin saturado em C, então a função característica de Γ é $\neg$-heterodoxa e regular.

Prova:

Seja **V** a função característica de Γ.

Pelo lemas 3.23 e 2.44, temos que **V** é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente de modo restrito, **V** é bem comportada quantificacionalmente, uma função de Henkin, e **V** é regular.

Se **V’** é a função tal que **V** é $\neg$-conjugada com respeito a **V’**, temos de imediato, pelos postulados **¬-5** e **¬-6**, que **V’** é bem comportada quantificacionalmente e **V’** é uma função de Henkin.

Acabamos de mostrar que **V** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **V’**.

●

Lema 3.25: Se C é um dos cálculos **LI***, **PCL*** ou **NALL***, $\mathbb{L}$ é uma das lógicas correspondentes **LI***, **PCL*** ou **NALL***, e Γ é um conjunto de Henkin saturado em C, então a função característica de Γ é uma $\mathbb{L}$-valoração completa.

Prova: basta usar os lemas 2.4.25 e 3.24.

Teorema 3.26: Se $\mathbb{L}$ é uma das lógicas **LI***, **PCL*** ou **NALL***, então $\Gamma \models_{\mathbb{L}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

Prova: basta usar os lemas 2.51 e 3.25.

Corolário 3.27: As seguintes asserções são válidas:

- o cálculo $\mathbf{LI}_2^*$ é uma extensão conservativa do cálculo $\mathbf{LI}_1^*$;
- o cálculo $\mathbf{NALL}_2^*$ é uma extensão conservativa do cálculo $\mathbf{NALL}_1^*$.

Prova: basta usar o corolário 2.4.7, e os teoremas 3.12 e 3.26.

§4. Semânticas Matriciais para os Cálculos LI, PCL e NALL

Expomos nesta seção semânticas matriciais para os cálculos proposicionais **LI**, **PCL** e **NALL**.

Em toda esta seção, L é uma linguagem sentencial cujos conectivos são "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$"; L' é a linguagem sentencial obtida de L acrescentando o conectivo zerário "$\perp$" ao alfabeto de L; e finalmente $\overline{\mathsf{L}}$ é uma das linguagens L ou L', dependendo do contexto.

<u>Definição 4.1</u>: L é uma linguagem para o cálculo $\mathbf{LI_1}$. Os postulados de $\mathbf{LI_1}$ são os proposicionais básicos e da negação, bem como o postulado **te**. L' é uma linguagem para $\mathbf{LI_2}$. Os postulados de $\mathbf{LI_2}$ são os de $\mathbf{LI_1}$, mais o postulado $\perp$**-1**.

<u>Definição 4.2</u>: L é uma linguagem para o cálculo **PCL**. Os postulados de **PCL** são os proposicionais básicos e da negação, bem como o postulado **nc**.

<u>Definição 4.3</u>: L é uma linguagem para o cálculo $\mathbf{NALL_1}$. Os postulados de $\mathbf{NALL_1}$ são os proposicionais básicos e da negação. L' é uma linguagem para $\mathbf{NALL_2}$. Os postulados de $\mathbf{NALL_2}$ são os de $\mathbf{NALL_1}$, mais os postulados $\perp$**-1** e $\perp$**-2**.

<u>Definição 4.4</u>: Adotamos as seguintes abreviaturas:

- $\sim\alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$; para as lógicas $\mathbf{LI_2}$ e $\mathbf{NALL_2}$;
- $\sim\alpha \equiv \alpha \rightarrow \neg\alpha$; para a lógica **PCL**.

Escólio 4.5: Com respeito ao comportamento do conectivo "~" nos cálculos **LI**, **PCL** e **NALL**, temos as seguintes proposições:

- "~" funciona globalmente como a negação clássica nos cálculos $\mathbf{LI_2}$, **PCL** e $\mathbf{NALL_2}$;
- "~" funciona localmente como a negação clássica nos cálculos $\mathbf{LI_1}$ e $\mathbf{NALL_1}$;

Teorema 4.6: Se C é um dos cálculos **LI**, **PCL** ou **NALL**, e C^* é respectivamente um dos cálculos $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ ou $\mathbf{NALL}^*$, então C^* é uma extensão conservativa de C.

Prova:

Sejam Γ uma coleção de fórmulas em C, e α uma fórmula em C, tais que $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \bar{\mathsf{L}}$.

Como todo postulado de C é um postulado de C^*, temos que $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}^*} \alpha$.

Reciprocamente, suponhamos que $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}^*} \alpha$. Se $\bar{\mathsf{L}}^*$ é uma linguagem para C^* cujos únicos sinais predicativos são aqueles (zerários) que ocorrem em $\Gamma \cup \{\alpha\}$, então existe uma demonstração $\mathcal{D}$ em C^* de α a partir de Γ cujas fórmulas estão todas em $\bar{\mathsf{L}}^*$, e daí, suprimindo em $\mathcal{D}$ todas as ocorrências dos quantificadores "$\forall$" e "$\exists$", obtemos uma lista de teoremas de Γ em C, e portanto, como a fórmula α permanece inalterada nesta supressão, temos que $\Gamma \vdash_{\mathsf{C}} \alpha$.

●

Corolário 4.7: Se C_1 é um dos cálculos $\mathbf{LI_1}$ ou $\mathbf{NALL_1}$, e C_2 é respectivamente um dos cálculos $\mathbf{LI_2}$ ou $\mathbf{NALL_2}$, então C_2 é uma extensão conservativa de C_1.

Prova: basta aplicar o corolário **3.27** e o teorema 4.6.

Os teoremas seguintes fornecem sistemas de matrizes para os cálculos **LI**, **PCL** e **NALL**.

Com respeito ao sistema de matrizes para $\mathbf{LI_2}$, consideramos que uma fórmula α pode apresentar três valores veritativos distintos:

- α é absolutamente verdadeiro (simbolizado por "**T**", do inglês "*true*") — neste caso α é verdadeiro e não é o caso que $\neg\alpha$ também é verdadeiro; isto pode ser expresso em $\mathbf{LI_2}$ por $\sim\neg\alpha$;
- α é absolutamente falso (simbolizado por "**F**", do inglês "*false*") — neste caso $\neg\alpha$ é verdadeiro e não é o caso que α também é verdadeiro; isto pode ser expresso em $\mathbf{LI_2}$ por $\sim\alpha$;

- α é relativamente verdadeiro e relativamente falso (simbolizado por "**O**", do inglês "*overdefined*") — neste caso tanto α como ¬α são verdadeiros; isto pode ser expresso em $\mathbf{LI_2}$ por $\alpha \wedge \neg\alpha$.

Os dois valores distinguidos são **T** e **O**, já que em ambos α é verdadeiro.

<u>Teorema 4.8</u>: O cálculo $\mathbf{LI_2}$ é decidível pelas seguintes matrizes de três valores, onde **T** e **O** são os valores distinguidos:

	$\alpha \to \beta$		
α \ β	**F**	**O**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
O	**F**	**O**	**T**
T	**F**	**O**	**T**

	$\alpha \wedge \beta$		
α \ β	**F**	**O**	**T**
F	**F**	**F**	**F**
O	**F**	**O**	**O**
T	**F**	**O**	**T**

	$\alpha \vee \beta$		
α \ β	**F**	**O**	**T**
F	**F**	**O**	**T**
O	**O**	**O**	**T**
T	**T**	**T**	**T**

α	¬α
F	**T**
O	**O**
T	**F**

⊥	**F**

Prova:

O leitor está convidado a verificar que cada axioma de $\mathbf{LI_2}$ é uma tautologia (sob este sistema de matrizes) e que a regra **MP** preserva a propriedade de ser tautologia. Temos daí que toda tese de $\mathbf{LI_2}$ é uma tautologia.

Reciprocamente, suponhamos que uma dada fórmula α em $\mathbf{LI_2}$ é uma tautologia.

Sejam $\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}$ ($\mathbf{n} \geq 1$) as letras sentenciais que figuram em uma fórmula arbitrária β em $\mathbf{LI_2}$. Para uma dada atribuição $\mathbf{s_1},\ldots,\mathbf{s_n}$ de valores veritativos a respectivamente $\mathbf{P_1},\ldots,\mathbf{P_n}$, é fácil provar, por indução sobre β, que $\mathbf{P'_1},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \beta'$, onde, para cada $\mathbf{i} = 1,\ldots,\mathbf{n}$, $\mathbf{P'}$ é $\sim\mathbf{P_i}$, caso $\mathbf{s_i}$ é **F**, $\mathbf{P'_i}$ é $\mathbf{P_i} \wedge \neg\mathbf{P_i}$, caso $\mathbf{s_i}$ é **O**, e $\mathbf{P'_i}$ é $\sim\neg\mathbf{P_i}$, caso $\mathbf{s_i}$ é **T**; e similarmente β' é $\sim\beta$, $\beta \wedge \neg\beta$ ou $\sim\neg\beta$, conforme o valor **F**, **O** ou **T** que β assumir segundo esta atribuição.

No caso particular em que β é α, como α é, por suposição, uma tautologia, temos que $\mathbf{P'_1},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \alpha \wedge \neg\alpha$ ou $\mathbf{P'_1},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \sim\neg\alpha$, e daí, em qualquer caso, $\mathbf{P'_1},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \alpha$.

Como a atribuição considerada é arbitrária, considerando s_1 sucessivamente igual a **F**, **O** e **T**, temos que $\sim\mathbf{P_1},\mathbf{P'_2},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \alpha$; $\mathbf{P_1} \wedge \neg\mathbf{P_1},\mathbf{P'_2},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \alpha$; e $\sim\neg\mathbf{P_1},\mathbf{P'_2},\ldots,\mathbf{P'_n} \vdash_{\mathbf{LI_2}} \alpha$. Daí, como

$\sim\beta \vee (\beta \wedge \neg\beta) \vee \sim\neg\beta$ é um esquema válido em $\mathbf{LI_2}$ e $\mathbf{LI_2}$ é um cálculo superforte, temos que $\mathbf{P'_2},\ldots,\mathbf{P'_n} \models_{\mathbf{LI_2}} \alpha$. Repetindo mais $\mathbf{n} - 1$ vezes o mesmo raciocínio, temos que $\models_{\mathbf{LI_2}} \alpha$.

●

Corolário 4.9: O cálculo $\mathbf{LI_1}$ é decidível pelo sistema de matrizes para $\mathbf{LI_2}$, restrito aos conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$".

Prova: basta usar o teorema 4.8 e o corolário 4.7.

Com respeito ao sistema de matrizes para **PCL**, consideramos que uma fórmula α pode apresentar três valores veritativos distintos:

- α é absolutamente verdadeiro (simbolizado por "**T**") — neste caso α é percebido, conhecido ou crido como verdadeiro; isto pode ser expresso em **PCL** por α;
- α é absolutamente falso (simbolizado por "**F**") — neste caso o oposto de α é percebido, conhecido ou crido como verdadeiro; isto pode ser expresso em **PCL** por $\neg\alpha$;
- α não é verdadeiro nem falso (simbolizado por "**U**", do inglês "*underdefined*") — neste caso não se percebe, conhece ou crê nada sobre α ou sobre o oposto de α; isto pode ser expresso em **PCL** por $\sim\alpha \wedge \sim\neg\alpha$.

O único valor distinguido é **T**, pois só neste caso α é verdadeiro.

<u>Teorema 4.10</u>: O cálculo **PCL** é decidível pelas seguintes matrizes de três valores, onde **T** é o único valor distinguido:

	$\alpha \to \beta$		
$\alpha \backslash \beta$	**F**	**U**	**T**
F	**T**	**T**	**T**
U	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**U**	**T**

	$\alpha \wedge \beta$		
$\alpha \backslash \beta$	**F**	**U**	**T**
F	**F**	**F**	**F**
U	**F**	**U**	**U**
T	**F**	**U**	**T**

	$\alpha \vee \beta$		
$\alpha \backslash \beta$	**F**	**U**	**T**
F	**F**	**U**	**T**
U	**U**	**U**	**T**
T	**T**	**T**	**T**

α	$\neg\alpha$
F	**T**
U	**U**
T	**F**

Prova: análoga à prova do teorema 4.8.

Com respeito ao sistema de matrizes para $\mathbf{NALL_2}$, consideramos que uma fórmula α pode apresentar quatro valores veritativos distintos:

- α é absolutamente verdadeiro (simbolizado por "**T**") — neste caso α é percebido, conhecido ou crido como verdadeiro e não é o caso que $\neg\alpha$ também é verdadeiro; isto pode ser expresso em $\mathbf{NALL_2}$ por $\alpha \wedge \sim\neg\alpha$;
- α é absolutamente falso (simbolizado por "**F**") — neste caso o oposto de α é percebido, conhecido ou crido como verdadeiro e não é o caso que α também é verdadeiro; isto pode ser expresso em $\mathbf{NALL_2}$ por $\neg\alpha \wedge \sim\alpha$;
- α é relativamente verdadeiro e relativamente falso (simbolizado por "**O**") — neste caso tanto α como $\neg\alpha$ são percebidos, conhecidos ou cridos como verdadeiros; isto pode ser expresso em $\mathbf{NALL_2}$ por $\alpha \wedge \neg\alpha$;
- α não é verdadeiro nem falso (simbolizado por "**U**") — neste caso não se percebe, conhece ou crê nada sobre α ou sobre o oposto de α; isto pode ser expresso em $\mathbf{NALL_2}$ por $\sim\alpha \wedge \sim\neg\alpha$.

Os valores distinguidos são **T** e **O**, pois em ambos os casos α é verdadeiro.

Teorema 4.11: O cálculo $\mathbf{NALL_2}$ é decidível pelas seguintes matrizes com quatro valores, onde **T** e **O** são os valores distinguidos:

$\alpha \to \beta$				
$\alpha \backslash \beta$	**F**	**U**	**O**	**T**
F	**T**	**T**	**T**	**T**
U	**T**	**T**	**T**	**T**
O	**F**	**U**	**O**	**T**
T	**F**	**U**	**O**	**T**

$\alpha \wedge \beta$				
$\alpha \backslash \beta$	**F**	**U**	**O**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**F**
U	**F**	**U**	**F**	**U**
O	**F**	**F**	**O**	**O**
T	**F**	**U**	**O**	**T**

$\alpha \vee \beta$				
$\alpha \backslash \beta$	**F**	**U**	**O**	**T**
F	**F**	**U**	**O**	**T**
U	**U**	**U**	**T**	**T**
O	**O**	**T**	**O**	**T**
T	**T**	**T**	**T**	**T**

α	$\neg\alpha$
F	**T**
U	**U**
O	**O**
T	**F**

$\perp$	**F**

Prova: análoga à prova do teorema 4.8.

Corolário 4.12: O cálculo $\mathbf{NALL_1}$ é decidível pelo sistema de matrizes para $\mathbf{NALL_2}$, restrito aos conectivos "$\to$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$".

Prova: basta usar o teorema 4.11 e o corolário 4.7.

§5. A Implicação Forte

Nesta seção estudaremos o comportamento da implicação forte nas lógicas **LI**, **PCL** e **NALL**.

A implicação forte, como vimos no teorema 3.14, é fundamental para enunciar um princípio de substituição nas lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$ (veremos nos dois capítulos seguintes que a mesma é usada da mesma forma nas lógicas restantes estudadas neste trabalho).

Verificamos que a implicação forte, nos cálculos **LI** e **NALL**, parece-se com a implicação relevante definida no cálculo **R**, em [1].

Nos teoremas abaixo, comparamos a implicação forte dos cálculos **LI**, **PCL** e **NALL** com o cálculo relevante **R**, sempre interpretando a implicação de **R** como a implicação forte.

Para comodidade do leitor, damos abaixo os postulados de **R**:

(i) $\alpha \Rightarrow \alpha$;

(ii) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$;

(iii) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \beta)$;

(iv) $(\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$;

(v) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$;

(vi) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$;

(vii) $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma)$;

(viii) $\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$;

(ix) $\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$;

(x) $(\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma)$;

(xi) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$;

(xii) $(\alpha \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow \neg\alpha$;

(xiii) $(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \neg\alpha)$;

(xiv) $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$;

(xv) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow \gamma)$;

(xvi) $((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha) \wedge ((\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha \wedge \beta)$;

(xvii) $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \,/\, \beta$;

(xviii) $\alpha, \beta \,/\, \alpha \wedge \beta$;

(xix) $\alpha \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)$.

<u>Teorema 5.1</u>: Alguns dos paradoxos da implicação material não são válidos em **LI** e **NALL**, isto é, os seguintes esquemas não geram teoremas nem de **LI** nem de **NALL**:

- $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha$; $\qquad \alpha \wedge \neg\alpha \Rightarrow \beta$;
- $\alpha \Rightarrow \neg\alpha \Rightarrow \beta$; $\qquad \alpha \Rightarrow \beta \vee \neg\beta$.

<u>Teorema 5.2</u>: Os esquemas dados acima da primeira coluna são válidos em **PCL**, enquanto que os da segunda coluna não são válidos em **PCL**.

<u>Teorema 5.3</u>: Todos os postulados de **R** são válidos em **LI**.

<u>Teorema 5.4</u>: Todos os postulados de **R**, com exceção dos postulados (iv) e (xii), são válidos em **PCL** e **NALL**.

O teorema seguinte mostra que a implicação forte das lógicas **LI** e **NALL** não é relevante, embora esta possa ser classificada de semi-relevante, tendo em vista o teorema 5.1.

<u>Teorema 5.5</u>: O seguinte esquema é válido em **LI**, **PCL** e **NALL**:

- $\neg(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \beta)$.

4. A LÓGICA DA INCONSISTÊNCIA EPISTÊMICA

Apresentamos neste capítulo uma semântica, uma axiomática e uma extensão não monotônica para a lógica **LEI**.

A lógica **LEI** (esta sigla é oriunda do inglês "*Logic for Epistemic Inconsistency*") é paraconsistente e se destina a dar suporte a formas de raciocínio combinando certeza e plausibilidade crédula, e foi obtida originalmente por um refinamento da base monotônica da lógica **IDL**, apresentada em [42]. Uma discussão detalhada das motivações para **LEI** é dada em [43] e [12].

Em todo este capítulo, $\mathsf{L}_?$ é uma linguagem quantificacional monossortida, possuindo como únicos conectivos "$\to$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$", e "?", e como únicos quantificadores "$\forall$" e "$\exists$". O conectivo "?" é unário e forma fórmulas em $\mathsf{L}_?$ pela notação pós-fixada.

A menos que seja dito explicitamente o contrário, em todo este capítulo, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ são fórmulas de $\mathsf{L}_?$, **P** é uma fórmula atômica de $\mathsf{L}_?$, Γ é uma coleção de fórmulas de $\mathsf{L}_?$, $\mathtt{t}$ é um termo em $\mathsf{L}_?$, L^* é a coleção de fórmulas de $\mathsf{L}_?$ não possuindo o conectivo "?", e **A**,**B**,**C** são fórmulas de L^*.

§1. Uma Semântica para LEI

Definição 1.1: $\mathsf{L}_?$ é uma linguagem para **LEI**. Uma **LEI**-estrutura para $\mathsf{L}_?$ é uma estrutura múltipla para $\mathsf{L}_?$. Uma **LEI**-interpretação para $\mathsf{L}_?$ é uma interpretação híbrida para $\mathsf{L}_?$. **V** é uma **LEI**-valoração para $\mathsf{L}_?$ se **V** é uma função de $\mathsf{L}_?$ em $\{0,1\}$ e existe uma estrutura múltipla **Y** para $\mathsf{L}_?$ e duas **LEI**-correspondências semânticas **max** e **min** para $\mathsf{L}_?$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- **V** é a valoração gerada por **Y** e **max**;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Phi_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Phi^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$, para qualquer interpretação híbrida Φ para $\mathsf{L}_?$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha?) = 1$ sss existe uma interpretação Φ' semelhante a Φ tal que $\Phi'_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha?) = 1$ sss para toda interpretação Φ' semelhante a Φ, $\Phi'_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- **max** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **min**.

Dizemos também que **Y** gera **V** em **LEI**.

Teorema 1.2: **V** é uma **LEI**-valoração para $L_?$ se, e somente se, **V** é uma função de $L_?$ em {0,1} e existe uma estrutura múltipla **Y** para $L_?$ e duas **LEI**-correspondências semânticas **max** e **min**[1] para $L_?$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas, para qualquer interpretação híbrida $\Phi = \langle \mathbf{Y},\mathbf{U},\mathbf{s} \rangle$ sobre **Y** para $L_?$:

- **V** é a valoração gerada por **Y** e **max**;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Phi_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \langle \mathbf{U},\mathbf{s} \rangle^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha?) = 1$ sss existe $\mathbf{U'} \in \mathbf{Y}$ tal que $\langle \mathbf{Y},\mathbf{U'},\mathbf{s} \rangle_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha?) = 1$ sss para todo $\mathbf{U'} \in \mathbf{Y}$, $\langle \mathbf{Y},\mathbf{U'},\mathbf{s} \rangle_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha) = 0$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) = 0$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) = 0$ ou $\Phi_{\mathbf{max}}(\beta) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) = 0$ ou $\Phi_{\mathbf{min}}(\beta) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$ e $\Phi_{\mathbf{max}}(\beta) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$ e $\Phi_{\mathbf{min}}(\beta) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$ ou $\Phi_{\mathbf{max}}(\beta) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$ ou $\Phi_{\mathbf{min}}(\beta) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\forall \boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\Phi(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$, para todo $\mathbf{d} \in |\Phi|$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\forall \boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\Phi(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$, para todo $\mathbf{d} \in |\Phi|$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\exists \boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\Phi(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$, para algum $\mathbf{d} \in |\Phi|$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\exists \boldsymbol{x}\ \alpha) = 1$ sss $\Phi(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$, para algum $\mathbf{d} \in |\Phi|$.

Prova: basta aplicar o lema 2.2.9.

Lema 1.3: Se $\Phi = \langle \mathbf{Y},\mathbf{U},\mathbf{s} \rangle$ é uma interpretação híbrida para $L_?$, e **max** e **min** são as **LEI**-correspondências semânticas especificadas na definição 1.1, então

$\Phi_{\mathbf{max}}(\mathbf{A}) = \Phi_{\mathbf{min}}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{U},\mathbf{s} \rangle_{\mathbf{f}}(\mathbf{A})$.

---

[1] **max** e **min** são as mesmas funções especificadas na definição 1.1.

Definição 1.4: Especificamos em **LEI**, com respeito a $\mathsf{L}_?$, os conectivos definidos “~” e “!”:

- $\sim\alpha \rightleftharpoons \alpha \rightarrow \mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{P}$, onde **P** é uma fórmula atômica em $\mathsf{L}_?$ escolhida arbitrariamente;
- $\alpha! \rightleftharpoons \sim((\sim\alpha)?)$.

Escólio 1.5: Os conectivos “~” e “!” satisfazem as seguintes proposições, para cada interpretação híbrida Φ para $\mathsf{L}_?$

- $\Phi_{\mathbf{max}}(\sim\alpha) =1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) =0$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\sim\alpha) =1$ sss $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha) =0$;
- $\Phi_{\mathbf{max}}(\alpha!) =1$ sss para toda interpretação Φ' semelhante a Φ, $\Phi'_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- $\Phi_{\mathbf{min}}(\alpha!) =1$ sss existe uma interpretação Φ' semelhante a Φ tal que $\Phi'_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$.

Estabelecemos abaixo que, sob hipóteses razoáveis, não há mais conseqüências semânticas da parte irrefutável de uma coleção dada de fórmulas em **LEI** além das conseqüências semânticas clássicas. Chamamos uma coleção Γ de fórmulas em **LEI** de *normal* se esta satisfizer certas hipóteses razoáveis. Sejam **P**, **Q** e **R** fórmulas atômicas. Se $\Gamma = \{\mathbf{P},(\neg\mathbf{P})?\}$, temos que não é verdade que $\mathbf{P} \models_{\mathbf{CL}} \mathbf{Q}$, mas $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \mathbf{Q}$, por isso requeremos que uma coleção normal seja satisfatível em **LEI**. Se $\Gamma = \{\mathbf{P},\mathbf{Q}?,\mathbf{Q}? \rightarrow \mathbf{R}\}$, temos que não é verdade que $\mathbf{P} \models_{\mathbf{CL}} \mathbf{R}$, mas $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \mathbf{R}$, por isso não permitimos que, dentre outras fórmulas, aquelas que sejam do tipo $\mathbf{A}? \rightarrow \mathbf{B}$ pertençam a uma coleção normal de fórmulas em **LEI**.

Definição 1.6: Uma fórmula em **LEI** é dita *normal* se ela for de uma das formas **A** ou **A**?. Uma coleção Γ de fórmulas em **LEI** é dita *normal (em* **LEI***)* se as seguintes cláusulas forem satisfeitas:

- Γ é satisfatível em **LEI**;
- toda fórmula de Γ é normal.

Lema 1.7: Se **Y**,**Y'** são estruturas múltiplas para $\mathbf{L}_?$ tal que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Y'}$ e **Y**,**Y'** geram respectivamente **V**,**V'** em **LEI**, então valem as seguintes proposições:

- **V**(**A**) = 1 sss para todo $\mathbf{U} \in \mathbf{Y}$, a valoração gerada por **U** em **CL** satisfaz **A**;
- **V**(**A?**) = 1 sss existe $\mathbf{U} \in \mathbf{Y}$ tal que a valoração gerada por **U** em **CL** satisfaz **A**;
- se **V'** satisfaz **A**, então **V** satisfaz **A**;
- se **V** satisfaz **A?**, então **V'** satisfaz **A?**.

Prova: basta usar o lema 1.3.

Teorema 1.8: Se Γ é uma coleção normal em **LEI**, e Γ é a coleção de fórmulas de Γ não possuindo "?", então $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \mathbf{A}$ sss $\Gamma \models_{\mathbf{CL}} \mathbf{A}$.

Prova:

Se $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \mathbf{A}$ e **V** é uma **CL**-valoração para $\mathbf{L}^*$ satisfazendo Γ, então existe uma estrutura simples **U** para $\mathbf{L}^*$ gerando **V** em **CL**. Como Γ é satisfatível em **LEI**, existe uma **LEI**-valoração **V'** para $\mathbf{L}_?$ satisfazendo Γ. Seja **Y** uma estrutura múltipla para $\mathbf{L}_?$ gerando **V'**. Sem perder a generalidade, podemos supor que **U** e **Y** são estruturas completas, e daí, pelo lema 2.3.14, temos que $\mathbf{U_C}$ e $\mathbf{Y_C}$ geram respectivamente **V** em **CL** e **V'** em **LEI**. Se é **V''** a **LEI**-valoração gerada por $\mathbf{Y_C} \cup \mathbf{U_C}$, temos, pelo lema 1.7, que **V''** satisfaz Γ, e portanto satisfaz **A**; segue-se daí, novamente pelo lema 1.7, que **V** satisfaz **A**, ou seja, $\Gamma \models_{\mathbf{CL}} \mathbf{A}$.

Se $\Gamma \models_{\mathbf{CL}} \mathbf{A}$ e **V** é uma **LEI**-valoração para $\mathbf{L}_?$ satisfazendo Γ, então existe uma estrutura múltipla **Y** gerando **V** em **LEI**. Dado $\mathbf{U} \in \mathbf{Y}$ e $\mathbf{B} \in \Gamma$, temos, pelo lema 1.7, que a valoração gerada por **U** em **CL** satisfaz **B**, e daí esta **CL**-valoração satisfaz **A**, e portanto, novamente pelo lema 1.7, **V** satisfaz **A**, ou seja, $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \mathbf{A}$.

●

§2. Uma Axiomática para LEI

Definimos nesta seção o cálculo **LEI**, e estudamos algumas de suas propriedades básicas.

Na elaboração de uma axiomática para **LEI**, seguimos as diretrizes gerais estabelecidas na página 3 deste trabalho, mais as seguintes diretrizes específicas:

1ª) o conectivo "$\neg$" deve portar-se da forma clássica para fórmulas em **LEI** não possuindo "?";

2ª) o conectivo "$\neg$" deve atuar de forma paraconsistente para fórmulas em **LEI** da forma $\alpha?$;

3ª) o conectivo "$\neg$" pode atuar da forma clássica desde que o princípio anterior não seja violado;

4ª) refletindo a intuição de que todo conhecimento irrefutável é em particular plausível, devemos ter "$\alpha \to \alpha?$" como tese de **LEI**;

5ª) conforme a intuição de que todo conhecimento plausível não deve negar um conhecimento irrefutável já estabelecido, $\{\mathbf{A},(\neg\mathbf{A})?\}$ deve ser trivial em **LEI**;

6ª) como a plausibilidade não acarreta a irrefutabilidade, não devemos ter em geral que $\alpha? \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha$;

7ª) não devemos ter em geral que $\mathbf{A}?,(\neg\mathbf{A})? \vdash_{\mathbf{LEI}} \mathbf{B}?$;

8ª) o conectivo "?" deve fatorar e distribuir com respeito aos demais conectivos e quantificadores sempre que os três princípios anteriores não sejam violados;

9ª) o princípio de substituição deve aplicar-se para a equivalência forte;

10ª) se α é uma fórmula de LEI na qual todos os seus sinais estão sob o escopo de alguma ocorrência de "?", então "$\alpha \Leftrightarrow \alpha?$" deve ser uma tese de **LEI**;

11ª) **LEI** deve ser superforte.

<u>Definição 2.1</u>: O cálculo **LEI** possui como postulados todos os proposicionais e quantificacionais básicos, os proposicionais e quantificacionais da negação, mais os seguintes postulados específicos:

(**?-1**) $(\alpha \to \mathbf{B}) \to (\alpha \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\alpha$;

(**?-2**) $\alpha \to \alpha?$;

(**?-3**) $\alpha?? \to \alpha?$;

(**?-4**) $(\alpha? \to \beta?)? \to (\alpha? \to \beta?)$;

(**?-5**) $(\alpha \vee \beta)? \to \alpha? \vee \beta?$;

(**?-6**) $(\neg\alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)$;

(**?-7**) $(\exists \boldsymbol{x}\ \alpha)? \to \exists \boldsymbol{x}\ (\alpha?)$;

(**?-8**) $\alpha? \to (\sim\sim\alpha)?$;

(**?-9**) $\alpha? \wedge \sim(\beta?) \to (\alpha \wedge \sim\beta)?$;

(**?-10**) $\dfrac{\alpha}{\sim((\sim\alpha)?)}$.

Toda aplicação da regra **?-10** possui ? como o único objeto variante. α é dita ?-*fechada* se α é de uma das formas $\beta?$, $\neg\gamma$, $\sim\gamma$, $\gamma \to \delta$, $\gamma \wedge \delta$, $\gamma \vee \delta$, $\forall \boldsymbol{x}\ \gamma$ ou $\exists \boldsymbol{x}\ \gamma$, onde γ e δ são ?-fechadas. β *está no escopo de* ? *em* α se existe uma subfórmula de α da forma $\gamma?$ tal que β ocorre em γ.

<u>Teorema 2.2</u>: "~" funciona em **LEI** como a negação clássica.

Prova: basta aplicar o teorema 3.2.34 e o postulado **?-1**.

<u>Teorema 2.3</u>: Os conectivos "?" e "!" preservam a implicação e a equivalência clássicas e fortes, isto é, as seguintes proposições são verdadeiras:

- $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha? \to \beta?$; $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha! \to \beta!$;
- $\alpha \leftrightarrow \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha? \leftrightarrow \beta?$; $\alpha \leftrightarrow \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha! \leftrightarrow \beta!$;
- $\alpha \Rightarrow \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha? \Rightarrow \beta?$; $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha! \Rightarrow \beta!$;
- $\alpha \Leftrightarrow \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha? \Leftrightarrow \beta?$; $\alpha \leftrightarrow \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha! \Leftrightarrow \beta!$.

Prova da primeira proposição:

Pelo teorema 2.2, temos que $\alpha \to \beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \sim(\alpha \wedge \sim\beta)$, daí e por **?-10**, $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \sim((\sim\sim(\alpha \wedge \sim\beta))?)$, segue-se por **?-8** que $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \sim((\alpha \wedge \sim\beta)?)$ e, por **?-9**, $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \sim(\alpha? \wedge \sim(\beta?))$, ou seja, $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha? \to \beta?$.

●

Corolário 2.4: $\begin{cases} \vdash_{\mathbf{LEI}} (\alpha \to \beta)! \to (\alpha? \to \beta?); \\ \vdash_{\mathbf{LEI}} (\alpha \to \beta)! \to (\alpha! \to \beta!). \end{cases}$

Prova: basta usar **?-9** e o teorema 2.3.

Teorema 2.5: Se α é ?-fechada, então valem as seguintes proposições:

- $\vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha \Leftrightarrow \alpha?$; $\qquad\qquad \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha \Leftrightarrow \alpha!$.

Prova: basta usar indução sobre fórmulas, o teorema 2.3, e os postulados **?-2**, **?-3**, **?-4**, **?-5**, **?-6** e **?-7**.

Lema 2.6: $\vdash_{\mathbf{LEI}} (\forall x\ \alpha)! \leftrightarrow \forall x\ (\alpha!)$.

Prova: basta usar o postulado **?-7**, bem como os teoremas 2.3 e 2.5.

Teorema 2.7: O cálculo **LEI** é superforte.

Prova:

Para verificar que **LEI** é estável, basta notar o seguinte:

- se $\boldsymbol{x}$ não é livre em α, então $\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \forall \boldsymbol{x}\ \alpha$, segundo a primeira proposição do lema 3.2.16;
- se ? não é livre em α, então $\alpha \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \alpha!$, conforme a segunda proposição do teorema **2.5**;
- $\forall \boldsymbol{x}\ \alpha, \forall \boldsymbol{x}\ (\alpha \to \beta) \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \forall \boldsymbol{x}\ \beta$, conforme a segunda proposição do lema 3.2.16;
- $\alpha!, (\alpha \to \beta)! \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \beta!$, conforme a segunda proposição do corolário 2.4;
- $\forall \boldsymbol{y}\ \alpha \Vdash^{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{LEI}} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{x}\ \alpha$, conforme o lema 3.2.18;
- $\alpha! \Vdash^{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{LEI}} (\forall \boldsymbol{x}\ \alpha)!$, conforme o lema 2.6;
- $\forall \boldsymbol{x}\ \alpha \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \forall \boldsymbol{x}\ (\alpha!)$, conforme o lema 2.6;
- $\alpha! \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha!!$, conforme o postulado **?-10**.

Para verificar que **LEI** é forte, basta notar o seguinte:

- $\vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha \to \alpha$, conforme a primeira proposição do lema 3.2.14;
- $\beta \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \alpha \to \beta$, conforme a segunda proposição do lema 3.2.14;
- $\alpha \to \beta, \alpha \to (\beta \to \gamma) \Vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \alpha \to \gamma$, conforme a terceira proposição do lema 3.2.14;
- se $\boldsymbol{x}$ não é livre em α, então $\alpha \to \beta \Vdash^{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{LEI}} \alpha \to \forall \boldsymbol{x}\ \beta$, conforme a terceira proposição do lema 3.2.16;
- se ? não é livre em α, então $\alpha \to \beta \Vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha \to \beta!$, conforme a quinta proposição do teorema 2.3 e a segunda proposição do teorema **2.5**.

●

Teorema 2.8: As seguintes proposições expressam as regras de introdução e eliminação em **LEI** para os conectivos "?" e "!":

- $\alpha \vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \alpha?$;
- $\alpha?, \alpha \rightarrow \beta \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \beta$, onde ? não é livre em β;
- $\alpha \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha!$;
- $\alpha! \vdash^{\varnothing}_{\mathbf{LEI}} \alpha$.

Teorema 2.9: As seguintes proposições expressam o comportamento em **LEI** dos conectivos "¬" e "~" com respeito aos conectivos "?" e "!":

- $\vdash_{\mathbf{LEI}} \neg(\alpha?) \Leftrightarrow (\neg\alpha)?$; $\vdash_{\mathbf{LEI}} \neg(\alpha!) \leftrightarrow (\sim\alpha)?$;
- $\vdash_{\mathbf{LEI}} \sim(\alpha?) \Leftrightarrow (\sim\alpha)!$; $\vdash_{\mathbf{LEI}} \sim(\alpha!) \leftrightarrow (\sim\alpha)?$.

Teorema 2.10: Se $o_1,\ldots,o_n$ são os objetos variantes em **LEI**[1] tais que γ está nos seus escopos em α, e $o_1,\ldots,o_n$ são livres em β ou em β', então $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathbf{LEI}} \alpha(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \alpha(\gamma|\beta')$.

Prova: é análoga à prova do teorema 3.3.14, levando em conta a quarta proposição do teorema 2.3.

Escólio 2.11: As seguintes proposições justificam por que não foram acrescidos a **LEI** alguns postulados adicionais, ou mesmo fortalecidos postulados já existentes:

- a regra $\alpha?, (\alpha \rightarrow \beta)? / \beta?$ acarreta em **LEI** a regra $\alpha?, (\sim\alpha)? / \beta?$;
- a regra $\mathbf{A}?, (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})? / \mathbf{B}?$ acarreta em **LEI** a regra $\mathbf{A}?, (\neg\mathbf{A})? / \mathbf{B}?$;
- a regra $\alpha?, \beta? / (\alpha \wedge \beta)?$ acarreta em **LEI** a regra $\alpha?, (\sim\alpha)? / \beta?$;
- a regra $\mathbf{A}?, \mathbf{B}? / (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})?$ acarreta em **LEI** a regra $\mathbf{A}?, (\neg\mathbf{A})? / \mathbf{B}?$;
- o esquema $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$ acarreta em **LEI** o esquema $\alpha? \rightarrow \alpha$;
- o esquema $\alpha \rightarrow \sim(\sim\alpha)?$ acarreta em **LEI** o esquema $\alpha? \rightarrow \alpha$;
- o esquema $\mathbf{A} \rightarrow \sim(\neg\mathbf{A})?$ acarreta em **LEI** o esquema $\mathbf{A}? \rightarrow \mathbf{A}$.

[1] Lembramos que os objetos variantes em **LEI** são variáveis ou o conectivo "?".

Escólio 2.12: Todos os esquemas e regras clássicas valem em **LEI** para fórmulas que não possuem "?".

Teorema 2.13: Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \alpha$.

Teorema 2.14: Todos os esquemas expressos nos teoremas 3.3.16 e 3.3.18 são válidos em **LEI** e, além disso, valem em **LEI** os seguintes esquemas e regras:

- $\alpha \vee \neg\alpha$;
- $\neg\mathbf{A} \Leftrightarrow {\sim}\mathbf{A}$;
- $(\neg\mathbf{A})? \Leftrightarrow ({\sim}\mathbf{A})?$;
- $(\neg\alpha)? \Leftrightarrow \neg(\alpha?)$;
- ${\sim}(\alpha?) \Rightarrow ({\sim}\alpha)?$;
- $(\alpha? \rightarrow \beta?) \Rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)?$;
- $(\alpha \rightarrow \beta?) \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} (\alpha \rightarrow \beta)?$;
- $\alpha \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} (\alpha \rightarrow \beta)? \Rightarrow \beta?$;

$\alpha \rightarrow \beta \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \alpha? \Rightarrow \beta?$;

$(\alpha \wedge \beta)? \Rightarrow \alpha? \wedge \beta?$;

$\alpha \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} \beta? \rightarrow (\alpha \wedge \beta)?$;

$(\alpha \vee \beta)? \leftrightarrow \alpha? \vee \beta?$;

$(\forall \boldsymbol{x}\ \alpha)? \Rightarrow \forall \boldsymbol{x}\ (\alpha?)$;

$(\exists \boldsymbol{x}\ \alpha)? \leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\ (\alpha?)$;

$\mathbf{A} \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} (\neg\mathbf{A})? \Rightarrow \beta$;

$\alpha \vdash^{?}_{\mathbf{LEI}} ({\sim}\alpha)? \Rightarrow \beta$.

Teorema 2.15: Todos os esquemas expressos no teorema 3.3.19 não são válidos em **LEI** e, além disso, não valem em **LEI** os seguintes esquemas e regras:

- $\mathbf{A}?, (\neg\mathbf{A})? \,/\, \mathbf{B}?$;
- $\alpha?, ({\sim}\alpha)? \,/\, \beta?$;
- $\alpha? \,/\, \alpha$;
- $({\sim}\alpha)? \,/\, {\sim}(\alpha?)$;
- $\alpha?, (\alpha \rightarrow \beta)? \,/\, \beta?$;
- $\alpha? \,/\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta?$;

$(\alpha \rightarrow \beta)? \,/\, \alpha \rightarrow \beta?$;

$\alpha?, \beta? \,/\, (\alpha \wedge \beta)?$;

$\beta? \,/\, \alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)?$;

$\forall \boldsymbol{x}\ (\alpha?) \,/\, (\forall \boldsymbol{x}\ \alpha)?$;

$\mathbf{A}? \,/\, \neg\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$;

$\alpha? \,/\, {\sim}\alpha \rightarrow \beta$.

§3. A Completude do Cálculo LEI

Mostramos aqui que o cálculo **LEI** é completo com respeito à semântica de **LEI**.

Em toda esta seção, $L'_?$ é uma linguagem quantificacional bissortida simples cujas espécies são **u** (a única espécie de $L_?$) e **v**, cujos conectivos são "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", e cujos quantificadores são "$\forall_u$", "$\exists_u$" e "$\exists_v$"[1]. Notamos as variáveis de $L'_?$ de espécie **u** pelas letras usuais que denotam variáveis[2], e as variáveis de $L'_?$ de espécie **v** por v, seguido ou não de plicas ou índices.

<u>Definição 3.1</u>: $L'_?$ é uma linguagem para **LEI'**. Uma **LEI'**-estrutura para $L'_?$ é uma estrutura simples para $L'_?$. Uma **LEI'**-interpretação para $L'_?$ é uma interpretação simples para $L'_?$. **V** é uma **LEI'**-valoração para $L'_?$ se **V** é uma função de $L'_?$ em {0,1} e existe uma estrutura simples U para $L'_?$ e duas **LEI'**-correspondências semânticas **max** e **min** para $L'_?$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- **V** é a valoração gerada por U e **max**;
- $\mathcal{I}_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \mathcal{I}_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \mathcal{I}^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$, para qualquer interpretação simples $\mathcal{I}$ para $L'_?$;
- $\mathcal{I}_{\mathbf{max}}(\exists v\ \alpha) = 1$ sss existe $\mathbf{d} \in |U|_{\mathbf{v}}$ tal que $\mathcal{I}(x|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- $\mathcal{I}_{\mathbf{min}}(\exists v\ \alpha) = 1$ sss para todo $\mathbf{d} \in |U|_{\mathbf{v}}$, $\mathcal{I}(x|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- **max** e **min** são bem comportados quantificacionalmente para a espécie **u**;
- **max** é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente com respeito a **min**.

---

[1] Como toda espécie de $L'_?$ é própria, podemos notar "$\forall_u$", "$\exists_u$" e "$\exists_v$" por "$\forall$" ou "$\exists$".

[2] x,y,z seguidos ou não de plicas ou índices.

<u>Definição 3.2</u>: Especificamos em **LEI'**, com respeito a $\mathsf{L}'_?$, o conectivo "$\sim$" e o quantificador "$\forall_{\mathbf{v}}$":

- $\sim\alpha \rightleftharpoons \alpha \to \mathbf{P} \wedge \neg\mathbf{P}$, onde **P** é uma fórmula atômica em $\mathsf{L}'_?$ escolhida arbitrariamente;
- $\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha \rightleftharpoons \sim(\exists_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v} \sim\alpha)$.

<u>Escólio 3.3</u>: A **LEI'** correspondência semântica **max** para $\mathsf{L}'_?$, tal como definida em 3.1, é bem comportada quantificacionalmente.

<u>Definição 3.4</u>: Deste ponto em diante, em toda esta seção, $\mathsf{L}'_?$ é uma linguagem para **LEI'** preenchendo as seguintes condições:

- toda constante em $\mathsf{L}_?$ é uma constante em $\mathsf{L}'_?$ de mesma espécie;
- todo sinal funcional em $\mathsf{L}_?$ é um sinal funcional em $\mathsf{L}'_?$ de mesma espécie;
- todo sinal predicativo em $\mathsf{L}_?$, de aridade **n**, é um sinal predicativo em $\mathsf{L}'_?$ de espécie $\langle \mathbf{u},\ldots,\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$, e de aridade $\mathbf{n}+1$;
- não há em $\mathsf{L}'_?$ outras constantes, sinais funcionais e sinais predicativos, além dos citados nas condições anteriores.

<u>Definição 3.5</u>: Em toda esta seção, consideramos **f** uma função de $\mathsf{L}_?$ em $\mathsf{L}'_?$, especificada pelas seguintes condições:

- $\mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_\mathbf{n})) = \mathbf{p}(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_\mathbf{n},\boldsymbol{v})$;
- $\mathbf{f}(\alpha?) = \exists\boldsymbol{v}\ \mathbf{f}(\alpha)$;
- $\mathbf{f}(\neg\alpha) = \neg\mathbf{f}(\alpha)$;
- $\mathbf{f}(\alpha \# \beta) = \mathbf{f}(\alpha) \# \mathbf{f}(\beta)$, onde $\# \in \{\to,\wedge,\vee\}$;
- $\mathbf{f}(\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \alpha) = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \mathbf{f}(\alpha)$, onde $\mathbf{Q} \in \{\forall,\exists\}$.

<u>Definição 3.6</u>: Se $\mathbf{U}$ é uma estrutura simples para $\mathsf{L}'_?$, então, para cada $\mathbf{d} \in |\mathbf{U}|_\mathbf{v}$, definimos uma estrutura simples $\mathbf{U}_\mathbf{d}$ para $\mathsf{L}_?$ pelas seguintes condições:

- $|\mathbf{U}_\mathbf{d}| = |\mathbf{U}|_\mathbf{u}$;
- se **s** é uma constante ou um sinal funcional em $\mathsf{L}_?$, então $\mathbf{U}_\mathbf{d}(\mathbf{s}) = \mathbf{U}(\mathbf{s})$;

- se **p** é um sinal predicativo em $\mathsf{L}_?$, de aridade **n**, e $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n \in |\mathrm{U}|_{\mathbf{u}}$, então $\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle \in \mathrm{U}_{\mathbf{d}}(\mathbf{p})$ sss $\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n,\mathbf{d}\rangle \in \mathrm{U}(\mathbf{p})$.

Dada uma estrutura simples U para $\mathsf{L}'_?$, Υ_{U} denota a coleção $\{\mathrm{U}_{\mathbf{d}} \,/\, \mathbf{d} \in |\mathrm{U}|_{\mathbf{v}}\}$[1].

<u>Lema 3.7</u>: Sejam $\mathtt{I} = \langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ uma estrutura simples para $\mathsf{L}'_?$, **s'** a restrição de **s** à coleção de variáveis em $\mathsf{L}_?$, $\mathtt{I}' = \langle \Upsilon_{\mathrm{U}},\mathrm{U}_{\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})},\mathbf{s}'\rangle$[2], **max** e **min** tal como definidos em 1.1 ou 3.1, dependendo do contexto, **V** a **LEI'**-valoração gerada para $\mathsf{L}'_?$ gerada por U, e **V'** a **LEI**-valoração para $\mathsf{L}_?$ gerada por Υ_{U}. Então as seguintes asserções se realizam:

- $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle(\mathtt{t}) = \langle \mathrm{U}_{\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})},\mathbf{s}'\rangle(\mathtt{t})$;
- $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle(\mathbf{f}(\mathbf{P})) = \langle \mathrm{U}_{\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})},\mathbf{s}'\rangle(\mathbf{P})$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{max}}(\mathbf{f}(\alpha)) = \mathtt{I}'_{\mathbf{max}}(\alpha)$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{min}}(\mathbf{f}(\alpha)) = \mathtt{I}'_{\mathbf{min}}(\alpha)$;
- $\mathbf{V}(\mathbf{f}(\alpha)) = \mathbf{V}'(\alpha)$.

<u>Lema 3.8</u>: Se $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \alpha$, então $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle \models_{\mathbf{LEI'}} \mathbf{f}(\alpha)$.

Prova: basta usar a última proposição do lema 3.7.

<u>Definição 3.9</u>: O cálculo **LEI'** possui como postulados os proposicionais básicos, os proposicionais da negação, os quantificacionais básicos e da negação para a espécie **u**, os existenciais básicos para a espécie **v**, **Gen**, mais os seguintes postulados específicos:

($\exists\boldsymbol{\nu}$**-1**) $(\alpha \to \mathbf{B}) \to (\alpha \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\alpha$, onde "$\exists\boldsymbol{\nu}$" não ocorre em **B**;

($\exists\boldsymbol{\nu}$**-2**) $\exists\boldsymbol{\nu}\, \neg\alpha \leftrightarrow \neg\exists\boldsymbol{\nu}\, \alpha$.

<u>Lema 3.10</u>: "~" funciona em **LEI'** como a negação clássica.

Prova: basta aplicar o teorema 3.2.34 e o postulado $\exists\boldsymbol{\nu}$**-1**.

---

[1] Esta coleção é uma estrutura múltipla para $\mathsf{L}_?$.

[2] $\mathtt{I}'$ é uma estrutura híbrida para $\mathsf{L}_?$.

Lema 3.11: **LEI'** é um cálculo superforte.

Prova: basta aplicar o escólio 3.2.33 e o teorema 3.2.19.

Lema 3.12: **LEI'** é um cálculo abrangente.

Prova: basta usar os lemas 3.10 e 3.11, bem como o escólio 3.2.47.

Lema 3.13: Seja **V** uma função de $\mathsf{L}'_?$[1] em $\{0,1\}$. Então **V** é uma **LEI'**-valoração completa para $\mathsf{L}'_?$ se, e somente se, as seguintes proposições forem satisfeitas:

- $\mathbf{V}(\neg\mathbf{A}) = 1$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = 0$, onde **A** é uma fórmula fechada em **LEI'** e "$\exists \boldsymbol{v}$" não ocorre em **A**;
- **V** é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente de modo restrito;
- **V** é regular;
- **V** é bem comportada quantificacionalmente;
- **V** é uma função de Henkin;
- $\mathbf{V}(\neg\exists \boldsymbol{v}\ \alpha) = \mathbf{V}(\exists \boldsymbol{v}\ \neg\alpha)$, onde α no máximo $\boldsymbol{v}$ é livre em α.

Prova: análoga à prova do lema 2.4.25.

Lema 3.14: A função característica de todo conjunto de Henkin saturado em alguma linguagem para **LEI'** é uma **LEI'**-valoração para esta linguagem.

Prova: basta usar o lema 3.13.

Lema 3.15: Se $\Gamma \models_{\mathbf{LEI'}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LEI'}} \alpha$.

Prova: basta aplicar o lema 3.12, a última proposição do lema 2.3.7, e o lema 3.14.

Lema 3.16: Se $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle \vdash_{\mathbf{LEI'}} \mathbf{f}(\alpha)$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha$.

Prova:

Suponhamos que $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle \vdash_{\mathbf{LEI'}} \mathbf{f}(\alpha)$, e seja $\mathcal{D}$ uma **LEI'**-demonstração de $\mathbf{f}(\alpha)$ a partir de $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle$ em $\mathsf{L}'_?$. Se $\mathcal{D}'$ é obtido de $\mathcal{D}$ substituindo todas as variáveis de espécie **v** por $\boldsymbol{v}$, é fácil verificar que $\mathcal{D}'$ ainda é uma **LEI'**-demonstração de $\mathbf{f}(\alpha)$ a partir de $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle$ em $\mathsf{L}'_?$, na qual todas as suas fórmulas estão em $\mathbf{f}\langle\mathsf{L}_?\rangle$. Se $\mathcal{D}''$ é a seqüência de fórmulas obtidas aplicando $\mathbf{f}^{-1}$ às fórmulas de $\mathcal{D}'$, podemos observar que cada fórmula β em $\mathcal{D}''$ satisfaz a uma das seguintes condições:

* $\beta \in \Gamma$;
* β é tese de **LEI**;

[1] Neste caso, consideramos $\mathsf{L}'_?$ uma linguagem arbitrária para **LEI'**.

∗ β é obtida de uma ou mais fórmulas precedentes em $\mathcal{D}''$ pela aplicação de uma regra de **LEI**.

Daí, pelo que acabamos de notar, para cada fórmula β em $\mathcal{D}''$, $\Gamma \vdash_{\mathbf{LEI}} \beta$, e portanto, em particular, $\Gamma \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha$.

●

<u>Teorema 3.17</u>: Se $\Gamma \models_{\mathbf{LEI}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha$.

Prova: basta aplicar os lemas 3.8, 3.15 e 3.16.

§4. Uma Extensão Não Monotônica para LEI

Apresentamos nesta seção a lógica **IDL** (do inglês "*Inconsistent Default Logic*"), e mostramos a sua relativa superioridade sobre a lógica de defaults de Reiter (a qual denominamos aqui **RDL**).

<u>Definição 4.1</u>: Um *default (em $\mathcal{L}^*$)* é uma expressão da forma $\frac{\alpha\ :\ \beta}{\gamma}$, onde α,β,γ são fórmulas de $\mathcal{L}^*$. Uma **RDL**-*base (em $\mathcal{L}^*$)* é um par $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D} \rangle$, onde **W** é uma coleção de sentenças em $\mathcal{L}^*$ e **D** é uma coleção de defaults em $\mathcal{L}^*$. Um *exemplar de* $\frac{\alpha\ :\ \beta}{\gamma}$ *(em $\mathcal{L}^*$)* é uma expressão da forma $\frac{\alpha'\ :\ \beta'}{\gamma'}$, onde α',β',γ' são respectivamente instâncias fechadas consistentes de α,β,γ (em $\mathcal{L}^*$). Dada uma **RDL**-base $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D} \rangle$ em $\mathcal{L}^*$, e uma coleção **S** de sentenças em $\mathcal{L}^*$, considere $\tau_\Delta(\mathbf{S})$ o menor subconjunto de $\mathcal{L}^*$ satisfazendo as seguintes condições:

- $\mathbf{W} \subseteq \tau_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\tau_\Delta(\mathbf{S}) \vdash_{\mathbf{CL}} \alpha$ e α é uma sentença em $\mathcal{L}^*$, então $\alpha \in \tau_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\frac{\alpha\ :\ \beta}{\gamma}$ é um exemplar em $\mathcal{L}^*$ de um default de **D**, $\alpha \in \tau_\Delta(\mathbf{S})$ e $\neg\beta \notin \mathbf{S}$, então $\gamma \in \tau_\Delta(\mathbf{S})$.

Se $\tau_\Delta(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$, dizemos que **S** é uma **RDL**-*extensão de* Δ *(em $\mathcal{L}^*$)*. Se existe uma **RDL**-extensão **S** de Δ (em $\mathcal{L}^*$) tal que $\alpha \in \mathbf{S}$, notamos isto por $\Delta \vdash_{\mathbf{RDL}} \alpha$[1].

---

[1] **RDL** não é uma lógica no sentido estrito que definimos no capítulo 1, já que Δ não é uma coleção de fórmulas em **RDL**; o mesmo acontece com as outras extensões não monotônicas especificadas neste trabalho.

Exemplo 4.2: Considere as seguintes proposições:

- Quakers em geral são pacifistas;
- Nixon é Quaker;
- Republicanos em geral não são pacifistas;
- Nixon é republicano.
- Na linguagem de defaults, podemos escrever:
- $\dfrac{\text{Quaker}(\boldsymbol{x}) \ : \ \text{pacifista}(\boldsymbol{x})}{\text{pacifista}(\boldsymbol{x})}$;
- Quaker(Nixon);
- $\dfrac{\text{republicano}(\boldsymbol{x}) \ : \ \neg\text{pacifista}(\boldsymbol{x})}{\neg\text{pacifista}(\boldsymbol{x})}$;
- republicano(Nixon).

Se Δ é a **RDL**-base correspondente, temos que $\Delta \vdash_{\mathbf{RDL}}$ pacifista(Nixon) e $\Delta \vdash_{\mathbf{RDL}} \neg$pacifista(Nixon).

Exemplo 4.3: De [Morris,1988], pg. 387, temos as seguintes proposições:

- Animais em geral não voam;
- Animais alados são uma exceção a esta regra; eles podem voar;
- Pássaros são animais;
- Pássaros normalmente têm asas;
- Tweety é um pássaro.

Usando defaults, estas asserções podem ser axiomatizadas como abaixo:

- $\dfrac{\text{animal}(\boldsymbol{x}) \ : \ \neg\text{voa}(\boldsymbol{x}) \wedge \neg\text{alado}(\boldsymbol{x})}{\neg\text{voa}(\boldsymbol{x})}$;
- $\forall \boldsymbol{x}$ (alado($\boldsymbol{x}$) $\rightarrow$ voa($\boldsymbol{x}$));
- $\forall \boldsymbol{x}$ (pássaro($\boldsymbol{x}$) $\rightarrow$ animal($\boldsymbol{x}$));
- $\dfrac{\text{pássaro}(\boldsymbol{x}) \ : \ \text{alado}(\boldsymbol{x})}{\text{alado}(\boldsymbol{x})}$;
- pássaro(Tweety).

Se Δ é formada como acima, temos que $\Delta \vdash_{\mathbf{RDL}}$ voa(Tweety) e $\Delta \vdash_{\mathbf{RDL}} \neg$voa(Tweety), o que não corresponde à nossa intuição, pois deveríamos concluir apenas que $\Delta \vdash_{\mathbf{RDL}}$ voa(Tweety). As extensões que contém uma ou mais fórmulas que contrariam a intuição são ditas *anômalas*.

<u>Definição 4.4</u>: Um **IDL**-*default (em* $\mathsf{L}_?$*)* é uma expressão de uma das formas $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta?}$ ou $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta?}$, onde α,β,γ são fórmulas de $\mathsf{L}_?$. Uma **IDL**-*base (em* $\mathsf{L}_?$*)* é um par $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D}\rangle$, onde **W** é uma coleção de sentenças em $\mathsf{L}_?$ e **D** é uma coleção de **IDL**-defaults em $\mathsf{L}_?$. Um *exemplar de* $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta?}$ ou *de* $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta?}$ *(em* $\mathsf{L}_?$*)* é respectivamente uma expressão $\dfrac{\alpha'\ :\ \beta'}{\beta'?}$ ou $\dfrac{\alpha'\ :\ \beta'\ ;\ \gamma'}{\beta'?}$, onde α',β',γ' são respectivamente instâncias fechadas consistentes de α,β,γ (em $\mathsf{L}_?$). Dada uma **IDL**-base (em $\mathsf{L}_?$) $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D}\rangle$, e uma coleção **S** de sentenças em $\mathsf{L}_?$, considere $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$ o menor subconjunto de $\mathsf{L}_?$ satisfazendo as seguintes condições:

- $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S}) \vdash_{\mathbf{LEI}} \alpha$ e α é uma sentença em $\mathsf{L}_?$, então $\alpha \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta?}$ é um exemplar em $\mathsf{L}_?$ de um default de **D**, $\alpha \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$ e $\mathbf{W} \cup \{\beta\}$ não é trivial em **LEI**, então $\beta? \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta?}$ é um exemplar em $\mathsf{L}_?$ de um default de **D**, $\alpha \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$, $\mathbf{W} \cup \{\beta\}$ não é trivial em **LEI**, e $\neg(\gamma?) \notin \mathbf{S}$, então $\beta? \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$.

Se $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$, dizemos que **S** é uma **IDL**-*extensão de* Δ *(em* $\mathsf{L}_?$*)*. Se existe uma **IDL**-extensão **S** de Δ (em $\mathsf{L}_?$) tal que $\alpha \in \mathbf{S}$, notamos isto por $\Delta \vdash_{\mathbf{IDL}} \alpha$.

<u>Escólio 4.5</u>: Podemos expressar em **IDL** o exemplo 4.2 da seguinte forma:

- $\dfrac{\text{Quaker}(\boldsymbol{x})\ :\ \text{pacifista}(\boldsymbol{x})}{\text{pacifista}(\boldsymbol{x})?}$;
- Quaker(Nixon);
- $\dfrac{\text{republicano}(\boldsymbol{x})\ :\ \neg\text{pacifista}(\boldsymbol{x})}{(\neg\text{pacifista}(\boldsymbol{x}))?}$;
- republicano(Nixon).

Neste caso há uma única **IDL**-extensão de Δ, e $\Delta \vdash_{\mathbf{IDL}}$ pacifista(Nixon)? $\wedge$ (¬pacifista(Nixon))?.

<u>Escólio 4.6</u>: O exemplo 4.3 é expresso em **IDL** da seguinte forma:

- $\dfrac{\text{animal}(\boldsymbol{x}) \ : \ \neg\text{voa}(\boldsymbol{x}) \ ; \ \neg\text{alado}(\boldsymbol{x})}{(\neg\text{voa}(\boldsymbol{x}))?}$;
- $\forall \boldsymbol{x}$ (alado($\boldsymbol{x}$) $\rightarrow$ voa($\boldsymbol{x}$));
- $\forall \boldsymbol{x}$ (pássaro($\boldsymbol{x}$) $\rightarrow$ animal($\boldsymbol{x}$));
- $\dfrac{\text{pássaro}(\boldsymbol{x}) \ : \ \text{alado}(\boldsymbol{x})}{\text{alado}(\boldsymbol{x})?}$;
- pássaro(Tweety).

Aqui há também uma única **IDL**-extensão de Δ, e $\Delta \mid\!\!\sim_{\mathbf{IDL}}$ voa(Tweety)?, mas não se tem $\Delta \mid\!\!\sim_{\mathbf{IDL}}$ ($\neg$voa(Tweety))?, o que se adéqua à nossa intuição.

Em [Pequeno,1990], pg. 14, é dada uma solução satisfatória para o *Yale shooting problem*, o qual foi expresso em **IDL**, na qual a base obtida não gera nenhuma extensão anômala.

5. A LÓGICA DO RACIOCÍNIO CÉTICO

Apresentamos neste capítulo uma semântica, uma axiomática e uma extensão não monotônica para a lógica **LSR**.

A lógica **LSR** (esta sigla é oriunda do inglês "*Logic for Skeptical Reasoning*") é paracompleta e se destina a dar suporte a formas de raciocínio combinando certeza e plausibilidade cética. É uma lógica dual a **LEI**. Possui uma extensão não monotônica que é também dual a **IDL**.

Em todo este capítulo, $L_!$ é uma linguagem quantificacional monossortida, possuindo como únicos conectivos "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$", e "!", e como únicos quantificadores "$\forall$" e "$\exists$". O conectivo "!" é unário e forma fórmulas em $L_!$ pela notação pós-fixada.

A menos que seja dito explicitamente o contrário, em todo este capítulo, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ são fórmulas de $L_!$, **P** é uma fórmula atômica de $L_!$, Γ é uma coleção de fórmulas de $L_!$, $\mathtt{t}$ é um termo em $L_!$, L^* é a coleção de fórmulas de $L_!$ não possuindo o conectivo "!", e **A**,**B**,**C** são fórmulas de L^*.

§1. Uma Semântica para LSR

<u>Definição 1.1</u>: $L_!$ é uma linguagem para **LSR**. Uma **LSR**-estrutura para $L_!$ é uma estrutura bimúltipla para $L_!$. Uma **LSR**-interpretação para $L_!$ é uma interpretação bi-híbrida para $L_!$. **V** é uma **LSR**-valoração para $L_!$ se **V** é uma função de $L_!$ em $\{0,1\}$ e existe uma estrutura bimúltipla H para $L_!$ e duas **LSR**-correspondências semânticas **min** e **max** para $L_!$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- **V** é a valoração gerada por H e **min**;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Theta_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \Theta^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$, para qualquer interpretação híbrida Θ para $L_!$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha!) = 1$ sss para toda interpretação Θ' especial e semelhante a Θ, $\Theta'_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha!) = 1$ sss existe uma interpretação Θ' especial e semelhante a Θ tal que $\Theta'_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- **min** é $\neg$-heterodoxa com respeito a **max**.

Dizemos também que H gera **V** em **LSR**.

<u>Teorema 1.2</u>: **V** é uma **LSR**-valoração para $\mathbf{L_!}$ se, e somente se, **V** é uma função de $\mathbf{L_!}$ em $\{0,1\}$ e existe uma estrutura bimúltipla H para $\mathbf{L_!}$ e duas **LSR**-correspondências semânticas **min** e **max**[1] para $\mathbf{L_!}$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas, para qualquer interpretação bi-híbrida $\Theta = \langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ sobre H para $\mathbf{L_!}$:

- **V** é a valoração gerada por H e **min**;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \Theta_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha!) = 1$ sss para todo $\mathrm{U'} \in \mathrm{Y'}$, $\langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U'},\mathbf{s}\rangle_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha!) = 1$ sss existe $\mathrm{U'} \in \mathrm{Y'}$ tal que $\langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U'},\mathbf{s}\rangle_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha) = 0$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\neg\alpha) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 0$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 0$ ou $\Theta_{\mathbf{min}}(\beta) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 0$ ou $\Theta_{\mathbf{max}}(\beta) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$ e $\Theta_{\mathbf{max}}(\beta) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha \wedge \beta) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$ e $\Theta_{\mathbf{min}}(\beta) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$ ou $\Theta_{\mathbf{max}}(\beta) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha \vee \beta) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$ ou $\Theta_{\mathbf{min}}(\beta) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\forall \boldsymbol{x}\, \alpha) = 1$ sss $\Theta(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$, para todo $\mathbf{d} \in |\Theta|$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\forall \boldsymbol{x}\, \alpha) = 1$ sss $\Theta(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$, para todo $\mathbf{d} \in |\Theta|$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\exists \boldsymbol{x}\, \alpha) = 1$ sss $\Theta(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$, para algum $\mathbf{d} \in |\Theta|$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\exists \boldsymbol{x}\, \alpha) = 1$ sss $\Theta(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$, para algum $\mathbf{d} \in |\Theta|$.

<u>Lema 1.3</u>: Se $\Theta = \langle \mathrm{Y},\mathrm{Y'},\mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ é uma interpretação bi-híbrida para $\mathbf{L_!}$, e **min** e **max** são as **LSR**-correspondências semânticas especificadas na definição 1.1, então
$\Theta_{\mathbf{min}}(\mathbf{A}) = \Theta_{\mathbf{max}}(\mathbf{A}) = \langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle_{\mathbf{f}}(\mathbf{A})$.

---

[1] **min** e **max** são as mesmas funções especificadas na definição 1.1.

<u>Definição 1.4</u>: Especificamos em **LSR** os conectivos definidos "~" e "?":

- $\sim\alpha \rightleftharpoons \alpha \to \neg\alpha$; $\alpha? \rightleftharpoons \sim((\sim\alpha)!)$.[1]

<u>Escólio 1.5</u>: Os conectivos "~" e "?" satisfazem as seguintes proposições, para cada interpretação bi-híbrida Θ para $\mathsf{L}_!$.

- $\Theta_{\mathbf{min}}(\sim\alpha) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 0$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\sim\alpha) = 1$ sss $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha) = 0$;
- $\Theta_{\mathbf{min}}(\alpha?) = 1$ sss para toda interpretação Θ' especial e semelhante a Θ, $\Theta'_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\Theta_{\mathbf{max}}(\alpha?) = 1$ sss existe uma interpretação Θ' especial e semelhante a Θ tal que $\Theta'_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$.

<u>Definição 1.6</u>: Uma fórmula em **LSR** é dita *normal* se ela for de uma das formas **A** ou **A**!. Uma coleção Γ de fórmulas em **LSR** é dita *normal (em* **LSR***)* se as seguintes cláusulas forem satisfeitas:

- Γ é satisfatível em **LSR**;
- toda fórmula de Γ é normal.

<u>Lema 1.7</u>: Se $\mathbf{H_0} = \langle \mathbf{Y_0}, \mathbf{Y_0'} \rangle$ e $\mathbf{H_1} = \langle \mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_1'} \rangle$ são estruturas bimúltiplas para $\mathsf{L}_?$ gerando respectivamente **V** e **V'** em **LSR**, então valem as seguintes proposições:

- $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = 1$ sss para todo $\mathbf{U} \in \mathbf{Y_0}$, a valoração gerada por **U** em **CL** satisfaz **A**;
- $\mathbf{V}(\mathbf{A}!) = 1$ sss para todo $\mathbf{U} \in \mathbf{Y_0'}$, a valoração gerada por **U** em **CL** satisfaz **A**;
- se $\mathbf{Y_0} \subseteq \mathbf{Y_1}$, então **V'** satisfaz **A** implica que **V** satisfaz **A**;
- se $\mathbf{Y_0'} \subseteq \mathbf{Y_1'}$, então **V'** satisfaz **A**! implica que **V** satisfaz **A**!.

<u>Teorema 1.8</u>: Se Γ é uma coleção normal em **LSR**, e Γ é a coleção de fórmulas de Γ não possuindo "!", então $\Gamma \models_{\mathbf{LSR}} \mathbf{A}$ sss $\Gamma \models_{\mathbf{CL}} \mathbf{A}$.

[1] O sinal "**?**" não funciona de modo idêntico em **LEI** e **LSR**; o mesmo acontece com o sinal "**!**".

§2. Uma Axiomática para LSR

Definimos nesta seção o cálculo **LSR**, e estudamos algumas de suas propriedades básicas.

Na elaboração de uma axiomática para **LSR**, seguimos as diretrizes gerais estabelecidas na página 3 deste trabalho, mais as seguintes diretrizes específicas:

1ª) o conectivo "¬" deve portar-se da forma clássica para fórmulas em **LSR** não possuindo "!";

2ª) o conectivo "¬" deve atuar de forma paracompleta para fórmulas em **LSR** da forma $\alpha!$;

3ª) o conectivo "¬" pode atuar da forma clássica desde que o princípio anterior não seja violado;

4ª) refletindo a intuição de que todo conhecimento irrefutável é em particular plausível, devemos ter $\frac{\alpha}{\alpha!}$ como regra de **LSR**;

5ª) conforme a intuição de que todo conhecimento plausível não deve negar um conhecimento irrefutável já estabelecido, $\{\mathbf{A},(\neg\mathbf{A})!\}$ deve ser trivial em **LSR**;

6ª) como a plausibilidade não acarreta a irrefutabilidade, não devemos ter em geral que $\alpha! \vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha$;

7ª) não devemos ter em geral que $\mathbf{A}! \vee (\neg\mathbf{A})!$ seja uma tese de **LSR**;

8ª) o conectivo "!" deve fatorar e distribuir com respeito aos demais conectivos e quantificadores sempre que os três princípios anteriores não sejam violados;

9ª) o princípio de substituição deve aplicar-se para a equivalência forte;

10ª) se α é uma fórmula de **LSR** na qual todos os seus sinais estão sob o escopo de alguma ocorrência de "!", então "$\alpha \Leftrightarrow \alpha!$" deve ser uma tese de **LSR**;

11ª) **LSR** deve ser superforte.

Definição 2.1: O cálculo **LSR** possui como postulados todos os proposicionais e quantificacionais básicos, os proposicionais e quantificacionais da negação, mais os seguintes postulados específicos:

(**nc**) $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$;

(**!-1**) $(\mathbf{A} \to \beta) \to (\mathbf{A} \to \neg\beta) \to \neg\mathbf{A}$;

(**!-2**) $\alpha! \to \alpha!!$;

(**!-3**) $(\alpha \to \beta)! \to (\alpha! \to \beta!)$;

(**!-4**) $(\alpha! \to \beta!) \to (\alpha! \to \beta!)!$;

(**!-5**) $(\alpha! \vee \beta!)! \to \alpha! \vee \beta!$;

(**!-6**) $(\neg\alpha)! \leftrightarrow \neg(\alpha!)$;

(**!-7**) $\forall \boldsymbol{x}\, (\alpha!) \to (\forall \boldsymbol{x}\, \alpha)!$;

(**!-8**) $(\exists \boldsymbol{x}\, (\alpha!))! \to \exists \boldsymbol{x}\, (\alpha!)$;

(**!-9**) $(\alpha! \to \alpha)!$;

(**!-10**) $\dfrac{\alpha}{\alpha!}$.

Toda aplicação da regra **!-10** possui ! como o único objeto variante. α é dita !-*fechada* se α é de uma das formas $\beta!$, $\neg\gamma$, $\gamma \to \delta$, $\gamma \wedge \delta$, $\gamma \vee \delta$, $\forall \boldsymbol{x}\, \gamma$ ou $\exists \boldsymbol{x}\, \gamma$, onde γ e δ são !-fechadas. β *está no escopo de* ! *em* α se existe uma subfórmula de α da forma $\gamma!$ tal que β ocorre em γ.

Teorema 2.2: "~" funciona globalmente em **LSR** como a negação clássica.

Prova: basta aplicar o teorema 3.2.34 e o postulado **nc**.

Teorema 2.3: Os conectivos "!" e "?" preservam a implicação e a equivalência clássicas e fortes, isto é, as seguintes proposições são verdadeiras:

- $\alpha \to \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha! \to \beta!$; $\quad \alpha \to \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha? \to \beta?$;
- $\alpha \leftrightarrow \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha! \leftrightarrow \beta!$; $\quad \alpha \leftrightarrow \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha? \leftrightarrow \beta?$;
- $\alpha \Rightarrow \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha! \Rightarrow \beta!$; $\quad \alpha \to \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha? \Rightarrow \beta?$;
- $\alpha \Leftrightarrow \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha! \Leftrightarrow \beta!$; $\quad \alpha \leftrightarrow \beta \Vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha? \Leftrightarrow \beta?$.

Teorema 2.4: Se α é !-fechada, então valem as seguintes proposições:

- $\vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha \Leftrightarrow \alpha!$; $\qquad \vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha \Leftrightarrow \alpha?$.

Prova: basta usar indução sobre fórmulas, e os postulados **!-2**, **!-3**, **!-4**, **!-5**, **!-6**, **!-7** e **!-8**; antes, o leitor deve verificar que valem em **LSR** as recíprocas dos postulados **!-2**, **!-4**, **!-5**, **!-7** e **!-8**.

Teorema 2.5: O cálculo **LSR** é superforte.

Teorema 2.6: As seguintes proposições expressam os esquemas e regras de introdução e eliminação em **LSR** para os conectivos "!" e "?":

- $\alpha \vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \alpha!$;
- $\vdash_{\mathbf{LSR}} (\alpha! \to \alpha)!$;
- $\vdash_{\mathbf{LSR}} (\alpha \to \alpha?)!$;
- $\alpha?, \alpha \to \beta \vdash^{!}_{\mathbf{LSR}} \beta$, onde ! não é livre em β;

Teorema 2.7: As seguintes proposições expressam o comportamento em **LSR** dos conectivos "$\neg$" e "~" com respeito aos conectivos "!" e "?":

- $\vdash_{\mathbf{LSR}} \neg(\alpha!) \Leftrightarrow (\neg\alpha)!$; $\qquad \vdash_{\mathbf{LSR}} \neg(\alpha?) \leftrightarrow (\sim\alpha)!$;
- $\vdash_{\mathbf{LSR}} \sim(\alpha!) \Leftrightarrow (\sim\alpha)?$; $\qquad \vdash_{\mathbf{LSR}} \sim(\alpha?) \leftrightarrow (\sim\alpha)!$.

Teorema 2.8: Se $o_1,\ldots,o_n$ são os objetos variantes em **LSR** tais que γ está nos seus escopos em α, e $o_1,\ldots,o_n$ são livres em β ou em β', então $\beta \Leftrightarrow \beta' \vdash^{o_1,\ldots,o_n}_{\mathbf{LSR}} \alpha(\gamma|\beta) \Leftrightarrow \alpha(\gamma|\beta')$.

Escólio 2.9: Qualquer um dos esquemas ou regras "$(\alpha \vee \beta)! \,/\, \alpha! \vee \beta!$", "$\alpha! \to \beta! \,/\, (\alpha \to \beta)!$" ou "$\alpha \to \alpha!$" acarreta em **LSR** o esquema "**A**! $\vee$ ($\neg$**A**)!".

Escólio 2.10: Todos os esquemas e regras clássicas valem em **LSR** para fórmulas que não possuem "!".

Teorema 2.11: Se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha$, então $\Gamma \models_{\mathbf{LSR}} \alpha$.

<u>Teorema 2.12</u>: Todos os esquemas expressos nos teoremas 3.3.16 e 3.3.20 são válidos em **LSR** e, além disso, valem em **LSR** os seguintes esquemas e regras:

- $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$; $(\alpha \wedge \beta)! \leftrightarrow \alpha! \wedge \beta!$;
- $\neg\mathbf{A} \Leftrightarrow \sim\mathbf{A}$; $\alpha! \vee \beta! \Rightarrow (\alpha \vee \beta)!$;
- $(\neg\mathbf{A})! \Leftrightarrow (\sim\mathbf{A})!$; $(\forall \boldsymbol{x}\ \alpha)! \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\ (\alpha!)$;
- $(\neg\alpha)! \Leftrightarrow \neg(\alpha!)$; $\exists \boldsymbol{x}\ (\alpha!) \Rightarrow (\exists \boldsymbol{x}\ \alpha)!$;
- $(\sim\alpha)! \Rightarrow \sim(\alpha!)$; $\mathbf{A} \mid\!\frac{!}{\mathbf{LSR}} \sim((\neg\mathbf{A})!)$;
- $(\alpha \to \beta)! \Rightarrow (\alpha! \to \beta!)$; $\alpha \mid\!\frac{!}{\mathbf{LSR}} \sim((\sim\alpha)!)$.

<u>Teorema 2.13</u>: Todos os esquemas expressos no teorema 3.3.21 não são válidos em **LSR** e, além disso, não valem em **LSR** os seguintes esquemas e regras:

- $\mathbf{A}! \vee (\neg\mathbf{A})!$; $\sim(\alpha!)\ /\ (\sim\alpha)!$;
- $\alpha! \vee (\sim\alpha)!$; $\alpha! \to \beta!\ /\ (\alpha \to \beta)!$;
- $\alpha!\ /\ \alpha$; $(\alpha \vee \beta)!\ /\ \alpha! \vee \beta!$;
- $\alpha \to \alpha!$; $(\exists \boldsymbol{x}\ \alpha)!\ /\ \exists \boldsymbol{x}\ (\alpha!)$.
- $(\alpha \to \alpha!)!$;

§3. A Completude do Cálculo LSR

Mostramos aqui que o cálculo **LSR** é completo com respeito à semântica de **LSR**.

Em toda esta seção, $\mathsf{L}'_!$ é uma linguagem quantificacional trissortida cujas espécies são $\mathbf{u}$ (a única espécie de $\mathsf{L}_!$), $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são espécies próprias e $\mathbf{w}$ é uma subespécie de $\mathbf{v}$. Os conectivos de $\mathsf{L}'_!$ são "$\to$", "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$", e os seus quantificadores são "$\forall_\mathbf{u}$", "$\exists_\mathbf{u}$", "$\forall_\mathbf{v}$" e "$\forall_\mathbf{w}$". Notamos as variáveis de $\mathsf{L}'_!$ de espécie $\mathbf{u}$ pelas letras usuais que denotam variáveis, e as variáveis de $\mathsf{L}'_?$ de espécie $\mathbf{v}$ por $\boldsymbol{v}$, seguido ou não de plicas ou índices.

<u>Definição 3.1</u>: $\mathsf{L}'_!$ é uma linguagem para **LSR'**. Uma **LSR'**-estrutura para $\mathsf{L}'_!$ é uma estrutura simples para $\mathsf{L}'_!$. Uma **LSR'**-interpretação para $\mathsf{L}'_!$ é uma interpretação simples para $\mathsf{L}'_!$. **V** é uma **LSR'**-valoração para $\mathsf{L}'_!$ se **V** é uma função de $\mathsf{L}'_!$ em $\{0,1\}$ e existe uma estrutura simples U para $\mathsf{L}'_!$ e duas **LSR'**-correspondências semânticas **min** e **max** para $\mathsf{L}'_!$ de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- **V** é a valoração gerada por U e **min**;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{min}}(\mathbf{P}) = \mathtt{I}_{\mathbf{max}}(\mathbf{P}) = \mathtt{I}^{\mathbf{f}}(\mathbf{P})$, para qualquer interpretação simples $\mathtt{I}$ para $\mathsf{L}'_!$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{min}}(\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha) = 1$ sss para todo $\mathbf{d} \in |\mathsf{U}|_{\mathbf{v}}$, $\mathtt{I}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{max}}(\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha) = 1$ sss existe $\mathbf{d} \in |\mathsf{U}|_{\mathbf{v}}$ tal que $\mathtt{I}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{min}}(\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \alpha) = 1$ sss para todo $\mathbf{d} \in |\mathsf{U}|_{\mathbf{w}}$, $\mathtt{I}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{min}}(\alpha) = 1$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{max}}(\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \alpha) = 1$ sss existe $\mathbf{d} \in |\mathsf{U}|_{\mathbf{w}}$ tal que $\mathtt{I}(\boldsymbol{x}|\mathbf{d})_{\mathbf{max}}(\alpha) = 1$;
- **min** e **max** são bem comportados quantificacionalmente para a espécie **u**;
- **min** é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente com respeito a **max**.

<u>Definição 3.2</u>: Especificamos em **LSR'**, com respeito a $\mathsf{L}'_!$, o conectivo "~" e os quantificadores "$\exists_{\mathbf{v}}$" e "$\exists_{\mathbf{w}}$":

- $\sim\alpha \rightleftharpoons \alpha \to \neg\alpha$;
- $\exists_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha \rightleftharpoons \sim(\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v} \sim\alpha)$;
- $\exists_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \alpha \rightleftharpoons \sim(\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v} \sim\alpha)$.

<u>Escólio 3.3</u>: A **LSR'**-correspondência semântica **min** para $\mathsf{L}'_!$, tal como definida em 3.1, é bem comportada quantificacionalmente.

<u>Definição 3.4</u>: Deste ponto em diante, em toda esta seção, $\mathsf{L}'_!$ é uma linguagem para **LSR'** preenchendo as seguintes condições:

- toda constante em $\mathsf{L}_!$ é uma constante em $\mathsf{L}'_!$ de mesma espécie;
- todo sinal funcional em $\mathsf{L}_!$ é um sinal funcional em $\mathsf{L}'_!$ de mesma espécie;
- todo sinal predicativo em $\mathsf{L}_!$, de aridade **n**, é um sinal predicativo em $\mathsf{L}'_!$ de espécie $\langle \mathbf{u},\ldots,\mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$, e de aridade **n**+1;
- não há em $\mathsf{L}'_!$ outras constantes, sinais funcionais e sinais predicativos, além dos citados nas condições anteriores.

Definição 3.5: Em toda esta seção, consideramos $\mathbf{g}$ uma função de $\mathsf{L}_!$ em $\mathsf{L}'_!$, especificada pelas seguintes condições:

- $\mathbf{g}(\mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n)) = \mathbf{p}(\mathtt{t}_1,\ldots,\mathtt{t}_n,\boldsymbol{\nu})$;
- $\mathbf{g}(\alpha!) = \forall_{\mathbf{w}}\boldsymbol{\nu}\ \mathbf{g}(\alpha)$;
- $\mathbf{g}(\neg\alpha) = \neg\mathbf{g}(\alpha)$;
- $\mathbf{g}(\alpha \# \beta) = \mathbf{g}(\alpha) \# \mathbf{g}(\beta)$, onde $\# \in \{\rightarrow,\wedge,\vee\}$;
- $\mathbf{g}(\mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \alpha) = \mathbf{Q}\boldsymbol{x}\ \mathbf{g}(\alpha)$, onde $\mathbf{Q} \in \{\forall,\exists\}$.

Definição 3.6: Se U é uma estrutura simples para $\mathsf{L}'_!$, então, para cada $\mathbf{d} \in |\mathrm{U}|_{\mathbf{v}}$, definimos uma estrutura simples $\mathrm{U}_{\mathbf{d}}$ para $\mathsf{L}_!$ pelas seguintes condições:

- $|\mathrm{U}_{\mathbf{d}}| = |\mathrm{U}|_{\mathbf{u}}$;
- se $\mathbf{s}$ é uma constante ou um sinal funcional em $\mathsf{L}_!$, então $\mathrm{U}_{\mathbf{d}}(\mathbf{s}) = \mathrm{U}(\mathbf{s})$;
- se $\mathbf{p}$ é um sinal predicativo em $\mathsf{L}_!$, de aridade $\mathbf{n}$, e $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n \in |\mathrm{U}|_{\mathbf{u}}$, então $\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\rangle \in \mathrm{U}_{\mathbf{d}}(\mathbf{p})$ sss $\langle \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n,\mathbf{d}\rangle \in \mathrm{U}(\mathbf{p})$.

Dada uma estrutura simples U para $\mathsf{L}'_!$, Y_{U} e Y'_{U} denotam respectivamente as coleções $\{\mathrm{U}_{\mathbf{d}} / \mathbf{d} \in |\mathrm{U}|_{\mathbf{v}}\}$ e $\{\mathrm{U}_{\mathbf{d}} / \mathbf{d} \in |\mathrm{U}|_{\mathbf{w}}\}$.

Lema 3.7: Sejam $\mathtt{I} = \langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle$ uma estrutura simples para $\mathsf{L}'_!$, $\mathbf{s'}$ a restrição de $\mathbf{s}$ à coleção de variáveis em $\mathsf{L}_!$, $\mathtt{I}' = \langle \mathrm{Y}_{\mathrm{U}},\mathrm{Y}'_{\mathrm{U}},\mathrm{U}_{\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})},\mathbf{s'}\rangle$[1], **min** e **max** tal como definidos em 1.1 ou 3.1, dependendo do contexto, $\mathbf{V}$ a **LSR'**-valoração gerada para $\mathsf{L}'_!$ gerada por U, e $\mathbf{V'}$ a **LSR**-valoração para $\mathsf{L}_!$ gerada por $\langle \mathrm{Y}_{\mathrm{U}},\mathrm{Y}'_{\mathrm{U}}\rangle$. Então as seguintes asserções se realizam:

- $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle(\mathtt{t}) = \langle \mathrm{U}_{\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})},\mathbf{s'}\rangle(\mathtt{t})$;
- $\langle \mathrm{U},\mathbf{s}\rangle(\mathbf{g}(\mathbf{P})) = \langle \mathrm{U}_{\mathbf{s}(\boldsymbol{\nu})},\mathbf{s'}\rangle(\mathbf{P})$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{min}}(\mathbf{g}(\alpha)) = \mathtt{I}'_{\mathbf{min}}(\alpha)$;
- $\mathtt{I}_{\mathbf{max}}(\mathbf{g}(\alpha)) = \mathtt{I}'_{\mathbf{max}}(\alpha)$;
- $\mathbf{V}(\mathbf{g}(\alpha)) = \mathbf{V'}(\alpha)$.

Lema 3.8: Se $\Gamma \models_{\mathbf{LSR}} \alpha$, então $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle \models_{\mathbf{LSR'}} \mathbf{f}(\alpha)$.

---

[1] $\mathtt{I}'$ é uma estrutura bi-híbrida para $\mathsf{L}_!$.

<u>Definição 3.9</u>: O cálculo **LSR'** possui como postulados os proposicionais básicos, os proposicionais da negação, os quantificacionais básicos e da negação para a espécie **u**, os universais básicos e extras para as espécies **v** e **w**, **Gen**, mais os seguintes postulados específicos:

(**nc**) $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$;

($\forall$***v*-1**) $(\mathbf{A} \to \beta) \to (\mathbf{A} \to \neg\beta) \to \neg\mathbf{A}$;

($\forall$***v*-2**) $\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \neg\alpha \leftrightarrow \neg\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha$;

($\forall$***v*-3**) $\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \neg\alpha \leftrightarrow \neg\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \alpha$.

<u>Lema 3.10</u>: "~" funciona globalmente em **LSR'** como a negação clássica.

<u>Lema 3.11</u>: **LSR'** é um cálculo quaseforte.

Prova: basta aplicar o teorema 3.2.17.

<u>Escólio 3.12</u>: **LSR'** não é um cálculo superforte.

Prova: basta observar que não é verdade em geral que $\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \alpha \vdash^{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{LSR'}} \forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha$, daí **LSR'** não é um cálculo estável.

<u>Lema 3.13</u>: **LSR'** é um cálculo abrangente.

<u>Lema 3.14</u>: Seja **V** uma função de $\mathbf{L'_!}$ [1] em {0,1}. Então **V** é uma **LSR'**-valoração completa para **LSR'** se, e somente se, as seguintes proposições forem satisfeitas:

- $\mathbf{V}(\neg\mathbf{A}) = 1$ sss $\mathbf{V}(\mathbf{A}) = 0$, onde "$\forall_{\mathbf{v}}$" e "$\forall_{\mathbf{w}}$" não ocorrem em **A**;
- **V** é $\neg$-heterodoxa proposicionalmente de modo restrito;
- **V** é regular;
- **V** é bem comportada quantificacionalmente;
- **V** é uma função de Henkin;
- $\mathbf{V}(\neg\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \alpha) = \mathbf{V}(\forall_{\mathbf{v}} \boldsymbol{v}\ \neg\alpha)$, onde no máximo $\boldsymbol{v}$ é livre em α;
- $\mathbf{V}(\neg\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \alpha) = \mathbf{V}(\forall_{\mathbf{w}} \boldsymbol{v}\ \neg\alpha)$, onde no máximo $\boldsymbol{v}$ é livre em α.

---

[1] Neste caso, consideramos $\mathbf{L'_!}$ uma linguagem arbitrária para **LSR'**.

Lema 3.15: A função característica de todo conjunto de Henkin saturado em alguma linguagem para **LSR'** é uma **LSR'**-valoração para esta linguagem.

Lema 3.16: Se $\Gamma \models_{\mathbf{LSR'}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LSR'}} \alpha$.

Lema 3.17: Se $\mathbf{f}\langle\Gamma\rangle \vdash_{\mathbf{LSR'}} \mathbf{f}(\alpha)$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha$.

Prova:

Basta seguir linhas análogas à prova do lema 4.3.16, com a diferença de que devemos, após eliminar todas as variáveis de espécie **v** distintas de $\boldsymbol{\nu}$, excluir da demonstração todas as ocorrências de "$\forall_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\nu}$"; isto é possível graças ao fato de que só existem variáveis correspondentes a espécies próprias, conforme a definição de alfabeto quantificacional, dada na página 16 deste trabalho.

Vale a pena também o leitor reparar que um exemplar "$(\alpha! \to \alpha)!$" do postulado **!-9** de **LSR** é a tradução inversa do exemplar "$\forall_{\mathbf{w}}\boldsymbol{\nu}\ (\forall_{\mathbf{w}}\boldsymbol{\nu}\ \mathbf{g}(\alpha) \to \mathbf{g}(\alpha))$" do postulado universal extra **∀-5** de **LSR'**.

●

Teorema 3.18: Se $\Gamma \models_{\mathbf{LSR}} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha$.

Prova: basta aplicar os lemas 3.8, 3.16 e 3.17.

§4. Uma Extensão Não Monotônica para LSR

Apresentamos nesta seção a lógica **SDL** (do inglês "*Skeptical Default Logic*"). Ela possui motivações análogas às de **IDL**, com a diferença de que a sua base monotônica é **LSR** e a sua perspectiva é cética.

Definição 4.1: Um **SDL**-*default (em* $\mathsf{L}_!$*)* é uma expressão de uma das formas $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$ ou $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$, onde α,β,γ são fórmulas de $\mathsf{L}_!$; se α,β,γ são sentenças, dizemos que tal expressão é um **SDL**-*default fechado*. Um **SDL**-default da primeira forma é dito *normal*. Uma **SDL**-*base (em* $\mathsf{L}_!$*)* é um par $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D}\rangle$, onde **W** é uma coleção de sentenças em $\mathsf{L}_!$, e **D** é uma coleção de **SDL**-defaults em $\mathsf{L}_!$. Um *exemplar de* $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$ ou $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$ *(em* $\mathsf{L}_!$*)* é respectivamente uma expressão $\dfrac{\alpha'\ :\ \beta'}{\beta'!}$ ou $\dfrac{\alpha'\ :\ \beta'\ ;\ \gamma'}{\beta'!}$, onde α',β',γ' são respectivamente instâncias fechadas consistentes de α,β,γ (em $\mathsf{L}_!$).

Definição 4.2: Se **D** é uma coleção de **SDL**-defaults, então **Cons**(**D**) é a coleção $\{\beta!\ /\ \dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$ ou $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$ é um elemento de $\mathbf{D}\}$.

No restante desta seção, $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D}\rangle$ é uma **SDL**-base em $\mathsf{L}_!$, **D’**,**D”** são coleções de exemplares em $\mathsf{L}_!$ de **SDL**-defaults de **D**, e **S**,**T** são coleções de sentenças em $\mathsf{L}_!$.

Definição 4.3: Um exemplar em $\mathsf{L}_!$ de um **SDL**-default de **D** é dito *semidisparado em* **T** *com respeito a* Δ se ele for de uma das formas $\dfrac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$ ou $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$, tal que $\alpha \in \mathbf{T}$ e $\mathbf{W} \cup \{\beta\}$ não é trivial em **LSR**.

Definição 4.4: **D’** é dito *pré-coerente em* **T** *sobre* **S** *com respeito a* Δ se as seguintes condições forem satisfeitas:

- cada elemento de **D’** é semidisparado em **T** com respeito a Δ;
- para cada elemento de **D’** da forma $\dfrac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$, $\mathbf{S} \cup \mathbf{Cons}(\mathbf{D'}) \not\vdash_{\mathbf{LSR}} \neg(\gamma!)$.

D’ é dito *pré-coerente maximal em* **T** *sobre* **S** *com respeito a* Δ se, para cada **D”** pré-coerente em **T** sobre **S** com respeito a Δ, se $\mathbf{D'} \subseteq \mathbf{D''}$, então $\mathbf{D'} = \mathbf{D''}$.

<u>Definição 4.5</u>: Um exemplar ρ em $\mathsf{L}_!$ de um **SDL**-default de **D** é dito *disparado em* **T** *sobre* **S** *com respeito a* Δ se este pertencer a todo **D'** pré-coerente maximal em **T** sobre **S** com respeito a Δ.

<u>Definição 4.6</u>: **D'** é dito *coerente em* **T** *sobre* **S** *com respeito a* Δ se valerem as seguintes condições:

- **D'** é pré-coerente em **T** sobre **S** com respeito a Δ;
- cada elemento de **D'** é disparado em **T** sobre **S** com respeito a Δ;
- para cada elemento de **D'** de uma das formas $\frac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$ ou $\frac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$,
  $\mathbf{S} \cup \mathbf{Cons}(\mathbf{D'}) \not\vdash_{\mathbf{LSR}} \neg(\beta!)$.

D' é dito *coerente maximal em* **T** *sobre* **S** *com respeito a* Δ se, para cada **D"** coerente em **T** sobre **S** com respeito a Δ, se $\mathbf{D'} \subseteq \mathbf{D''}$, então $\mathbf{D'} = \mathbf{D''}$.

<u>Definição 4.7</u>: Um exemplar ρ em $\mathsf{L}_!$ de um **SDL**-default de **D** é dito *fortemente disparado em* **T** *sobre* **S** *com respeito a* Δ se este pertencer a todo **D'** coerente maximal em **T** sobre **S** com respeito a Δ.

<u>Definição 4.8</u>: Dada uma **SDL**-base $\Delta = \langle \mathbf{W},\mathbf{D} \rangle$ em $\mathsf{L}_!$ e uma coleção **S** de sentenças de $\mathsf{L}_!$, considere $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$ a menor coleção de sentenças satisfazendo as seguintes propriedades:

- $\mathbf{W} \subseteq \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S}) \vdash_{\mathbf{LSR}} \alpha$ e α é uma sentença de $\mathsf{L}_!$, então $\alpha \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$;
- se $\frac{\alpha\ :\ \beta}{\beta!}$ ou $\frac{\alpha\ :\ \beta\ ;\ \gamma}{\beta!}$ é fortemente disparado em $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$ sobre **S** com respeito a Δ, então $\beta! \in \mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S})$.

Se $\mathcal{T}_\Delta(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$, dizemos que **S** é uma **SDL**-*extensão de* Δ *(em* $\mathsf{L}_!$*)*. Se α pertence a cada **SDL**-extensão de Δ (em $\mathsf{L}_!$), notamos isto por $\Delta \vdash_{\mathbf{SDL}} \alpha$.

<u>Escólio 4.9</u>: Acreditamos que cada **SDL**-base possui uma única **SDL**-extensão, mas ainda não o provamos.

Escólio 4.10: Considerando o exemplo 4.4.2 codificado em **SDL**, temos que a única **SDL**-extensão obtida é a coleção das conseqüências em **LSR** de {Quaker(Nixon), republicano(Nixon)}, ou seja, não se tem $\Delta \vdash_{\mathbf{SDL}}$ pacifista(Nixon)! nem $\Delta \vdash_{\mathbf{SDL}}$ ($\neg$pacifista(Nixon))!, que é o que esperávamos.

Escólio 4.11: Considerando o exemplo 4.4.3 expresso em **SDL**, temos uma única **SDL**-extensão, da qual voa(Tweety)! é um elemento, mas não a sua fórmula contraditória, ou seja, $\Delta \vdash_{\mathbf{SDL}}$ voa(Tweety)!, mas não se tem $\Delta \vdash_{\mathbf{SDL}}$ ($\neg$voa(Tweety))!.

6. CONCLUSÕES

Apresentamos nesta tese dois tipos de contribuições. Do ponto de vista da pura especulação formal no campo das lógicas não clássicas, contribuímos na modelagem de novos sistemas formais paraconsistentes, paracompletos e não aléticos, com suas respectivas semânticas recursivas. Esses novos sistemas, aqui designados *lógicas básicas* para distingui-los dos sistemas aplicados apresentados nos capítulos 4 e 5, constituem, tanto de um ponto de vista técnico quanto conceitual, um sensível avanço com respeito aos sistemas existentes que tratam de negações não clássicas. Suas propriedades semânticas oferecem uma resposta factual a algumas das mais sérias objeções que têm sido levantadas (vide [46], pg. 116) contra as lógicas paraconsistentes aqui denominadas de primeira geração. Além disso, obtivemos uma série de outros resultados que ilustram a organicidade e exeqüibilidade destes sistemas; entre eles podemos citar os seguintes:

- as leis clássicas de negação da conjunção, da disjunção, da implicação, da quantificação universal, da quantificação existencial, bem como a lei da dupla negação, são válidas em todas as lógicas heterodoxas aqui apresentadas;
- todos estes sistemas possuem um princípio de substituição correspondente à equivalência forte;
- as partes proposicionais das lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$ são dotadas de semânticas matriciais.

Existem outros resultados que conhecemos mas não apresentamos neste trabalho simplesmente por brevidade. Entre estes, citamos os seguintes:

- as lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$ possuem redução à forma prenex e, com uma definição adequada de literal, podemos colocar a matriz de uma forma prenex arbitrária em forma conjuntiva ou disjuntiva normal;
- as lógicas $\mathbf{LI}^*$, $\mathbf{PCL}^*$ e $\mathbf{NALL}^*$ possuem resultados de skolemização ou herbrandização análogos aos da lógica clássica;

- as lógicas **LEI** e **LSR** podem ser traduzidas para lógicas dotadas dos dois resultados que acabamos de citar;
- todas as lógicas aqui apresentadas são dotadas tanto de sistemas de tableaux como de sistemas de resolução; no caso de **LEI** e **LSR**, isto ocorre a menos de traduções adequadas.

Do ponto de vista teórico, há uma linha interessante de estudo a ser desenvolvida buscando situar tecnicamente algumas das lógicas aqui apresentadas no panteão das lógicas paraconsistentes. Antonio Mário Sette, por exemplo, sugeriu que $\mathbf{LI_1}$ é possivelmente um cálculo paraconsistente maximal, assumidas certas restrições razoáveis [51]. Esse tipo de resultado permanece por ser explorado.

O método de trabalho por nós adotado foi a busca de soluções gerais para classes de problemas que abrangiam as questões com que nos defrontamos. Assim, por exemplo, buscamos uma prova abstrata do Teorema da Dedução em um cálculo genérico possuindo determinadas propriedades, ao invés de prová-lo particularmente para cada cálculo, repetindo constantemente as mesmas formas de raciocínio. Para isto, partimos de algumas idéias esboçadas inicialmente em [35], pgs. 94-99.

Este estudo facilitou bastante a consecução de um dos resultados fundamentais deste trabalho: a completude de um cálculo abstrato com propriedades suficientemente gerais, a ponto de abarcar, a menos de traduções adequadas, todos os cálculos vistos nesta tese.

O problema mais complexo com que nos deparamos foi a completude do cálculo **LSR**. Observamos que uma tradução adequada desta lógica requeria uma forma de lógica polissortida que não conhecíamos previamente. Generalizamos a definição dada em [28], pgs. 277-279, a ponto de permitir relações de inclusão entre universos de espécies distintas. Um detalhe técnico que foi vital para o sucesso da prova de completude foi o de não permitir variáveis específicas para espécies não próprias. Um problema que não pudemos evitar foi o de dar uma axiomatização completa para classes de lógicas polissortidas deste gênero; neste sentido formulamos os *postulados universais* e os *existenciais extras*, dados na 2ª seção do capítulo 3.

Outro ponto que facilitou sobremaneira um tratamento unificado às lógicas por nós especificadas foi a concepção de algumas idéias gerais concernentes às semânticas de lógicas monotônicas em geral. Observamos que havia um núcleo comum invariável em todas estas semânticas. Chamamos os objetos variáveis de *estruturas*, *interpretações*, *correspondências semânticas* e de *valorações*, conforme o caso.

Do ponto de vista aplicado, que constituiu a motivação inicial para esta tese, advogamos para o nosso trabalho o mérito de romper com a prática de varrer para debaixo do tapete dos mecanismos extralógicos as contradições que os raciocínios de caráter indutivo, utilizados em Inteligência Artificial, no senso comum e na ciência, fatalmente introduzem. Esse fenômeno com respeito ao raciocínio indutivo já era reconhecido por filósofos da ciência décadas antes do florescimento das lógicas não monotônicas em IA, e é tido por eles como uma praga a inviabilizar as tentativas de formulação dessas lógicas, tendo certamente sido uma das razões de abandono dessas tentativas. Todo esse esforço de escamotear contradições está ligado, é claro, à decisão tácita e previamente assumida pelos que têm trabalhado na área (com algumas honrosas exceções, em todo o caso fora da tendência dominante) de reter a lógica clássica como núcleo do sistema. Essa atitude, no entanto, além da sua inadequação conceitual, teve conseqüências negativas na própria efetividade desses sistemas como modelos do raciocínio, como foi amplamente detectado na literatura da área (vide [32] e [40], por exemplo).

Reconhecer de pronto a ocorrência de contradições como um fenômeno natural a toda forma de raciocínio em condições de conhecimento incompleto e, a partir dessa postura, desenhar as lógicas adequadas para o tratamento dessas contradições e para a realização das inferências desejáveis nessas circunstâncias, foi a metodologia adotada em nosso trabalho, não só na presente tese, mas em toda a linha de investigação na qual ela se insere. Cabe aqui uma observação. A lógica, no contexto em que a utilizamos, não é mais apenas uma disciplina normativa a estabelecer cânones para o raciocínio impecável ou para a fundamentação da Matemática. Lógica constitui-se aqui um instrumento de modelagem, no presente caso, de certos padrões de raciocínio, mas, em princípio, de qualquer outro fenômeno. Nas palavras de

Putnam, colocamos na lógica as inferências que desejamos realizar e realizamos as inferências que a lógica permite.

Em termos de desenvolvimentos futuros nessa linha, devemos antes de mais nada admitir que não estamos satisfeitos com o modo como os esquemas de raciocínio não monotônico estão aqui formalizados. Na realidade, seguimos práticas standard adotadas na área, como no caso das lógicas de defaults, que consistem em prover um mecanismo inferencial para expandir uma base monotônica. Produz-se assim um raciocínio em duas fases através de um sistema de inferência híbrido. Um desafio nessa direção é o desenho de um formalismo integrado que permita um tratamento uniforme, mesmo que apenas em aparência, de ambas as fases. Esse mesmo problema reflete-se, e de forma ainda mais grave, na semântica desses sistemas. No nosso caso, apresentamos semânticas para todos os sistemas dedutivos apresentados, mas não temos semânticas para os sistemas não monotônicos, o que equivale a dizer que não temos uma semântica para o todo do raciocínio. O resultado a perseguir aí seria novamente a obtenção de uma semântica uniforme que estendesse naturalmente as semânticas de base já existentes. Uma possível abordagem para isso seria a introdução de ordenações adequadas na classe dos modelos monotônicos, que permitisse a adoção de classes restritas de modelos tidos como preferenciais.

REFERÊNCIAS

[1] Anderson, A. R. & Belnap, N. D., *Entailment*, Princeton University Press, 1975.

[2] Arruda, Ayda I., *A Survey of Paraconsistent Logic*, (em) Arruda, A. I. & da Costa, N. C. A. & Chuaqui, R. (eds.), Mathematical Logic in Latin America, North-Holland Publishing Company, pgs. 1-41, 1980.

[3] Arruda, Ayda I., *Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic*, (em) Priest, G. & Routley, R. & Norman, J. (eds.), Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent., Philosophia Verlag, 1989.

[4] Arruda, Ayda I. & da Costa, Newton C. A., *Une Semantique pour le Calcul* $\boldsymbol{C}_I^{=}$, C. R. Acad. Sc. Paris 284-A, 1977, pgs. 279-282.

[5] Bell, J. L. & Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[6] Besnard, Philippe, *An Introduction to Default Logic*, Springer-Verlag, 1989.

[7] Bornheim, Gerd A., *Os Filósofos Pré-Socráticos*, Editora Cultrix, 1991.

[8] Buchsbaum, Arthur, *Um Método Automático de Prova para a Lógica Paraconsistente*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1988.

[9] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Um Provador Paraconsistente*, V Simpósio Brasileiro de Inteligência Artificial, 1988, pgs. 531-540.

[10] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Raciocínio Automático em Lógicas Paraconsistentes e/ou Paracompletas*, VI Simpósio Brasileiro de Inteligência Artificial, 1989, pgs. 1-15.

[11] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *O Método dos Tableaux Generalizado e sua Aplicação ao Raciocínio Automático em Lógicas Não Clássicas*, O que nos faz pensar – Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio, nº 3, setembro de 1990.

[12] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Uma Família de Lógicas Paraconsistentes e/ou Paracompletas com Semânticas Recursivas*, Coleção Documentos, Série Lógica e Teoria da Ciência, nº 14, Instituto de Estudos Avançados, Universidade de São Paulo, setembro de 1993. Publicado anteriormente por Monografias em Ciência da Computação nº 5/91, Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1991.

[13] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *A Reasoning Method for a Paraconsistent Logic*, Studia Logica, vol. 52, nº 2, maio de 1993, pgs. 281-289.

[14] Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Automated Deduction with Non Classical Negations*, Proceedings of 3rd Workshop on Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, 1994, pgs. 51-64.

[15] Chang, Chin-Liang & Lee, Richard Char-Tung, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, New York, 1973.

[16] Copi, Irving M., Introdução à Lógica, Editora Mestre Jou, 2ª edição, 1978.

[17] Correa, Marcelo & Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Raciocínio Automático com Conhecimento Incompleto e Inconsistente I: um Sistema de Tableaux para LEI*, Proceedings do IX Simpósio Brasileiro de Inteligência Artificial, 1992, pgs. 281-296.

[18] Correa, Marcelo & Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Sensible Inconsistent Reasoning: A Tableau System for LEI*, Technical Notes of AAAI Fall Symposium on Automated Deduction in Non-Standard Logics, outubro de 1993.

[19] da Costa, Newton C. A., *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic 15, pgs. 497-510, 1974.

[20] da Costa, Newton C. A., *The Philosophical Import of Paraconsistent Logic*, The Journal of Non-Classical Logic, vol. I, nº 1, pgs. 1-19, 1982.

[21] da Costa, Newton C. A., *Logics that are both Paraconsistent and Paracomplete*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Linzei, vol. 83, pgs. 29-32, 1989.

[22] da Costa, Newton C. A., *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*, Editora Hucitec, 2ª edição,1994.

[23] da Costa, Newton C. A., Comunicações Verbais ao autor realizadas de 1992 a 1995.

[24] da Costa, Newton C. A. & Alves, Elias H., *Une Semantique pour le Calcul* C_1, C. R. Acad. Sc. Paris 238-A, pgs. 729-731, 1977.

[25] da Costa, Newton C. A. & Alves, Elias H., *A Semantical Analysis of the Calculi* C_n, Notre Dame Journal of Formal Logic 18, pgs. 621-630, 1977.

[26] da Costa, Newton C. A. & Marconi, Diego, *A Note on Paracomplete Logic*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Linzei, vol. 80, pgs. 504-509, 1986.

[27] da Costa, Newton C. A. & Marconi, Diego, *An Overview of the Paraconsistent Logic in the 8O's*, Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática nº 5, 39 pgs., 1987.

[28] Enderton, Herbert B., *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1972.

[29] Fitting, Melvin, *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer-Verlag, 1990.

[30] Girard, J.-Y., *Linear Logic*, Theoretical Computer Science, 50, 1987, pgs. 1-102.

[31] Grana, Nicola, *La Teoria delle Valutazioni di N. C. A. da Costa*, Liguori Editore, 1990.

[32] Hanks, S. & McDermott, D., *Nonmonotonic Logic and Temporal Projection*, Artificial Intelligence, nº 33, 1987.

[33] Hempel, Carl G., *Inductive Inconsistencies*, Synthese, vol. 12, pgs. 439-469, 1960.

[34] *Histórias da Tradição Sufi*, seleção, tradução e revisão de Nícia de Queiroz Grillo (Coordenação), Anibal Duarte Pereira Netto, Clarissa de Paula Ilg, e Suzi Dias Guimarães, do Grupo Granada de Contadores de Histórias, Instituto Tarika, Edições Dervish, 1993.

[35] Kleene, Stephen Cole, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, 1971.

[36] Krishnamurti, *O Passo Decisivo*, Editora Cultrix, 1977.

[37] Loparíc, Andréa & da Costa, Newton C. A., *Paraconsistency, Paracompleteness and Valuations*, Logique et Analyse 106, pgs. 119-131, 1984.

[38] Loveland, Donald W., *Automated Theorem Proving: A Logical Basis*, North-Holland Publishing Company, 1978.

[39] Mendelson, Elliot, *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, 1979.

[40] Morris, P. H., *The Anomalous Extension Problem in Default Reasoning*, Artificial Intelligence, vol. 35, nº 3, pgs. 383-399, 1988.

[41] Osho, *A Harmonia Oculta – Discursos sobre os Fragmentos de Heráclito*, Editora Cultrix, São Paulo, 1994.

[42] Pequeno, Tarcisio, *A Logic for Inconsistent Nonmonotonic Reasoning*, Technical Report 90/6, Department of Computing, Imperial College, Londres, 1990.

[43] Pequeno, Tarcisio & Buchsbaum, Arthur, *The Logic of Epistemic Inconsistency*, Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Second International Conference, 1991, pgs. 453-460.

[44] Platão, *Diálogos III – A República*, Ediouro.

[45] Popper, Karl R., *Conjeturas e Refutações*, Editora Universidade de Brasília, 1982.

[46] Priest, G. & Routley, R., *On Paraconsistency*, Research Papers of the Logic Group, Research School of Social Sciences, nº 13, Australian National University, 1983.

[47] Priest, G. & Routley, R. & Norman, J. (eds.), *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*. Philosophia Verlag, 1989.

[48] Reiter, Raymond, *A Logic for Default Reasoning* , Artificial Intelligence, vol. 13, nos 1 e 2, 1980, pgs. 81-132.

[49] Reiter, Raymond, *Nonmonotonic Reasoning* , Annual Reviews of Computer Science, vol. 2, 1987, pgs. 147-187.

[50] Sette, A. M., *On the Propositional Calculus* P^1, Mathematica Japonicae, vol. 18, nº 3, 1973, pgs. 173-180.

[51] Sette, A. M., Comunicação Verbal, 1993.

[52] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[53] Suppes, Patrick, *Axiomatic Set Theory*, Dover, 1972.

[54] Sylvan, Richard, Comunicação Verbal, 1990.

[55] Três Iniciados, *O Caibalion: Estudo da Filosofia Hermética do Antigo Egito e da Grécia*, Editora Pensamento, 1978.

ÍNDICE REMISSIVO

A

C

D

E

G

I

L

M

N

Q

R

S

U

V

Lógicas da Inconsistência e da Incompletude: Semântica e Axiomática

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA POR ARTHUR RONALD DE VALLAURIS BUCHSBAUM EM 16 DE OUTUBRO DE 1995 AO DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA DA PUC / RJ, E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA, FORMADA PELOS SEGUINTES PROFESSORES:

Prof. Tarcisio Haroldo Cavalcante Pequeno
Departamento de Computação – UFC

Prof. Paulo Augusto Silva Veloso
Departamento de Informática – PUC/RJ

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira
Departamento de Filosofia – PUC/RJ

Prof. Newton Carneiro Affonso da Costa
Departamento de Filosofia – USP

Prof. Antonio Mário Sette
Departamento de Filosofia – UNICAMP

Visto e permitida a impressão
Rio de Janeiro, 24/10/1995

Prof. Luiz Fernando Gomes Soares
Coordenador dos Programas de Pós-Graduação do
Centro Técnico Científico