7. Análise de Algoritmos

✔ O estudo de Estruturas de Dados é basicamente o **estudo de métodos de organização de grandes quantidades de dados**.

Estes métodos incluem:
- formas de organizá-los (estruturas) e
- técnicas para manipulá-los (algoritmos básicos).

- Pilhas, Listas e Filas são estruturas de dados típicas.
- Para manipular estas estruturas, como inserir elementos, retirar elementos, ordenar elementos, necessitamos de algoritmos.
- Estes algoritmos podem ser implementados de muitas maneiras. Algumas simples e diretas outras não tão simples, porém engenhosas e outras ainda complicadas e envolvendo muitas operações.
- Quando trabalhamos com quantidades muito grandes de dados, um projeto ruim de um algoritmo para manipular uma estrutura de dados pode resultar num programa que tem um tempo de execução inviável.

✔ Quando estudamos algoritmos, um aspecto que devemos considerar , além de sua correção, é a **análise da sua eficiência**.

A **análise de algoritmos** pode ser definida como o **estudo da estimativa do tempo de execução dos algoritmos** (M.A.Weiss).

7.1. Idéias básicas

- Um algoritmo é um conjunto finito de passos que devem ser seguidos com um conjunto de dados de entrada para se chegar a solução de um problema.
- Um problema pode geralmente ser resolvido por muitos algoritmos diferentes.

  Ex.: Cálculo da potência x^n de um número inteiro x.

```
inteiro potência (x, n)
inteiro x, y, n, j;
início
i <- n;
y <- 1;
enquanto (i > 0) faça
   y <- y * x;
   i <- i - 1;
fim enquanto
retorne y;
fim

inteiro potência_recursiva (x, n)
início
se (n = 1) então retorne x;
y <- potência_recursiva ( x, (n div 2) );
se (ímpar(n)) então
   retorne x*y*y;
senão
   retorne y*y;
fim se
fim
```

✔ O fato de existir um algoritmo para resolver um problema, não implica necessariamente que este problema possa realmente ser resolvido na prática. Há restrições de tempo ou de espaço de memória. Ex.: Calcular todas as possíveis partidas de xadrez.

✔ Um algoritmo é uma idéia abstrata de como resolver um determinado problema. Ele é, a princípio, independente da máquina que o executará e de suas características.

- Um programa é uma implementação de um algoritmo em uma linguagem particular e que será executado em um computador particular.
- Um programa está sujeito às limitações físicas da máquina onde será executado, como capacidade de memória, velocidade do processador e dos periféricos, etc.

✔ O tempo que a execução de um programa toma é uma grandeza física que depende:

  - Do tempo que a máquina leva para executar uma instrução ou um passo de programa.
  - Da natureza do algoritmo, i.é, de quantos passos são necessário para se resolver o problema para um dado.
  - Do tamanho do conjunto de dados que constitui o problema.

7.2. Problema básico na Análise de Algoritmos:

✔ Necessitamos definir uma forma de criar uma medida de comparação entre diferentes algoritmos que resolvem um mesmo problema, para:

- Podermos saber se são viáveis
- Podermos saber qual é o melhor algoritmo para a solução do problema.

✔ Para fazermos isso, **abstraímos de um computador em particular** e assumimos que a execução de todo e qualquer passo de um algoritmo leva um tempo fixo e igual a uma unidade de tempo.

- O tempo de execução em um computador particular não é interessante.
- Muito mais interessante é uma comparação relativa entre algoritmos.

✔ **Modelo de computação:** As operações são todas executadas seqüencialmente. A execução de toda e qualquer operação toma uma unidade de tempo. A memória do computador é infinita.

✔ Assim nos sobram duas grandezas:

✔Tempo = número de operações executadas

✔Quantidade de dados de entrada.

7.3. Complexidade de Tempo

✔ Podemos expressar de forma abstrata a eficiência de um algoritmo, descrevendo o seu tempo de execução como uma função do tamanho do problema (quantidade de dados). Isto é chamado de complexidade de tempo
Exemplo: Ordenação de um Vetor

7.3.1. Primeiro caso: Bubblesort

Bubblesort é o mais primitivo dos métodos de ordenação de um vetor. A idéia é percorrer um vetor de n posições n vezes, a cada vez comparando dois elementos e trocando-os caso o primeiro seja maior que o segundo:

```
ordenaBolha    /* Bubblesort */
   inteiro i,j,x,a[n];
   início
      para i de 1 até n faça
         para j de 2 até n faça
            se (a[j-1]>a[j]) então
               x <- a[j-1];
               a[j-1] <- a[j];
               a[j] <- x;
            fim se
         fim para
      fim para
   fim
```

A comparação `(a[j-1]>a[j])` vai ser executada `n*(n-1)` vezes. No caso de um vetor na ordem inversa, as operações da atribuição triangular poderão ser executadas até 3*n*(n-1) vezes, já uma troca de elementos não significa que um dos elementos trocados tenha encontrado o seu lugar definitivo.

7.3.2. Segundo caso: StraightSelection

O método da seleção direta é uma forma intuitiva de ordenarmos um vetor: escolhemos o menor elemento do vetor e o trocamos de posição com o primeiro elemento.

Depois começamos do segundo e escolhemos novamente o menor dentre os restantes e o trocamos de posição com o segundo e assim por diante.

```
seleçãoDireta
   inteiro i,j,k,x,a[n];
   início
      para i de 1 até n-1 faça
         k <- i;
         x <- a[i];
         para j de i +1 até n faça
            se (a[j] < x) então
               k <- j;
               x <- a[k];
            fim se
         fim para
         a[k] <- a[i];
         a[i] <- x;
      fim para
   fim
```

Neste algoritmo o número de vezes que a comparação **(a[j] < x)** é executada é expresso por (n-1)+(n-2)+...+2+1 = (n/2)*(n-1).

O número de trocas **a[k] <- a[i]; a[i] <- x** é realizado no pior caso, onde o vetor está ordenado em ordem inversa, somente n-1 vezes, num total de 2*(n-1).

7.3.3. Interpretação

Como ja´foi dito, a única forma de se poder comparar dois algoritmos é descrevendo o seu comportamento temporal em função do tamanho do conjunto de dados de entrada, $T_{algoritmo} = f(n)$, onde n é o tamanho dos dados.

Assim, se tomarmos as operações de troca de valores como critério-base, podemos dizer que:

$T_{bubblesort}$ = **`3*n*(n-1)`** sempre e
$T_{straightselection}$ = **`2*(n-1)`** para o pior caso.

- ✔ O que nos interessa é o comportamento assintótico de f(n), ou seja, como f(n) varia com a variação de n.
- ✔ Razão: Para mim é interessante saber como o algo-ritmo se comporta com uma quantidade de dados realistica para o meu problema e o que acontece quando eu vario esses dados.

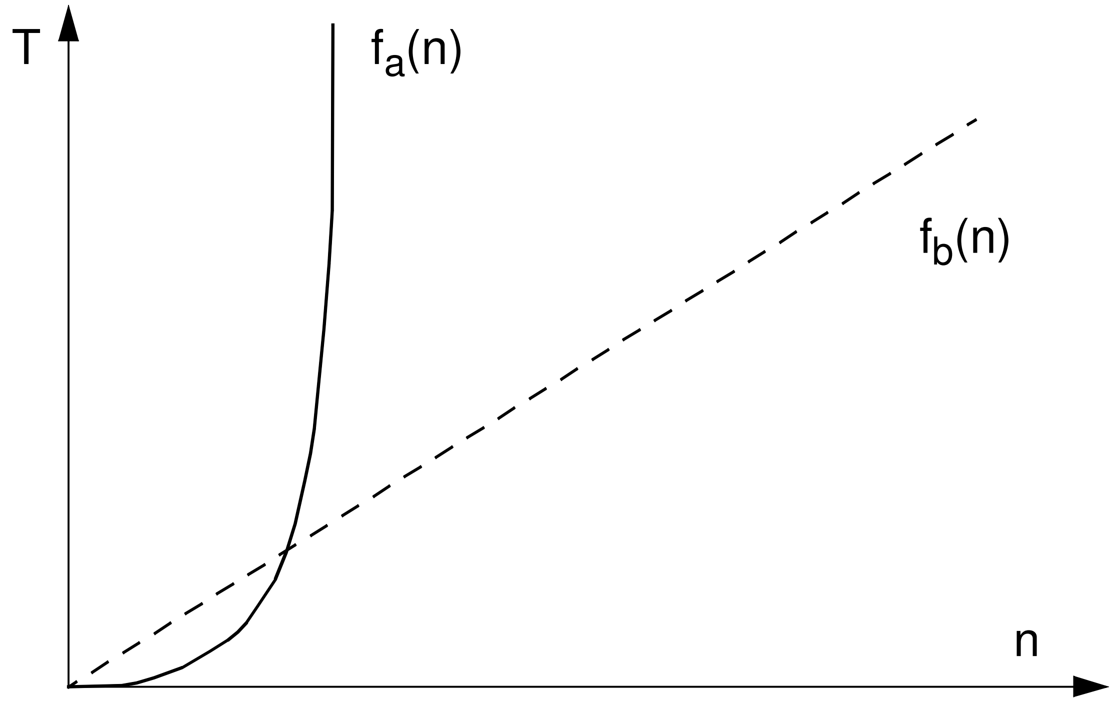
<u>**Exemplo**</u>: Se eu tenho dois algoritmos a e b para a solução de um pro-blema. Se a complexidade de um é expressa por $f_a(n) = n^2$ e a do outro por $f_b(n) = 100*n$. Isto significa que o algoritmo a cresce quadrati-camente (uma parábola) e que o algoritmo b cresce linearmente (embora seja uma reta bem inclinada).

Se eu uso esses algoritmos para um conjunto de 30 dados, o segundo com T_b=3000 é pior do que o primeiro com T_a=900.

Se eu os uso para um conjunto de 30.000 dados, porém, terei T_a=900.000.000 e T_b=3.000.000.

✔ Isto porque o **comportamento assintótico** dos dois é bem diferente.

Podemos ver isto expresso no gráfico abaixo:



7.4. Complexidade de Tempo

O gráfico acima nos mostra qual é o aspecto essecial que deve ser expresso pelo cálculo de complexidade:

Qual é o comportamento assintótico **predominante** de um algoritmo em função do **tamanho** do conjunto de dados a ser processado.

Por exemplo:
- se é linear,
- polinomial (quadrático, cúbico, etc),
- logarítmico ou
- exponencial.

7.4.1. Análise Assintótica

- Para a análise do comportamento de algoritmos existe toda uma terminologia própria.
- Para o cálculo do comportamento de algoritmos foram desenvovlidas diferentes medidas de complexidade.
- A mais importante delas e que é usada na prática é chamada de **Ordem de Complexidade** ou Notação-O ou ***Big-Oh***.
- <u>**Definição**</u> (*Big-Oh*): **T(n) = O(f(n))** se existem constantes c e n_0 tais que $T(n) \leq c.f(n)$ quando $n \geq n_0$.
- A definição indica que existe uma constante c que, faz com que $c.f(n)$ seja sempre pelo menos tão grande quanto T(n), desde que n seja maior que um n_0.
- Em outras palavras: A Notação-O me fornece a Ordem de Complexidade ou a Taxa de Crescimento de uma função .
- Para isso, não consideramos os termos de ordem inferior da complexidade de um algoritmo, apenas o termo predominante.

  <u>Exemplo</u>: Um algoritmo tem complexidade $T(n) = 3n^2 + 100n$. Nesta função, o segundo termo tem um peso relativamente grande, mas a partir de $n_0 = 11$, é o termo n^2 que "dá o tom" do crescimento da função: uma parábola. A constante 3 também tem uma influência irrelevante sobre a taxa de crescimento da função após um certo tempo.

  Por isso dizemos que este algoritmo é **da ordem de n^2** ou que **tem complexidade $O(n^2)$**.

7.4.2. Diferentes Tempos de Execução

Problema da Subseqüência de Soma Máxima: Dada uma seqüência de números a_1, a_2, ... , a_n, positivos ou negativos, encontre uma subseqüência a_j,...,a_k dentro desta seqüência cuja soma seja máxima. A soma de uma seqüência contendo só números negativos é por definição 0.

Função	*Nome*
1	constante
$log\ n$	logaritmica
$log^2\ n$	log-quadrática
n	linear
$n\ log\ n$	$n\ log\ n$
n^2	quadrática
n^3	cúbica
2^n	exponencial

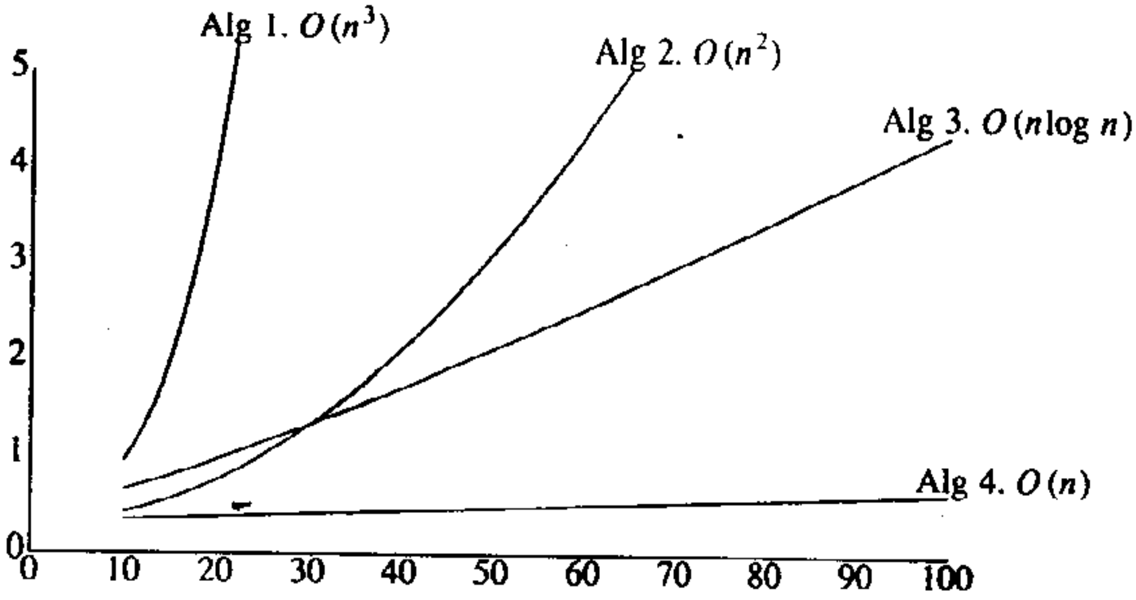
Exemplo: Para a seqüência -2, 11, -4, 13, -5, -2, a resposta é 20 (a_2,a_3,a_4).

Este problema oferece um bom exemplo para o estudo de como diferentes algoritmos que resolvem o mesmo problema possuem diferentes comportamentos, pois para ele existem muitas soluções diferentes.

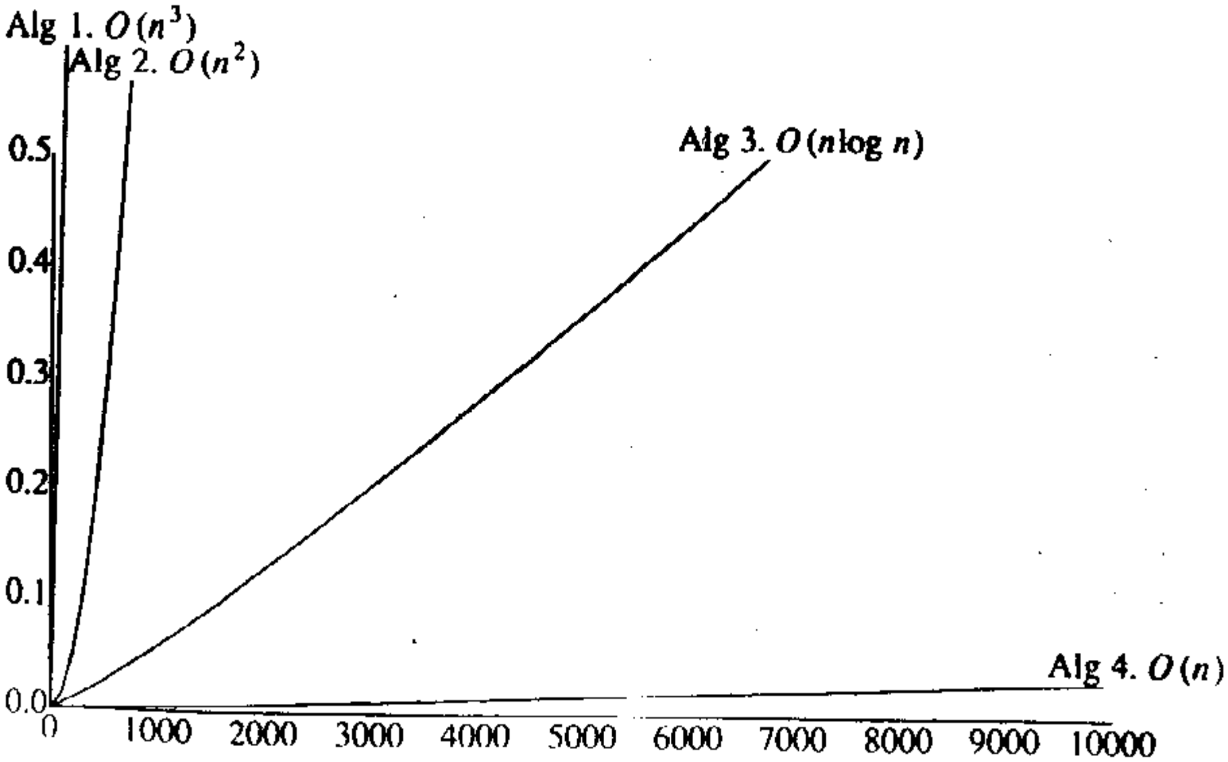
Abaixo, um exemplo dos tempos de execução dos diferentes algoritmos da subseqüência de maior soma:

Algorithm		1	2	3	4
Time		$O(n^3)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
Input Size	n = 10	0.00103	0.00045	0.00066	0.00034
	n = 100	0.47015	0.01112	0.00486	0.00063
	n = 1,000	448.77	1.1233	0.05843	0.00333
	n = 10,000	NA	111.13	0.68631	0.03042
	n = 100,000	NA	NA	8.0113	0.29832

7.4.3. Alguns exemplos do comportamento de diferentes algoritmos para a solução do problema da subseqüência de soma máxima:



Acima: Visão em detalhe dos algoritmos com poucos dados
Abaixo: Visão macroscópica do comportamento dos algoritmos



7.5. Cálculo da Complexidade de Tempo

Um exemplo intuitivo: Cálculo de $\sum_{i=1}^{n} i^3$

```
    inteiro somaCubos (inteiro n)
        inteiro i, somaParcial;
        início
1           somaParcial <- 0;
2           para i de 1 até n faça
3               somaParcial <- somaParcial + i * i * i;
4           fim para
5           retorne somaParcial;
        fim
```

Análise:

- As declarações não tomam tempo nenhum.
- A linha 4 também não toma tempo nenhum.
- As linhas 1 e 5 contam uma unidade de tempo cada.
- A linha 3 conta 4 unidades de tempo (2 multiplicações, uma adição e uma atribuição) e é executada n vezes, contando com um total de 4n unidades de tempo.
- A linha 2 possui custos implícitos de de inicializar o i ,testar se é menor que n e incrementá-lo. Contamos 1 unidade para sua inicialização, n + 1 para todos os testes e n para todos os incrementos, o que perfaz 2n + 2 unidades de tempo.
- O total perfaz 6n + 4 unidades de tempo, o que indica que o algoritmo é O(n), da Ordem de Complexidade n, ou seja, linear.

7.5.1. Regras para o cálculo

1. **Laços** Para-Faça e outros:
   O tempo de execução de um laço é, no máximo, a soma dos tempos de execução de todas as instruções dentro do laço (incluindo todos os testes) multiplicado pelo número de iterações.

2. **Laços Aninhados**:
   Analise-os de dentro para fora.
   O tempo total de execução de uma instrução dentro de um grupo de laços aninhados é o tempo de execução da instrução multiplicado pelo produto dos tamanhos de todos os laços.
   Exemplo $O(n^2)$:

```
para i de 1 até n
   para j de 1 até n
      k <- k + 1;
   fim para
fim para
```

3. **Instruções Consecutivas:**
   Estes simplesmente somam, sendo os termos de ordem menor da soma ignorados.
   Exemplo $O(n)+O(n^2)=O(n^2)$:

```
para i de 1 até n
   a[i] <- 0;
fim para
para i de 1 até n
   para j de 1 até n
      a[i] <- a[j] + k + 1;
   fim para
fim para
```

4. **IF/THEN/ELSE:**

Considerando-se o fragmento de código abaixo:

```
se cond então
     expresssão₁
senão
     expressão₂
fim se
```

o tempo de execução de um comando IF/THEN/ELSE nunca é maior do que o tempo de execução do teste **cond** em si mais o tempo de execução da maior dentre as expressões **expressão**$_1$ e **expressão**$_2$.

Ou seja: se **expressão**$_1$ é $O(n^3)$ e **expressão**$_2$ é $O(n)$, então o teste é $O(n^3) + 1 = O(n^3)$.

5. **Chamada a Funções:**

Segue obviamente a mesma regra dos laços aninhados: analise tudo de dentro para fora. Ou seja: para calcular a complexidade de um programa com várias funções, calcule-se primeiro a complexidade de cada uma das funções e depois considere-se cada uma das funções como uma instrução com a complexidade de função.

6. **Recursão**:

Recursão é a parte mais difícil da análise de complexidade.
Na verdade existem dois casos: Muitos algoritmos recursivos mais simples podem ser "linearizados", substituindo-se a chamada recursiva por alguns laços aninhados ou por uma outra subrotina extra e eventualmente uma pilha para controlá-la. Neste caso, o cálculo é simples e pode ser feito depois da "linearização".
Em muitos algoritmos recursivos isto não é possível, neste caso obtemos uma relação de recorrência que tem de ser resolvida e é uma tarefa matemática menos trivial.

Exemplo de cálculo de complexidade em recursão: Fatorial

```
inteiro Fatorial (inteiro n)
    início
       se n <= 1 então
           retorne 1;
       senão
          retorne ( n * Fatorial ( n - 1 ) );
       fim se
    fim
```

O exemplo acima é realmente um exemplo pobre de recursão e pode ser "iterativisado" de forma extremamente simples com apenas um laço para-faça:

```
inteiro FatorialIterativo (inteiro n)
    inteiro i, fatorial;
    início
       fatorial <- 1;
       para i de 2 até n faça
           fatorial <- fatorial * i;
       fim para
       retorne fatorial;
    fim
```

A complexidade de FatorialIterativo pode então ser facilmente calculada e é evidente que é O(n).

O caso dos números de Fibonacci abaixo não é tão simples e requer a resolução de uma relação de recorrência:

```
inteiro Fibonacci (inteiro n)
   início
      se n <= 1 então
         retorne 1;
      senão
         retorne ( Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2) );
      fim se
   fim
```

Observando o algoritmo, vemos que para n>= 2 temos um tempo de execução T(n) = T(n-1)+T(n-2)+2.

A resolução desta relação nos mostra que Fibonacci é $O((\frac{3}{2})^n)$

7.5.2. Logaritmos e Outros no Tempo de Execução

✔ O aspecto mais complexo na análise de complexidade centra-se em torno do logaritmo.

Para analisar-se um algoritmo de complexidade logarítmica e chegar-se a um resultado correto sobre a sua ordem exata de complexidade é necessária uma certa experiência e algum “jeito” matemático. Algumas regras de aproximação podem ser dadas:

✔ Algoritmos seguindo a técnica Dividir-Para-Conquistar são muitas vezes **n log n**.

- Quando um algoritmo, em uma passada de uma iteração toma o conjunto de dados e o divide em duas ou mais partes, tomando cada uma dessas partes e a processando separada e recursivamente e depois juntando os resultados, este algoritmo utiliza a técnica dividir-para-conquistar e será possivelmente **n log n**.

✔ Um algoritmo é **log n** se ele toma um tempo constante O(1) para dividir o tamanho do problema. Usualmente pela metade.

- A pesquisa binária já vista é um exemplo de **log n**.

✔ Se o algoritmo toma tempo constante para reduzir o tamanho do problema em um tamanho constante, ele será O(n).

✔ Algoritmos combinatórios são exponenciais: Se um algoritmo testa todas as combinaçoes de alguma coisa, ele será exponencial.
Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

7.6. Checando a sua análise

Uma vez que a análise de complexidade tenha sido executada, é interessante verificar-se se a resposta está correta e é tão boa quanto possível.

Uma forma de se fazer isto é o procedimento pouco matemático de se codificar o trecho de algoritmo cuja complexidade se tentou descrever e verificar se o tempo de execução coincide com o tempo previsto pela análise.

Quando n dobra, o tempo de execução se eleva de um fator 2 para algoritmos lineares, fator 4 para quadráticos e 8 para cúbicos.

Programas logarítmicos só aumentam o seu tempo de execução de uma constante a cada vez que n dobra. Algoritmos de O(n log n) tomam um pouco mais do que o dobro do tempo sob as mesmas circunstâncias.

Estes aumentos podem ser difíceis de se detectar se os termos de ordem inferior têm coeficientes relativamente grandes e n não é grande o suficiente. Um exemplo é o pulo tempo de execução para n=10 do para n=100 em algumas implementações do problema da subseqüência de soma máxima.

Distinguir programas n log n de programas lineares só em evidência de tempo de execução pode também ser muito difícil.

Uma boa praxe é, caso o programa não seja exponencial (o que você vai descobrir muito rápido), fazer alguns experimentos com conjuntos maiores de dados de entrada.

7.7. Exercício: Calcule a Complexidade

ALGORITMO 4.10 : FLOYD MODIFICADO

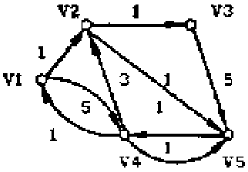
Considere a matriz de custos D[n,n] definida como no algoritmo de **Floyd**. O algoritmo produzirá uma matriz A[n,n], com comprimentos dos menores caminhos e ainda uma matriz R[n,n] que fornece o vértice k, que é o primeiro vértice a ser visitado no menor caminho de v_i até v_j .

```
INÍCIO
  Para i = 1 até n faça
    Para j = 1 até n faça
      A[i,j] ⟵ D(i,j);
      R[i,j] ⟵ 0 ;
  Para i = 1 até n faça
    A[i,i] ⟵ 0;
  Para k = 1 até n faça
    Para i = 1 até n faça
      Para j = 1 até n faça
        Se A[i,k] + A[k,j] < A[i,j] então faça
          A[i,j] ⟵ A[i,k] + A[k,j];
          R[i,j] ⟵ k ;
FIM;
```

■

EXEMPLO

Considere o grafo e sua matriz de custos D, abaixo.



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 5 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 5 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo algoritmo de Floyd pode-se obter a matriz A, com os comprimentos dos menores caminhos e a matriz de roteamento R.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_2 & v_5 & v_2 \\ v_5 & v_2 & v_3 & v_5 & v_5 \\ v_5 & v_5 & v_3 & v_5 & v_5 \\ v_1 & v_1 & v_1 & v_4 & v_5 \\ v_4 & v_4 & v_4 & v_4 & v_5 \end{bmatrix}$$

Agora, por exemplo, para determinar a rota de v_2 a v_1, toma-se R[2,1] = v_5 , R[5,1] = v_4 , R[4,1] = v_1 .

Logo, a rota de v_2 a v_1 é $v_2 - v_5 - v_4 - v_1$.