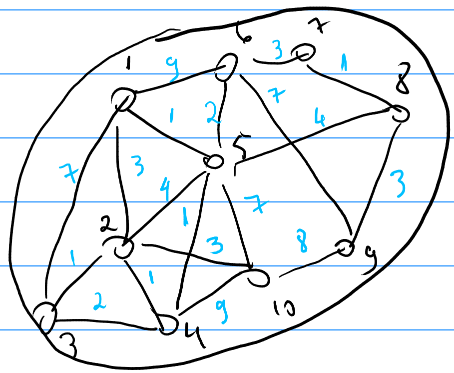
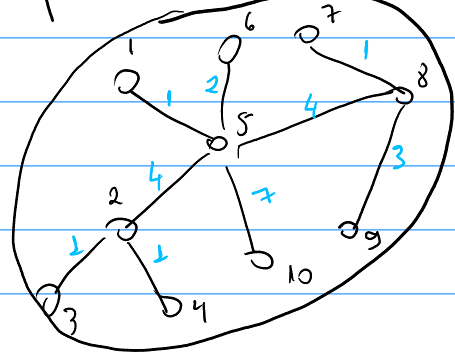
ÁRVORE GERADORA DE CUSTO MÍNIMO



Grafo $G=(V,E,c)$

$c: E \to \mathbb{Z}^+$

T



Árvore geradora

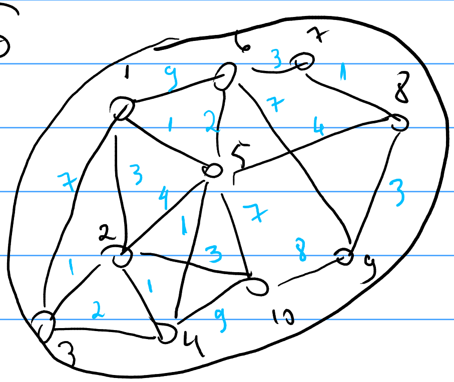
$C(T) = \sum_{ij \in T} c_{ij} = 24$

<u>Problema</u>: Dado um grafo $G=(V,E,c)$, encontre uma árvore geradora de custo mínimo.

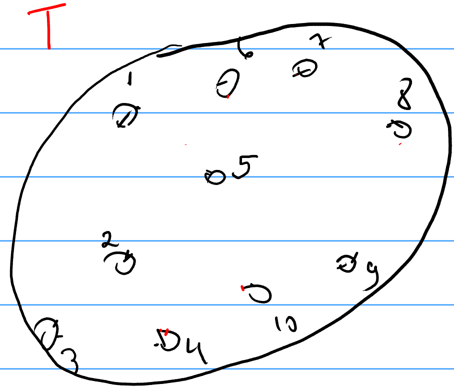
<u>Algoritmo de Kruskal</u>: Inicie com uma floresta vazia (somente com os vértices). Adicione uma aresta mais barata de tal forma que não forme um ciclo. Pare quando obter uma árvore geradora.

O ALGORITMO DE KRUSKAL FUNCIONA?

G

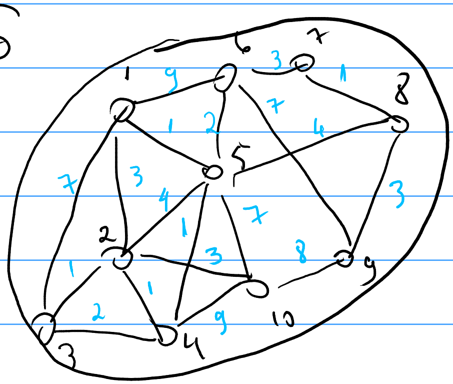


T

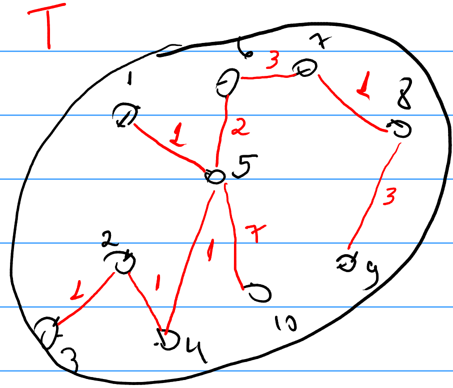


O ALGORITMO DE KRUSKAL FUNCIONA?

G



T



$C(T) = 20$

__Idéia da demonstração:__ T^* uma árvore geradora de custo mínimo.

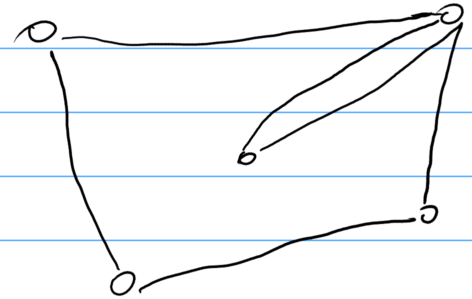
T uma árvore geradora dada pelo algoritmo.

__Objetivo:__ Deixar T^* "mais parecida" com T.

GRAFOS EULERIANOS

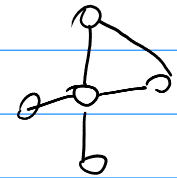
São grafos que possuem um passeio que passa por cada aresta exatamente uma vez (passeio fechado ou não)

Multigrafo G^1:



passeio fechado

G^2



passeio

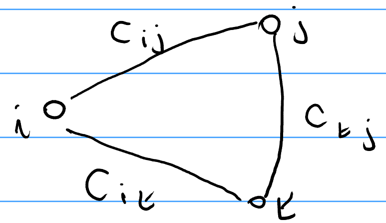
Caracterização: Um (multi)grafo possui um passeio euleriano fechado se e somente se todo vértice tem grau par.

THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM (TSP)

O Problema do Caixeiro Viajante

TSPM ≡ O problema do caixeiro viajante métrico

$c_{ij} \le c_{ik} + c_{kj}$ para toda tripla de vértices i, j, k.



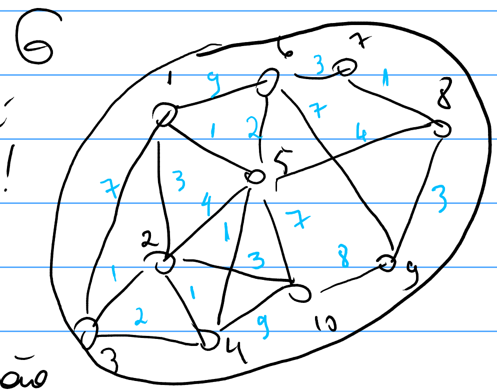
O problema do caixeiro viajante artista é um caso do TSPM!!

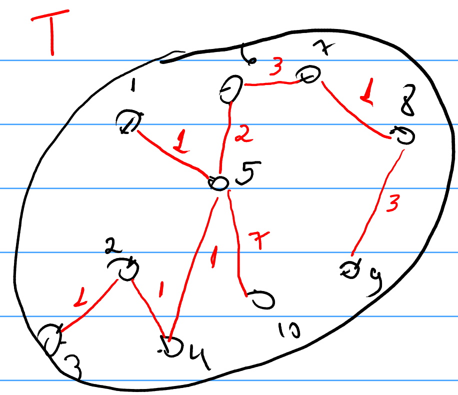
ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP

Um AA sugere uma solução com razão de aproximação do valor ótimo.

TSP-RSL(G,c) ▷ Algoritmo de Rosenkrantz, Stearns e Lewis
1. $T \leftarrow MST(G,c)$ ▷ Encontra árvore geradora de custo mínimo em G.
2. $T' \leftarrow T + E_T$ ▷ Constrói T' com uma cópia de T e com arestas duplicadas
3. $P \leftarrow$ Euler(T') ▷ Encontra passeio euleriano fechado em T'.
4. $C \leftarrow$ Atalho(P) ▷ Remove repetições no passeio euleriano P.
5. devolva C.

Aqui G é completo! Somente algumas arestas estão descritas!

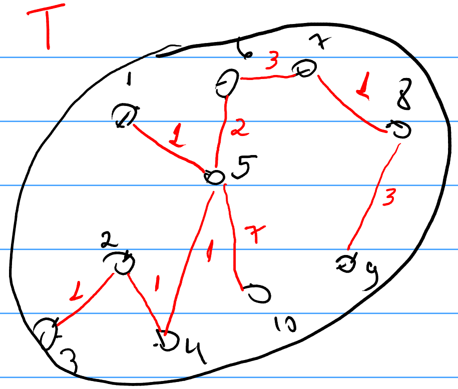




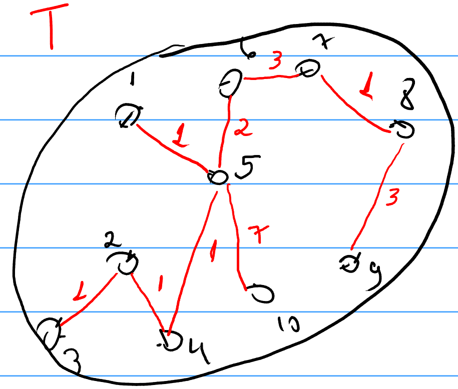
Consumo de tempo do algoritmo $O(|V|^2)$.

ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP

T

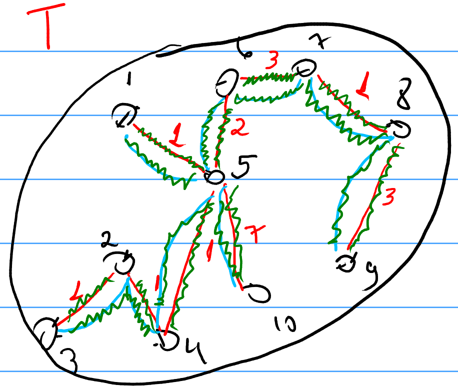


T

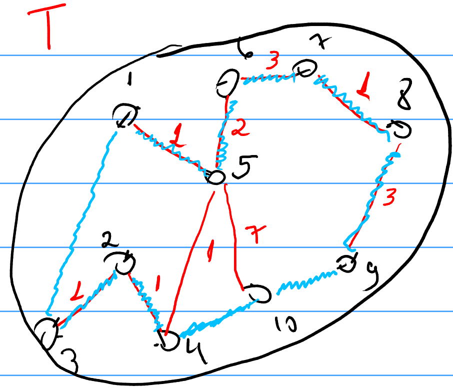


ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP

T



T



$P = (1, 5, 6, 7, 8, \boxed{9, 8, 7, 6, 5, \boxed{10}}, \boxed{5, 4}, 2, \boxed{3, 2, 4, 5, 1})$

$C = (1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 4, 2, 3, 1)$

Lembrem que o grafo é completo!

$c_{9,10} \le c_{9,8} + c_{8,7} + \dots + c_{5,10}$ / $c_{10,4} \le c_{10,5} + c_{5,4}$

$c(C) \le c(P)$

pela desigualdade triangular.

Qual é o custo de P?

$c(P) = 2\,c(T)$.

$c(C) \le c(P) = 2\,c(T) \le 2\,\mathrm{opt}(G)$

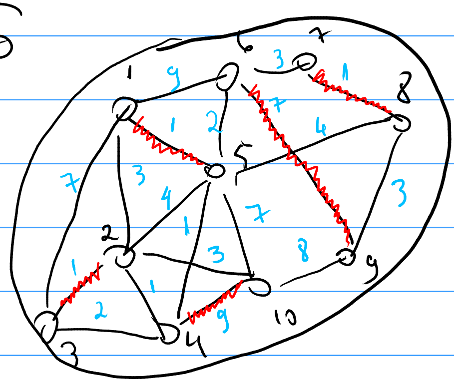
$\boxed{\text{Algoritmo é 2-aproximação!}}$

Por que?

Toda árvore geradora de custo mínimo é um limitante inferior para o valor ótimo do TSP.

EMPARELHAMENTO PERFEITO

G



Um emparelhamento de G é um conjunto de arestas de G onde os vértices de G ocorrem no emparelhamento no máximo uma vez.

Um emparelhamento é perfeito quando todos os vértices de G estão no emparelhamento.

O algoritmo de Edmonds encontra um emparelhamento perfeito de custo mínimo em tempo $O(|V|^3)$.

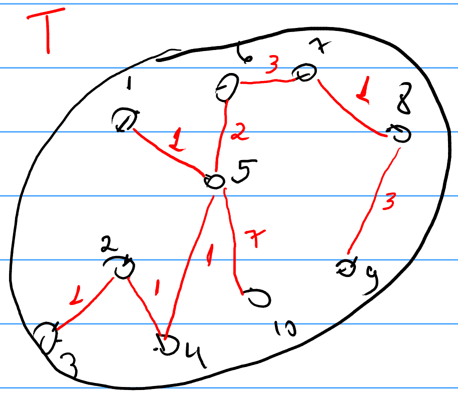
ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP

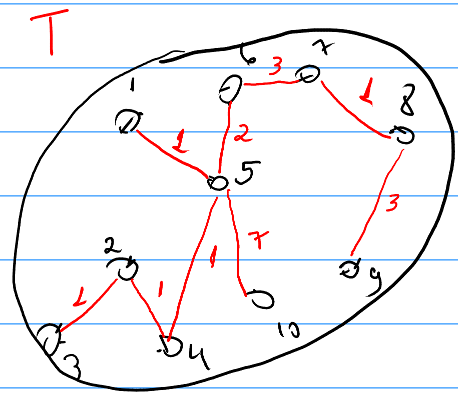
3/2 aproximação.

TSP-Christofides (G, c)

1. $T \leftarrow MST(G, c)$
2. $I \leftarrow$ conjunto de vértices de grau ímpar de T
3. $M \leftarrow$ Edmonds $(G[I], c)$ ▷ Encontra emparelhamento perfeito de custo mínimo no grafo induzido pelos vértices de I.
4. $T' \leftarrow T + M$
5. $P \leftarrow$ Euler (T')
6. $C \leftarrow$ Atalho (P)
7. devolva C

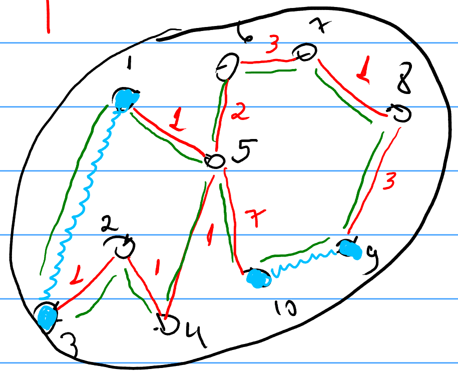
ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP



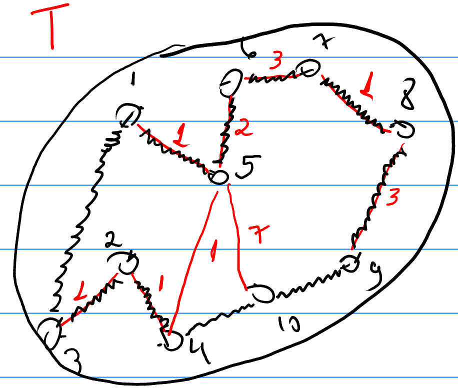


ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP

T



T



$P = (1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 5, 4, 2, 3, 1)$

$C = (1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 4, 2, 3, 1)$

Sabemos que $c(C) \leq c(P)$ pela desigualdade triangular.

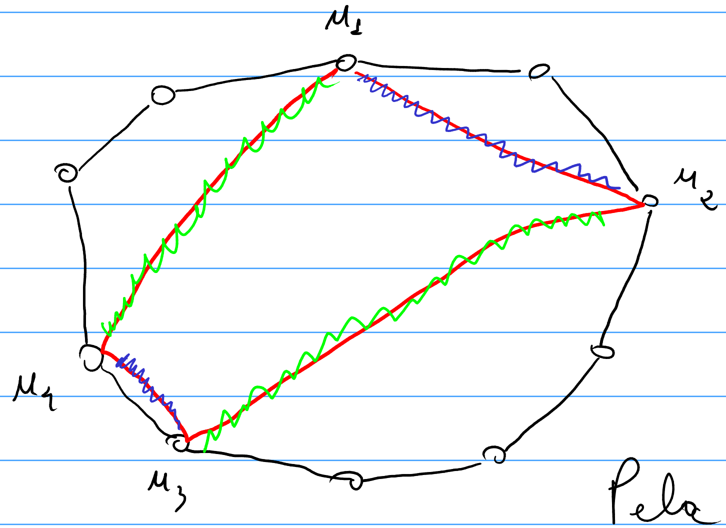
T é limitante inferior!!

Note que $c(P) = c(T) + c(M)$. Então $c(C) \leq c(P) = c(T) + c(M) \leq opt(G) + c(M)$.

Para ter $c(C) \leq 3/2\, opt(G)$ temos que mostrar que $c(M) \leq 1/2\, opt(G)$.

ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO PARA O TSP

Solução ótima para TSPM $\equiv C^*$. Sejam $u_1, \ldots, u_{2k}$ os vértices de I na ordem em que aparecem em C^*



Como G é completo, existe ciclo $D = (u_1, u_2, u_3, u_4)$!

Existem dois emparelhamentos perfeitos no ciclo D. (M' e M'')

Pela desigualdade triangular
$$c(D) \leq c(C^*)$$

emparelhamento perfeito de custo mínimo

Dessa forma, $\underbrace{2c(M)}_{\text{}} \leq c(M') + c(M'') = c(D) \leq c(C^*) = opt(G)$.

Ou seja,
$$c(M) \leq \frac{1}{2} opt(G).$$