RACIOCÍNIO AUTOMÁTICO EM LÓGICAS PARACONSISTENTES E/OU PARACOMPLETAS[1]

Arthur Buchsbaum **Tarcísio Pequeno**

Sumário

Neste artigo descrevemos métodos automáticos de prova para uma família de lógicas paraconsistentes e/ou paracompletas. Baseamo-nos no método geral dos tableaux, o qual é analítico e revela-se bem flexível em aplicações para diversas lógicas não clássicas. As lógicas paraconsistentes são adequadas na formalização de raciocínios envolvendo contradições. As lógicas paracompletas são convenientes para a consideração de certas realidades aonde o princípio do terceiro excluído não vigora.

1. Introdução

Em nosso trabalho objetivamos a construção de sistemas de realização de raciocínio envolvendo o senso comum, e constatamos a necessidade de trabalhar com lógicas aptas à consideração das limitações do ser humano.

Uma lógica paraconsistente adéqua-se sobretudo a questões envolvendo a relatividade dos pontos de referência a partir dos quais visões do mundo podem ser apreendidas. Uma lógica é dita paraconsistente se duas fórmulas contraditórias não implicam necessariamente qualquer fórmula da linguagem considerada. Para maiores detalhes, veja da Costa [1] e [Buchsbaum].

Uma lógica paracompleta adéqua-se a certas situações de limitação da percepção, por exemplo. Em geral, ao olharmos para uma rosa localizada a uma grande distância, pode acontecer de não estarmos seguros com respeito a certos atributos da flor observada, como por exemplo se sua cor é vermelha ou não. Em tal lógica não se tem, em geral, que pelo menos uma de duas fórmulas contraditórias é verdadeira.

Apresentamos neste artigo sistemas de tableaux para os cálculos $\mathbf{P_1}$ (veja [da Costa & Marconi]), $\mathbf{N_1}$ (veja [da Costa 2]), **DL** (veja [da Costa & Wolf]) e **V** (veja [da Costa & Puga]). O cálculo $\mathbf{P_1}$ é paracompleto, enquanto que os demais três cálculos são paraconsistentes e paracompletos. Em um artigo anterior (veja [Buchsbaum & Pequeno]) apresentamos um sistema para o cálculo paraconsistente $\mathbf{C_1}$. Em todas as lógicas aqui consideradas os significados da implicação, conjunção e disjunção são idênticos aos significados correntes na lógica clássica. Os desvios de significado destas lógicas relacionam-se com o tratamento da negação, porém, conforme veremos adiante, em cada um dos cálculos considerados é possível simular-se a negação clássica.

O método dos tableaux vem se revelando bastante adequado para a construção de provadores para lógicas não clássicas. Na descrição dos sistemas de tableaux que descreveremos nas seções seguintes, usaremos a terminologia definida anteriormente em [Buchsbaum] e [Buchsbaum & Pequeno]. Para maiores detalhes quanto ao método dos tableaux aplicado à lógica clássica, veja por exemplo [Bell & Machover] e/ou [Smullyan].

Destacamos neste parágrafo os significados de algumas expressões que usaremos nas seções posteriores. <u>Tableaux</u> são árvores cujos nós são ocupados com fórmulas. <u>Regras</u> são transformações que, aplicadas a nós e ramos, geram coleções finitas de tableaux. <u>Fórmulas</u>

[1] Este trabalho foi parcialmente financiado pela FINEP e pelo Projeto ESTRA – SID Informática.

excluídas de um sistema de tableaux são fórmulas que não pertencem ao domínio de nenhuma regra do sistema. Os ramos de um tableau podem ser abertos ou fechados com respeito a um sistema, sendo que isto é determinado pelo seu critério de fechamento. Um sistema de tableaux é um método de prova por refutação que determina a geração de uma árvore (tableau) a partir de um tableau inicial previamente dado (nos casos considerados neste artigo, o tableau inicial consiste de um único nó, cuja fórmula é a negação clássica do teorema a ser demonstrado). Passo a passo, após a escolha de um nó ainda não usado, aplicável a uma regra, o crescimento da árvore (tableau) se dá em todas as folhas descendentes deste nó localizadas em ramos abertos, sendo que a cada uma destas folhas é adicionada uma subárvore obtida pela aplicação da regra considerada ao nó e ao ramo do tableau ao qual o nó e a folha pertencem. A proliferação dos ramos é contida por operações de fechamento, nas quais, cada vez que um ramo cresce, é verificado se o novo ramo obtido é fechado, segundo o critério de fechamento do sistema. O objetivo do procedimento é fechar todos os ramos, provando daí o teorema dado.

2. O Cálculo Paracompleto $\mathbf{P_1}$

Apresentamos abaixo os axiomas e a regra de inferência do cálculo $\mathbf{P_1}$:

- $\mathbf{A \to (B \to A)}$;
- $\mathbf{(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))}$;
- $\dfrac{\mathbf{A, \quad A \to B}}{\mathbf{B}}$;
- $\mathbf{A \wedge B \to A}$;
- $\mathbf{A \wedge B \to B}$;
- $\mathbf{A \to (B \to A \wedge B)}$;
- $\mathbf{A \to A \vee B}$;
- $\mathbf{B \to A \vee B}$;
- $\mathbf{(A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B \to C)}$;
- $\mathbf{((A \to B) \to A) \to A}$;
- $\mathbf{A \to \neg\neg A}$;
- $\mathbf{A \to (\neg A \to B)}$;
- $\mathbf{\neg(A \wedge \neg A)}$;
- $\mathbf{A^* \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))}$;
- $\mathbf{A^* \wedge B^* \to (A \to B)^* \wedge (A \wedge B)^* \wedge (A \vee B)^*}$.

$\mathbf{A^*}$ é abreviatura para $\mathbf{A \vee \neg A}$ em $\mathbf{P_1}$.

Em $\mathbf{P_1}$ não se tem, em geral, que uma fórmula da forma $\mathbf{A \vee \neg A}$ é teorema. A negação clássica em $\mathbf{P_1}$ pode ser simulada através da abreviatura

$$\mathbf{\sim A \equiv A \to \neg A}.$$

Temos que o conectivo "~", da forma como este foi definido acima, apresenta todas as propriedades da negação clássica. Apresentamos a seguir alguns teoremas de $\mathbf{P_1}$ que foram importantes para a construção do sistema $\mathbf{SP_1}$:

$\vdash \mathbf{\neg A \leftrightarrow \sim A \wedge A^*}$;

$\vdash \mathbf{A^* \to (\neg A)^*}$;

$\vdash \mathbf{\sim\neg\neg A \to \sim A}$.

Para maiores detalhes quanto às motivações e resultados do cálculo $\mathbf{P_1}$, veja [da Costa & Marconi].

Apresentamos abaixo os componentes do sistema $\mathbf{SP_1}$. Em todo este trabalho, usaremos o sinal "#" para representar qualquer um dos conectivos "→", "∧" ou "∨".

Regra $\mathbf{A \to B}$

$$\dfrac{\mathbf{A \to B}}{\mathbf{\sim A} \qquad \mathbf{B}}$$

Regra $\mathbf{A \wedge B}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{A \wedge B}\\ |\\ \mathbf{A}\\ |\\ \mathbf{B}\end{array}$$

Regra $\mathbf{A \vee B}$

$$\dfrac{\mathbf{A \vee B}}{\mathbf{A} \qquad \mathbf{B}}$$

Regra $\mathbf{\sim(A \to B)}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{\sim(A \to B)}\\ |\\ \mathbf{A}\\ |\\ \mathbf{\sim B}\end{array}$$

Regra $\mathbf{\sim (A \wedge B)}$

$$\dfrac{\mathbf{\sim(A \wedge B)}}{\mathbf{\sim A} \qquad \mathbf{\sim B}}$$

Regra $\mathbf{\sim(A \vee B)}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{\sim(A \vee B)}\\ |\\ \mathbf{\sim A}\\ |\\ \mathbf{\sim B}\end{array}$$

Regra $\mathbf{\sim\sim A}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{\sim\sim A}\\ |\\ \mathbf{A}\end{array}$$

Regra $\mathbf{\neg A}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{\neg A}\\ |\\ \mathbf{\sim A}\end{array}$$

Regra $\mathbf{\sim\neg(A \# B)}$

$$\dfrac{\mathbf{\sim\neg(A \# B)}}{\mathbf{A \# B} \qquad \mathbf{\sim(A^{*})} \qquad \mathbf{\sim(B^{*})}}$$

Regra $\mathbf{\sim\neg\neg A}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{\sim\neg\neg A}\\ |\\ \mathbf{\sim A}\end{array}$$

Regra $\mathbf{\sim\neg\sim A}$

$$\begin{array}{c}\mathbf{\sim\neg\sim A}\\ |\\ \mathbf{\sim A}\end{array}$$

As fórmulas excluídas do sistema são de uma das formar **p**, ~**p** ou ~¬**p**, onde **p** é uma fórmula atômica. Um ramo é fechado em $\mathbf{SP_1}$ se ele contiver duas fórmulas das formas **A** e ~**A**, ou uma fórmula da forma $\sim\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$.

3. O Cálculo Não Alético N_1

Apresentamos abaixo os axiomas e a regra de inferência do cálculo $\mathbf{N_1}$:

- $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;
- $\dfrac{\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$;
- $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to ((\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C}))$;
- $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to \mathbf{A}) \to \mathbf{A}$;
- $\mathbf{A}^{*} \wedge \mathbf{B}^{o} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A}))$;
- $\mathbf{A}^{o} \wedge \mathbf{B}^{o} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^{o} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^{o} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{o}$;
- $\mathbf{A}^{*} \wedge \mathbf{B}^{*} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^{*} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^{*} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{*}$;
- $\mathbf{A}^{o} \to (\mathbf{A} \to \neg\neg\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{A} \to (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}))$;
- $\mathbf{A}^{*} \to (\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A})$;
- $\mathbf{A}^{o} \vee \mathbf{A}^{*}$.

Em $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{A}^*$ é abreviatura para $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$, e $\mathbf{A}^{o}$ é abreviatura para $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$.

A negação clássica em $\mathbf{N_1}$ pode ser simulada através da abreviatura

$$\mathbf{\sim A} \equiv \mathbf{A} \rightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o}.$$

Temos que o conectivo “~”, da forma como este foi definido acima, apresenta todas as propriedades da negação clássica. Apresentamos a seguir alguns teoremas de $\mathbf{N_1}$ que foram importantes para a construção do sistema $\mathbf{SN_1}$:

$\vdash \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o} \rightarrow \mathbf{B}$;

$\vdash \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o} \leftrightarrow \sim\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^* \wedge \mathbf{A}^{o}$;

$\vdash \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o} \rightarrow \sim\mathbf{A}$;

$\vdash \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^* \rightarrow \neg\mathbf{A}$;

$\vdash \sim\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A}$;

$\vdash \mathbf{A}^{o} \leftrightarrow \sim\mathbf{A} \vee \sim\neg\mathbf{A}$;

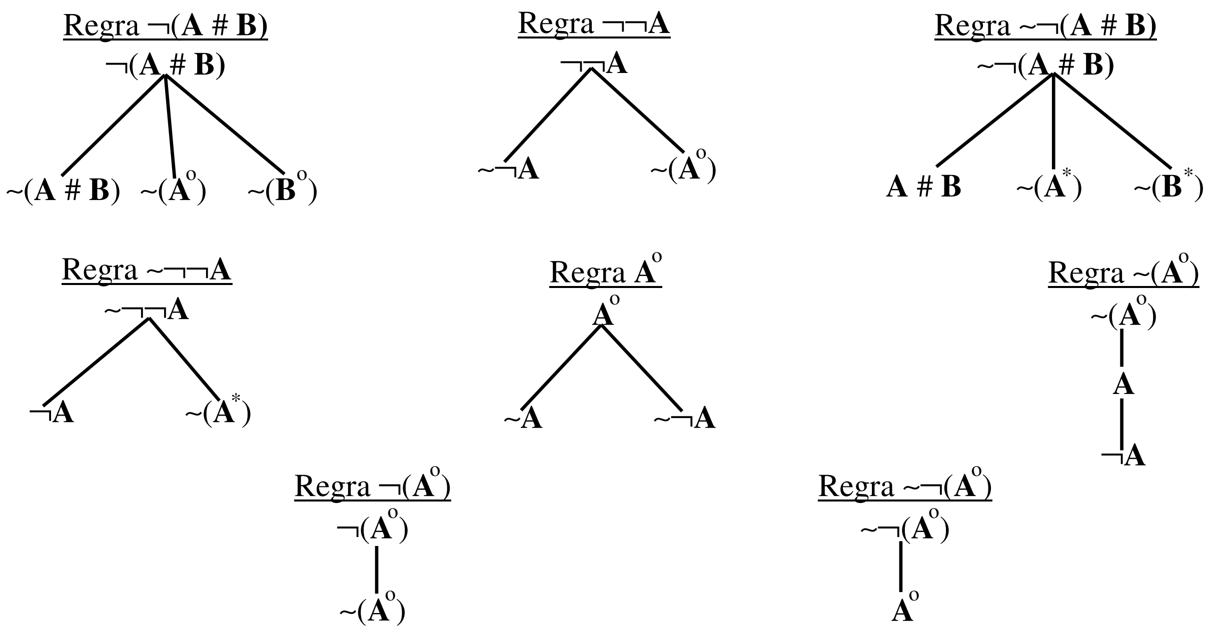
$\vdash \sim(\mathbf{A}^{o}) \leftrightarrow \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}$;

$\vdash \neg(\mathbf{A}^{o}) \leftrightarrow \sim(\mathbf{A}^{o})$.

O cálculo $\mathbf{N_1}$ é adequado à consideração de problemas de representação do conhecimento que considerem simultaneamente limitações da sensibilidade do observador e relatividade dos pontos de referência. Para maiores detalhes quanto às motivações e resultados do cálculo $\mathbf{N_1}$, veja [da Costa 2].

Apresentamos abaixo os componentes do sistema $\mathbf{SN_1}$.

As regras que não lidam com o conectivo “¬” são idênticas às regras já conhecidas para a lógica clássica, as quais já foram mostradas na seção anterior, de modo que não as repetiremos aqui. Mostraremos explicitamente apenas as regras envolvendo o conectivo “¬”.



As fórmulas excluídas do sistema são de uma das formas $\mathbf{p}$, $\sim\mathbf{p}$, $\neg\mathbf{p}$ ou $\sim\neg\mathbf{p}$, onde $\mathbf{p}$ é uma fórmula atômica. Um ramo é fechado em $\mathbf{SN_1}$ se ele contiver duas fórmulas das formas $\mathbf{A}$ e $\sim\mathbf{A}$.

Há uma simetria entre os formatos das regras dos sistemas $\mathbf{SC_1}$ (veja [Buchsbaum & Pequeno]) e $\mathbf{SP_1}$. O sistema $\mathbf{SN_1}$ toma os formatos mais complexos de ambos para as suas regras.

4. O Cálculo Dialético DL

Apresentamos abaixo os axiomas e a regra de inferência do cálculo **DL**:

- $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;
- $\dfrac{\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$;
- $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C})$;
- $\mathbf{A} \vee (\mathbf{A} \to \mathbf{B})$;
- $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$;
- $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B}$;
- $\mathbf{A}^{o} \wedge \mathbf{B}^{o} \to (\mathbf{A} \to \mathbf{B})^{o} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})^{o} \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})^{o} \wedge (\neg\mathbf{A})^{o}$;
- $\mathbf{A}^{o} \wedge \mathbf{B}^{o} \to ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A}))$;
- $\mathbf{A}^{o} \to (\neg\neg\mathbf{A} \to \mathbf{A})$;
- $\mathbf{A}^{oo} \leftrightarrow \mathbf{A}^{o}$;
- $\mathbf{A}^{o} \to (\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}) \wedge ((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}))$;
- $\neg\mathbf{A}^{o} \to (\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$.

Em **DL** o conectivo “o” é um sinal primitivo.

A negação clássica em **DL** pode ser simulada através da abreviatura

$$\sim\!\mathbf{A} \equiv \mathbf{A} \to \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o}.$$

Temos que o conectivo “~”, da forma como este foi definido acima, apresenta todas as propriedades da negação clássica. Apresentamos a seguir alguns teoremas de **DL** que foram importantes para a construção do sistema **SDL**:

$\vdash \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o} \to \mathbf{B}$;

$\vdash \mathbf{A}^{o} \to (\mathbf{A} \wedge \sim\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{A} \wedge \sim\mathbf{A})$;

$\vdash \neg(\mathbf{A}^{o}) \to (\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A}) \vee (\sim\mathbf{A} \wedge \sim\neg\mathbf{A})$;

$\vdash \neg(\mathbf{A}^{o}) \to \sim(\mathbf{A}^{o})$;

$\vdash \sim\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}^{o} \to \mathbf{A}$;

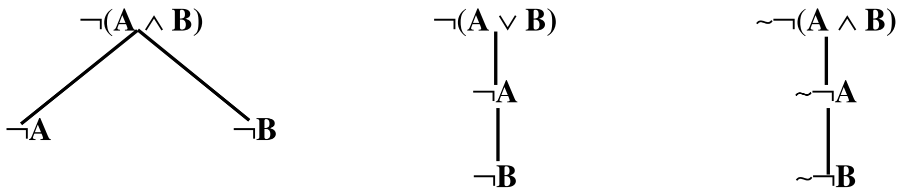
$\vdash \mathbf{A}^{o} \to (\neg\mathbf{A} \leftrightarrow \sim\mathbf{A})$.

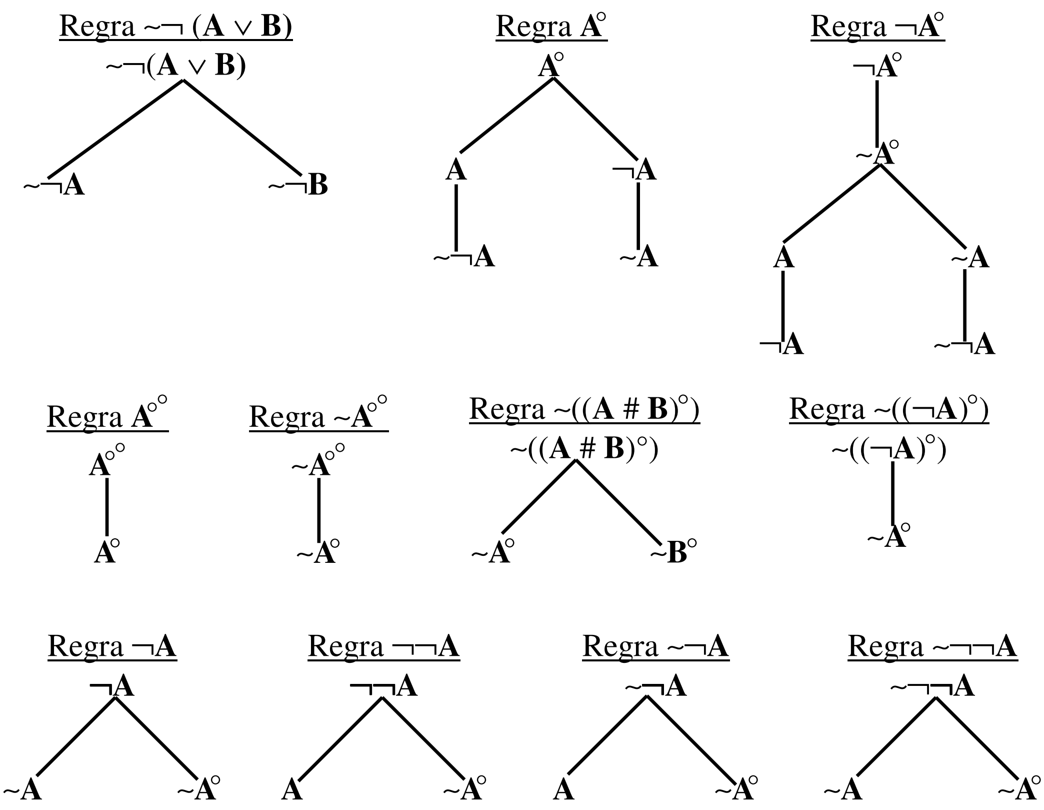
O cálculo **DL** foi elaborado para refletir alguns dos princípios da filosofia dialética. Para maiores detalhes quanto às motivações e resultados do cálculo **DL**, veja [da Costa & Wolf].

Apresentamos abaixo os componentes do sistema **SDL**.

As regras que não lidam com os conectivos “¬” ou “o” são idênticas às regras já conhecidas para a lógica clássica, de modo que não as repetiremos aqui. Mostraremos explicitamente aqui apenas as regras envolvendo os conectivos “¬” ou “o”.

<u>Regra $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$</u>   <u>Regra $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$</u>   <u>Regra $\sim\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$</u>





As fórmulas excluídas do sistema são de uma das formas $\sim(\mathbf{p}^{o})$, **p** ou **~p**, onde **p** representa uma formula atômica. Um ramo é fechado em **SDL** se ele contiver duas fórmulas das formas **A** e **~A**.

5. O Cálculo V para a Lógica Imaginária de Vasil'év

Neste cálculo o conceito de fórmulas não atômicas é muito importante, de modo que chamaremos a partir de agora tais fórmulas de moleculares.

Apresentamos abaixo os axiomas e a regra de inferência do cálculo **V**:

- $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A})$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C}))$;
- $\dfrac{\mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \to \mathbf{B}}{\mathbf{B}}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{A}$;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;
- $\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$;
- $\mathbf{A} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $\mathbf{B} \to \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$;
- $(\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}) \to (\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \to \mathbf{C})$;
- $(\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\neg\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \mathbf{A})$, onde **A** e **B** são fórmulas moleculares.

A negação clássica em **V** pode ser simulada através da abreviatura

$$\sim\mathbf{A} \equiv \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}).$$

Ternos que o conectivo "~", da forma como este foi definido acima, apresenta todas as propriedades da negação clássica. Citamos a seguir alguns teoremas de **V** que foram importantes para a construção do sistema **SV**, sendo que as letras **A** e **B** são usadas abaixo para representar fórmulas moleculares:

$\vdash (\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \to ((\mathbf{A} \to \neg\mathbf{B}) \to \neg\mathbf{A})$;

$\vdash \mathbf{A} \leftrightarrow \neg\neg\mathbf{A}$;

$\vdash \neg\mathbf{A} \leftrightarrow \sim\mathbf{A}$.

Para maiores detalhes quanto às motivações e resultados do cálculo **V**, veja [da Costa & Puga].

Apresentamos abaixo os componentes do sistema **SV**.

As regras que não lidam com o conectivo "¬" são idênticas às regras já conhecidas para a lógica clássica, de modo que não as repetiremos aqui. Mostraremos explicitamente apenas as regras envolvendo o conectivo "¬". Nas regras descritas abaixo a letra **A** designa fórmulas moleculares.

<u>Regra ¬**A**</u>

¬**A**

~**A**

<u>Regra ~¬**A**</u>

~¬**A**

A

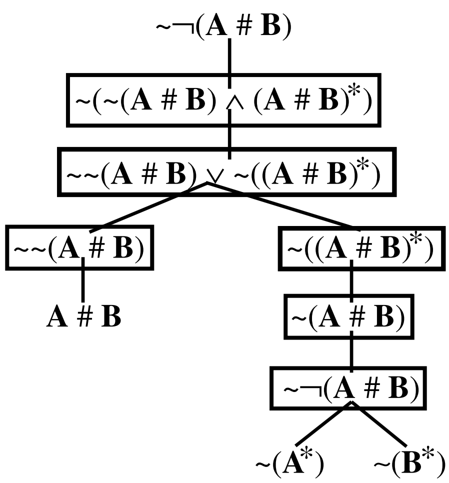
As fórmulas excluídas do sistema são de uma das formas **p**, ¬**p**, ~**p** ou ~¬**p**, onde **p** representa uma fórmula atômica. Um ramo é fechado em **SV** se ele contiver duas formulas das formas **A** e ~**A**.

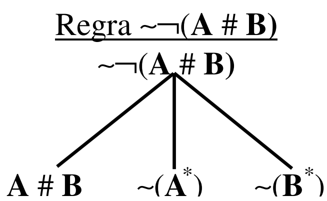
6. Técnicas para a Confecção de Regras

A construção dos sistemas de tableaux mostrados acima é importante não só pela relevância das lógicas consideradas, mas também porque nos permitiu aprimorar a nossa arte de construção de provadores. Damos abaixo algumas das técnicas que se revelaram úteis para a construção das regras de cada sistema:

- No caso da lógica considerada ser um desvio da lógica clássica, devemos procurar relações entre os conectivos com significados alterados e os outros conectivos (nos casos acima foi importante encontrar relações entre a negação e os outros conectivos).
- Procurar eliminar circularidades no desenvolvimento das árvores de prova, marcando e desenvolvendo previamente certos nós.
- Eliminar nós com fórmulas repetidas.
- Eliminar nós com fórmulas redundantes, observando as interações dos ramos em que estes nós figuram com nós com as mesmas fórmulas negadas classicamente.
- Eliminar bifurcações do tipo **A** e ~**A**.

Não dispomos de espaço no presente artigo para dar explicações ou exemplos exaustivos do que afirmamos acima, mas daremos abaixo um exemplo, descrito sucintamente, de como elaboramos a regra para fórmulas do tipo ~¬(**A** # **B**) para $\mathbf{SP_1}$. A primeira árvore representa o processo de confecção da regra, e a segunda representa a regra em sua forma final. As fórmulas circundadas representam nós eliminados da árvore da regra.





7. As Provas de Correção e Completude

Nesta seção apresentamos um esboço, valendo para todos os sistemas apresentados neste artigo, das provas de correção e completude em relação aos cálculos considerados. Em [Bell & Machover] é dada uma prova detalhada de correção e completude de um sistema de tableaux com respeito ao cálculo proposicional clássico.

Dizemos que um conjunto **Φ** de fórmulas é trivial com respeito a um dado cálculo se qualquer fórmula (de uma linguagem para este cálculo) puder ser deduzida (neste cálculo) a partir de **Φ**.

A letra grega **Φ** e a letra **A** representam respectivamente, nos enunciados dos teoremas abaixo, um conjunto finito de fórmulas e uma fórmula do domínio do sistema considerado em cada caso.

Lema da Eliminação: Se existem confutações para **Φ**,**A** e para **Φ**,~**A**, então existe uma confutação para **Φ**.
Prova: por indução sobre a construção das fórmulas; esta prova depende das regras.

Teorema da Eliminação: Se há uma confutação para **Φ** usando regras do terceiro excluído, então há uma confutação para **Φ** obtida sem o uso de tais regras.
Prova: por indução sobre o número de vezes em que as regras do terceiro excluído são usadas, usando o lema da eliminação.

Teorema da Completude: Se há uma dedução de **A** a partir de **Φ**, então há uma confutação para **Φ**, ~**A**.
Prova: por indução sobre o comprimento da dedução, usando o teorema da eliminação.

Lema da Correção: Se há uma confutação para **Φ**, então **Φ** é trivial.
Prova: por indução sobre a profundidade da confutação; esta prova depende das regras.

Teorema da Correção: Se há uma confutação para **Φ**,~**A**, então há uma dedução de **A** a partir de **Φ**.
Prova: basta usar o lema da correção.

8. Conclusões

Dispomos de métodos automáticos de prova para uma família de lógicas paraconsistentes e/ou paracompletas. Como já dispomos de uma implementação para o sistema $\mathbf{SC_1}$ (relativo ao cálculo $\mathbf{C_1}$), também dispomos, a menos de pequenas adaptações, de implementações para todos os sistemas aqui apresentados (veja [Buchsbaum], capítulo 8). Poderíamos também estender estes sistemas visando ao trabalho com quantificadores, porém não fizemos isto neste artigo por falta de espaço.

Cremos que alguns sistemas de representação do conhecimento necessitam de fragmentos de raciocínio paraconsistente e/ou paracompleto (veja [Pequeno]).

Referências

[Bell & Machover]
Bell, J. L. & Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland Publishing Company, 1977.

[Buchsbaum]
Buchsbaum, Arthur, *Um Método Automático de Prova para a Lógica Paraconsistente*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1988.

[Buchsbaum & Pequeno]
Buchsbaum, Arthur & Pequeno, Tarcisio, *Um Provador Paraconsistente*, Anais do 5º Simpósio Brasileiro de Inteligência Artificial, 1988.

[da Costa 1]
da Costa, Newton C. A., *On the theory of inconsistent formal systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic XV, 1974, pp. 197-510.

[da Costa 2]
da Costa, Newton C. A., *Logics that are both Paraconsistent and Paracomplete*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, vol. 83, pp. 29-32, 1989.

[da Costa & Marconi]
da Costa, Newton C. A. & Marconi, Diego, *A Note on Paracomplete Logic*, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, vol. 80, pp. 504-509, 1986.

[da Costa & Puga]
da Costa, Newton C. A & Puga, Leila Z., *On the Imaginary Logic of N. A. Vasil'év*, Zeitschrist für Math. Logik und Grund. der Math. XXXIV, 1988, pp. 205-511.

[da Costa & Wolf]
da Costa, Newton C. A. & Wolf, Robert G., *Studies in Paraconsistent Logic 1: the Dialectical Principle of the Unity of Opposites*, Philosophical Quarterly of Israel IX, nº 2, 1980, pp. 189-217.

[Pequeno]
Pequeno, Tarcísio, *A Logic for Inconsistent Nonmonotonic Reasoning*, a ser publicado como Technical Report do Imperial College.

[Smullyan]
Smullyan, Raymond M., *First-Order Logic*, Springer-Verlag, 1971.