Notas para o minicurso na SECCOM - 2019

Álvaro Junio Pereira Franco

Referências:

1. Vašek Chvátal, *Linear Programming*, 1983.
2. Laurence A. Wolsey, *Integer Programming*, 1998.
3. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest e Clifford Stein, *Introduction to Algorithms*, 2009.
4. Marco Goldbarg e Henrique Luna, *Otimização Combinatória e Programação Linear*, 2005.
5. Gurobi, `https://www.gurobi.com/`.

Título: Programação Linear e Inteira

PROBLEMAS CLÁSSICOS

Em seguida descrevemos problemas clássicos de otimização. Vamos construir um modelo de Programação Linear (PL) / Programação Inteira (PI) para cada um deles. Para isso, seguiremos o seguinte roteiro:

1. Descrição das variáveis de decisão;
2. Descrição das restrições; e
3. Descrição da função objetivo.

Na descrição das variáveis de decisão queremos nomear e dar significado para cada variável do problema. As variáveis de decisão são usadas para descrever as restrições do problema. As restrições (inequações ou equações) devem ser lineares. O problema de otimização fica bem caracterizado quando usamos as variáveis de decisão para descrever uma função objetivo linear.

O problema da dieta: Uma pessoa escolhe 6 tipos de *pratos*. Cada prato possui nutrientes e um valor (em R$). Esta pessoa gostaria de saber quanto gastaria com a sua alimentação diária para obter pelo menos 2.000 Kcal de energia, 55 gramas de proteína por dia e 800 miligramas de cálcio por dia. A tabela a seguir contém os valores de cada prato juntamente com os seus nutrientes.

Prato	Peso (g)	Energia (Kcal)	Proteína (g)	Cálcio (mg)	Valor (R$)
1. Aveia	28	110	4	2	5,00
2. Galinhada	500	550	40	20	15,00
3. Omelete	200	260	16	73	8,00
4. Leite integral	1 cp	160	8	150	2,50
5. Torta de morango	170	420	4	22	9,75
6. Feijoada	500	650	37	80	18,00

Vale ressaltar que em um dia tal pessoa não consegue comer mais que 4 pratos de aveia, 2 galinhadas, 2 omeletes, 8 copos de leite, 3 tortas de morango e 1 feijoada.

O problema do político: Um político está tentando ganhar uma eleição para prefeito de uma cidade com 100.000 eleitores que vivem no centro da cidade, 200.000 que vivem na periferia e 20.000 eleitores que vivem na zona rural da cidade. Este político gostaria de obter o voto de pelo menos metade do eleitorado de cada região, e assim, conseguir se eleger. Publicitários participantes da campanha dizem que a cada R$ 1.000 gastos em propagandas sobre algumas questões políticas fazem o político ou ganhar votos ou perder votos. A tabela abaixo mostra um estudo estatístico sobre isso. Cada entrada da tabela indica o número de milhares de votantes de cada região que o político poderia ganhar ou perder, se ele gastar R$ 1.000 em propagandas políticas.

Questões políticas	Centro	Periferia	Campo (zona rural)
1. Construção de asfalto	-2	5	3
2. Controle da criminalidade	8	6	-5
3. Subsídios do campo	1	0	10
4. Taxas sobre a gasolina	10	3	1

O político deseja saber qual é o valor mínimo que ele deve gastar em propaganda para obter 50.000 votos do centro, 100.000 votos da periferia, e 10.000 votos da zona rural.

O problema do fabricante de móveis: Um fabricante de móveis vende sofás, mesas e cadeiras. O lucro por sofá vendido é R$ 5,00, por mesa vendida é R$ 4,00 e por cadeira vendida é R$ 3,00. A tabela abaixo mostra o número de tábuas de madeira, o número de horas de estofamento e o número de horas de acabamento gastos por cada móvel fabricado.

	Tábuas	Horas de estofamento	Horas de acabamento
1. Sofá	2	4	3
2. Mesa	3	1	4
3. Cadeira	1	2	2

A fábrica possui 55 tábuas de madeira, e mão de obra para 110 horas de estofamento e 80 horas de acabamento. Quantos sofás, mesas e cadeiras devem ser produzidas para maximizar o lucro do fabricante?

O problema das ligas metálicas: Uma metalúrgica produz uma liga especial de baixa resistência (LBR) e uma liga especial de alta resistência (LAR). Para fabricar 1 tonelada de LBR precisamos de 0,5 tonelada de cobre, 0,25 tonelada de zinco e 0,25 tonelada de chumbo. Para fabricar 1 tonelada de LAR precisamos de 0,2 tonelada de cobre, 0,3 tonelada de zinco e 0,5 tonelada de chumbo. A metalúrgica possui 16 toneladas de cobre, 11 toneladas de zinco e 15 toneladas de chumbo. O preço da tonelada da LBR é R$ 3.000 e da tonelada da LAR é R$ 5.000. A metalúrgica deseja maximizar a sua receita bruta.

O problema do sítio: O proprietário de um sítio quer plantar trigo, arroz e milho. Por experiência, o proprietário sabe que a produtividade (em quilos) por metro quadrado para cada tipo de plantio é

- 0,2 Kg/m^2 para o trigo;
- 0,3 Kg/m^2 para o arroz; e
- 0,4 Kg/m^2 para o milho.

O lucro por quilo para cada tipo de plantio é

- 10,8 centavos para o trigo;
- 4,2 centavos para o arroz; e
- 2,03 centavos para o milho.

Por motivos de estoque, a produção máxima está limitada a 60 toneladas. Para atender a própria demanda, o proprietário deve plantar 400 m^2 de trigo, 800 m^2 de arroz e 10.000 m^2 de milho. A área cultivável do sítio é de 200.000m^2. O proprietário do sítio quer maximizar o seu lucro.

O problema da mistura de petróleo: Uma refinaria processa vários tipos de petróleo. A planilha abaixo descreve a quantidade máxima de barris disponíveis para cada tipo de petróleo, juntamente com o custo (em R$) de cada barril.

Tipo do petróleo	Barris disponíveis	Custo por barril (em R$)
Pet.1	3.500	19
Pet.2	2.200	24
Pet.3	4.200	20
Pet.4	1.800	27

A mistura de diferentes tipos de petróleo produz diferentes gasolinas. A especificação de cada gasolina e o preço por barril estão na tabela abaixo.

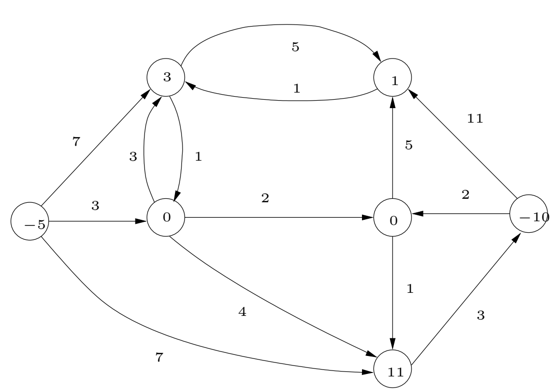
Tipo de gasolina	Especificação (Não misturar)	Preço do barril (em R$)
Super-azul	+ que 30% do Pet.1	35
	- que 40% do Pet.2	
	+ que 50% do Pet.3	
Azul	+ que 30% do Pet.1	28
	- que 10% do Pet.2	
Amarela	+ que 70% do Pet.1	22

Como devemos misturar os petróleos para produzir as gasolinas de tal forma a maximizar o lucro da refinaria?

O PROBLEMA DO TRANSPORTE

Abaixo vemos um exemplo de um rede de transporte. Cada vértice possui um valor inteiro: $< 0 \rightarrow$ fonte; $> 0 \rightarrow$ sorvedouro; e $= 0 \rightarrow$ intermediário. As fontes oferecem mercadorias (se um nó v é fonte então ele oferece o_v) e os sorvedouros demandam mercadorias (se um nó v é sorvedouro então ele demanda d_v). Podemos supor que a soma das ofertas é igual a soma das demandas. Mercadorias passam por qualquer arco $u \rightarrow v$ pagando um custo de transporte igual a $c_{u \rightarrow v}$ (por mercadoria). Como transportar as mercadorias das fontes para os sorvedouros de tal forma a pagar o menor custo de transporte possível?

Rede



MODELOS DE PL / PI

O problema da dieta:

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_i \equiv$ número de refeições do prato i a serem feitas.

2. Descrição das restrições:

a. Número mínimo e máximo de pratos consumidos por dia:

$0 \leq x_1 \leq 4$
$0 \leq x_2 \leq 2$
$0 \leq x_3 \leq 2$
$0 \leq x_4 \leq 8$
$0 \leq x_5 \leq 3$
$0 \leq x_6 \leq 1$

b. Mínimos para energia, proteína e cálcio por dia:

$110x_1 + 550x_2 + 260x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 650x_6 \geq 2.000$
$4x_1 + 40x_2 + 16x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 37x_6 \geq 55$
$2x_1 + 20x_2 + 73x_3 + 150x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$

3. Descrição da função objetivo:

$\min 5x_1 + 15x_2 + 8x_3 + 2,5x_4 + 9,75x_5 + 18x_6$

O problema do político:

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_i \equiv$ quantidade de milhares de reais gastos na propaganda i.

2. Descrição das restrições:

a. Metade dos votos do centro:

$-2x_1 + 8x_2 + x_3 + 10x_4 \geq 50$

b. Metade dos votos da periferia:

$5x_1 + 6x_2 + 3x_4 \geq 100$

c. Metade dos votos do campo:

$3x_1 - 5x_2 + 10x_3 + x_4 \geq 10$

d. Não-negatividade:

$x_i \geq 0, \ \forall \ i$

3. Descrição da função objetivo:

$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

O problema do fabricante de móveis:

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_i \equiv$ quantidade de i (= sofás, mesas, cadeiras) fabricadas.

2. Descrição das restrições:

a. Estoque de tábuas:

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 55$

b. Horas de estofamento:

$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 110$

c. Horas de acabamento:

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 80$

d. Não-negatividade:

$x_i \geq 0, \ \forall \ i$

3. Descrição da função objetivo:

$\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

O problema das ligas metálicas:

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_1 \equiv$ toneladas produzidas da LBR.
$x_2 \equiv$ toneladas produzidas da LAR.

2. Descrição das restrições:

a. Estoque de 16 Ton. de cobre:

$0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 16$

b. Estoque de 11 Ton. de zinco:

$0,25x_1 + 0,3x_2 \leq 11$

c. Estoque de 15 Ton. de chumbo:

$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 15$

d. Não-negatividade:

$x_i \geq 0, \ \forall \ i$

3. Descrição da função objetivo:

$\max 3.000x_1 + 5.000x_2$

O problema do sítio:

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_t \equiv$ área (em m^2) para plantio de trigo.
$x_a \equiv$ área (em m^2) para plantio de arroz.
$x_m \equiv$ área (em m^2) para plantio de milho.

2. Descrição das restrições:

a. Própria demanda:

$x_t \geq 400$
$x_a \geq 800$
$x_m \geq 10.000$

b. Área cultivável de 200.000 m^2:

$x_t + x_a + x_m \leq 200.000$

c. Limite de 60 Ton. para armazenamento:

$0,2x_t + 0,3x_a + 0,4x_m \leq 60.000$

d. Restrições de não-negatividade:

$x_i \geq 0, \ \forall \ i$

3. Descrição da função objetivo:

max $(10,8 \times 0,2)x_t + (4,2 \times 0,3)x_a + (2,03 \times 0,4)x_m -$ (valor da própria demanda)

O problema da mistura de petróleo:

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_{ij} \equiv$ número de barris de petróleo do tipo j $(= 1, 2, 3, 4)$ que serão destinados a produção da gasolina i $(= A, Z, S)$ - Amarela, Azul e Super-azul, respectivamente.

2. Descrição das restrições:

a. Quantidade de barris de Pet.j disponíveis para $j = 1, 2, 3, 4$:

$x_{A1} + x_{Z1} + x_{S1} \leq 3.500$
$x_{A2} + x_{Z2} + x_{S2} \leq 2.200$
$x_{A3} + x_{Z3} + x_{S3} \leq 4.200$
$x_{A4} + x_{Z4} + x_{S4} \leq 1.800$

b. Especificação de mistura para gasolina Super-azul:

$x_{S1} \leq 0,3(x_{S1} + x_{S2} + x_{S3} + x_{S4})$
$x_{S2} \geq 0,4(x_{S1} + x_{S2} + x_{S3} + x_{S4})$
$x_{S3} \leq 0,5(x_{S1} + x_{S2} + x_{S3} + x_{S4})$

c. Especificação de mistura para gasolina Azul:

$x_{Z1} \leq 0,3(x_{Z1} + x_{Z2} + x_{Z3} + x_{Z4})$
$x_{Z2} \geq 0,1(x_{Z1} + x_{Z2} + x_{Z3} + x_{Z4})$

d. Especificação de mistura para gasolina Amarela

$x_{A1} \leq 0,7(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$

e. Não-negatividade:

$x_{ij} \geq 0, \ \forall\, i, j$

3. Descrição da função objetivo:

max $22(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 28(x_{Z1} + x_{Z2} + x_{Z3} + x_{Z4}) + 35(x_{S1} + x_{S2} + x_{S3} + x_{S4}) - 19(x_{A1} + x_{Z1} + x_{S1}) - 24(x_{A2} + x_{Z2} + x_{S2}) - 20(x_{A3} + x_{Z3} + x_{S3}) - 27(x_{A4} + x_{Z4} + x_{S4})$

O PROBLEMA DO TRANSPORTE

1. Descrição das variáveis de decisão:

$x_{ij} \equiv$ quantidade de mercadoria que passa pelo arco $i \to j$.

2. Descrição das restrições:

a. A quantidade de mercadoria que "entra" em cada nó intermediário é igual a quantidade de mercadoria que "sai" deste nó.

$$\sum_{ij \in Arcos} x_{ij} = \sum_{jk \in Arcos} x_{jk}, \text{ para cada nó } j \text{ intermediário.}$$

b. A quantidade de mercadoria que "entra" em cada nó fonte mais a oferta deste nó é igual a quantidade de mercadoria que "sai" deste nó.

$$\sum_{ij \in Arcos} x_{ij} + o_j = \sum_{jk \in Arcos} x_{jk}, \text{ para cada nó } j \text{ fonte.}$$

c. A quantidade de mercadoria que "entra" em cada nó fonte menos a quantidade de mercadoria que "sai" deste nó é igual a sua demanda.

$$\sum_{ij \in Arcos} x_{ij} - \sum_{jk \in Arcos} x_{jk} = d_j, \text{ para cada nó } j \text{ sorvedouro.}$$

3. Descrição da função objetivo:

$$\min \sum_{ij \in Arcos} c_{ij} x_{ij}$$

GUROBI

Gurobi é uma ferramenta que resolve problemas de otimização. Uma maneira de utilizá-la é submeter para ela um PL/PI como entrada. Se existir solução ótima, o Gurobi encontrará e mostrará ao usuário. Um arquivo .lp pode ser dado como entrada para a ferramenta. A formatação da entrada poderá ser consultada no arquivo que acompanha este texto ou na documentação da ferramenta (veja URL abaixo).

Para iniciar o Gurobi digite no terminal `gurobi.sh`. Depois carregue um arquivo .lp fazendo `m = read(''arquivo.lp'')`. Para resolver o modelo faça `m.optimize()`. Para escrever a solução faça `m.x`.

A seguir listamos algumas URL's que julgamos interessantes:

Documentação do Gurobi
1. `https://www.gurobi.com/documentation/`

LP format
2. `https://www.gurobi.com/documentation/8.1/refman/lp_format.html`

Reading and optimizing a model
3. `https://www.gurobi.com/documentation/8.1/quickstart_mac/reading_and_optimizing_a_m.html`

Load and solve a model from a file
4. `https://www.gurobi.com/documentation/8.1/examples/load_and_solve_a_model_fro.html`

Printing the solution
5. `https://www.gurobi.com/documentation/7.5/quickstart_windows/matlab_printing_the_soluti.html`