INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para Computação

Prof. Mauro Roisenberg

UFSC - CTC - INE

Lógica Matemática

- Lógica é uma **ciência** de índole **Matemática** e fortemente ligada à **Filosofia**. Já que o pensamento é a manifestação do conhecimento, e que o conhecimento busca a verdade, é preciso estabelecer algumas regras para que essa meta possa ser atingida. Assim, a lógica é o ramo da filosofia que cuida das regras do bem pensar, ou do pensar correto, sendo, portanto, um instrumento do pensar. (Wikipedia)
- Lógica é a disciplina que lida com métodos de raciocínio. A Lógica provê regras e técnicas para determinar se um dado argumento é válido.
- Lógica Matemática é o uso da lógica formal para estudar o **raciocínio matemático**.

LÓGICA MATEMÁTICA

- "***Lógica Matemática é uma ferramenta fundamental na definição de conceitos computacionais.***- Diretrizes curriculares do MEC para Cursos de Computação e Informática.
- Aplicações em Ciência da Computação:
  - Projeto de Circuitos Lógicos,
  - Inteligência Artificial,
  - Construção e Verificação de Algoritmos.

NOTAS HISTÓRICAS

- Os primeiros princípios referentes à Lógica podem ser atribuídos a Aristóteles.
- No livro primeiro Analítica se encontra o núcleo do pensamento Aristotélico – a Teoria dos Silogismos.
- Silogismo é uma frase na qual tendo se afirmado algumas coisas, algo além destas coisas se torna verdadeiro.
- A Lógica Aristotélica se ocupa apenas da forma do pensamento, sem levar em consideração os objetos particulares em que se pensa.
- Nos séculos que se seguiram a lógica e a filosofia floresceu na Grécia, servindo de alimento a curiosidade intelectual.

NOTAS HISTÓRICAS - PARADOXOS

- Um paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum.
  - Há em Sevilha um barbeiro que reúne as duas condições seguintes:
    1. Faz a barba a todas as pessoas de Sevilha que não fazem a barba a si próprias.
    2. Só faz a barba a quem não faz a barba a si próprio.
    - Quem barbeia o barbeiro?
  - Se você diz que está mentindo e está dizendo a verdade então você está mentindo?.

Axioma do Meio Excluído

Estes argumentos alimentaram profunda especulação intelectual para filósofos desde então, principalmente na Grécia antiga, os quais notaram ser o **axioma do meio excluído** o ponto crucial. Este axioma considera que as proposições podem ter apenas dois valores de verdade: **verdadeiras** ou **falsas**. Valores intermediários de verdade sendo excluídos.

SISTEMAS LÓGICOS FORMAIS

- Lógica Proposicional ou Cálculo Sentencial
  - É o sistema Formal mais simples que se possa imaginar.
  - É um sistema no qual as declarações tem valor de verdade VERDADEIRO ou FALSO.
  - Exemplos:
    - “O Fígado é um órgão grande”
    - “Varsóvia é a capital da Polônia”

SISTEMAS LÓGICOS FORMAIS

- Lógica de Predicados
  - Considera ainda predicados, variáveis e quantificadores sobre estas variáveis.
  - Exemplos:
    - “Existe alguém que está rezando”
    - “Maria ama João”
    - “Todo homem é mortal”

PROPOSIÇÕES

- **Asserção**: uma declaração (sentença declarativa).
- **Proposição**: uma asserção que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.
- **Valor verdade**: é o resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).

PROPOSIÇÕES

- Exemplo: Quais das seguintes asserções são proposições?

2 + 3 = 5	proposição verdadeira
3 não é um número par	proposição verdadeira
A Terra é plana	proposição falsa
x > 5	asserção, mas não proposição
Esta declaração é falsa	asserção, mas não proposição
Você fala inglês?	nem asserção, nem proposição
Leia o livro texto	nem asserção, nem proposição

PROPOSIÇÕES

- Observe que o valor verdade (V ou F) de uma proposição não é necessariamente conhecido.
  - Exemplo: “A temperatura na superfície de Vênus é de 400^{o}C” é uma proposição.
- Podemos usar proposições encadeadas para concluirmos uma nova proposição – isto é raciocínio dedutivo.
  - Exemplo:
    - Hoje é segunda ou terça-feira (V).
    - Hoje não é segunda-feira (V).
    - Conclui-se que: Então, hoje é terça-feira.

SINTAXE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

- Lembrem-se que a Matemática é uma ferramenta para modelagem e abstração do “mundo real”, e a Lógica pode se constituir na LINGUAGEM pela qual descrevemos fatos e idéias sobre este mundo.
- Assim como a Língua portuguesa é uma linguagem e que portanto possui uma gramática e formas de escrever corretamente uma frase que expresse alguma fato ou idéia, também a Lógica possui uma linguagem, com seus elementos e gramática, a que chamamos de SINTAXE da Lógica proposicional.
- A sintaxe do Cálculo proposicional especifica os símbolos e os modos de combiná-los para formar uma expressão válida da linguagem, as quais podem ser chamadas de “**fórmulas bem formadas**”(fbf).

Sintaxe da Lógica Proposicional

- Elementos Válidos:
  - Letras Sentenciais – p, q, r, s, a, b, etc.
- Conectivos ou Operadores Lógicos:
  - Negação – não é o caso que ($\sim$) ($\neg$)
  - Conjunção – e (&) ($\wedge$)
  - Disjunção – ou (V)
  - Condicional ou implicação: se ...então ($\rightarrow$) ($\Rightarrow$)
  - Bicondicional: se e somente se ($\leftrightarrow$) ($\Leftrightarrow$)
- Parênteses
  - (,)

SINTAXE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

- Tendo já apresentado a lista de símbolos primitivos, há apenas 3 regras para verificar se uma fórmula é bem formada:

1. Uma letra sentencial sozinha é gramaticalmente correta ou uma fórmula bem formada.
2. Se qualquer fórmula **A** (tal como (pVq) é bem formada, então também o é sua negação ¬**A** (¬(pVq) neste caso).
3. Se **A** e **B** são fórmulas bem formadas, então também o são (**A** ∧ **B**), (**A** V **B**) e (**A**→**B**).

- Exemplo

1. $\neg((p \vee q) ? r)$ -Esta fórmula é bem formada?
2. $((p \vee q) ? r)$ -Sim, se esta fórmula é bem formada (regra2).
3. $((p \vee q) ? r)$ -Esta fórmula é bem formada?
4. $(p \vee q)$ - Sim, se esta fórmula é bem formada, e
5. r -se esta fórmula também é bem formada (r3).
6. $(p \vee q)$ -Esta fórmula é bem formada?
7. p -Sim, se esta fórmula for bem formada, e
8. q -se esta fórmula for bem formada (r3).

SINTAXE DA LÓGICA PROPOSICIONAL

- Exemplo (continuação...)

  9. p -Esta fórmula é bem formada (r1).

  10. q -(idem)

  11. r -(idem)

SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

- Uma **fbf** pode ter uma **interpretação** a qual define a semântica da linguagem. Uma interpretação pode ser considerada como um mapeamento do conjunto das fbfs para um conjunto de valores de verdade {V, F} ou **{Verdadeiro, Falso}**.
- Exemplos:
  - – $A \wedge B$ é verdade se A é verdade e se B é verdade;
  - – $A \vee B$ é verdade se qualquer dos dois, A ou B é verdade;
  - – $A \rightarrow B$ significa que se A é verdade, então B é verdade. Entretanto nada se sabe de B se A for falso.

OPERADORES LÓGICOS

- **Negação (operação "não")**
  - – A sentença: "Não é verdade que p"
    - é uma outra proposição
    - chamada de negação de p
    - notação: $\sim$p, $\neg$p, not p
- Exemplos:
  - a) p: 2+3 > 1: 2+ 3 é maior do que 1
    $\neg$p: 2+3 não é maior do que 1, (ou 2+3 $\leq$ 1)
  - b) q: "Hoje é quarta-feira"
    $\neg$q: "Não é verdade que hoje é quarta-feira", ou ("Hoje não é quarta-feira")
  - c) p: está chovendo hoje
    $\neg$p: não é o caso de que está chovendo hoje

Operadores Lógicos

Da definição de negação segue que:
- se p é Verdadeiro, então $\neg$p é Falso
- se p é Falso, então $\neg$p é Verdadeiro

Logo, o valor verdade de $\neg$p, relativo a p, é dado por:

p	$\neg$p
V	F
F	V

OPERADORES LÓGICOS

- **Conjunção (operação "e")**
  - Notação: $p \wedge q$, p e q , p and q
  - Definição:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  - Observe que há 4 possibilidades

Operadores Lógicos

- **Conjunção (operação “e”)**
  - Exemplos de conjunção ($p \wedge q$):

    a)p: hoje é terça-feira (V)

    q: está chovendo hoje (F)

    $p \wedge q$: hoje é terça e está chovendo hoje (F)

    b)p: $2 < 3$ (V)

    q: $-5 > -8$ (V)

    $p \wedge q$: $2<3$ e $-5>-8$ (V)

    c)p: está chovendo hoje (F)

    q: $3 < 5$ (V)

    $p \wedge q$: está chovendo hoje e $3<5$ (F)

OPERADORES LÓGICOS

- **Disjunção (operação “ou”)**
  - Notação: $p \vee q$, p ou q, p or q
  - Definição:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operadores Lógicos

- **Disjunção (operação “ou”)**
  - Exemplos de disjunção ($p \vee q$):

    a) p: 2 é um inteiro positivo (F)

    q: $\sqrt{2}$ é um número racional (V)

    $p \vee q$: 2 é um inteiro positivo ou $\sqrt{2}$ é um racional (V)

    b) p: $2 + 3 \neq 5$ (F)

    q: Curitiba é a capital de Santa Catarina (F)

    $p \vee q$: $2 + 3 \neq 5$ ou Curitiba é a capital de SC (F)

OPERADORES LÓGICOS

- **Disjunção (operação “ou”)**
  - O conectivo OU pode ser interpretado de duas maneiras:

OU inclusivo	OU exclusivo
"Eu passei em Matemática ou eu rodei em Economia."	"Eu vim de carro ou eu vim de ônibus para a UFSC."

  - No primeiro caso pelo menos uma das possibilidades ocorreu, mas poderiam ter ocorrido ambas.
  - No segundo somente uma das possibilidades pode ter ocorrido.

OPERADORES LÓGICOS

- **Disjunção exclusiva (operação “xor”)**
  - Notação: p $\oplus$ q, p xor q
    p ou q (mas não ambos)
  - Definição:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

  - Valor verdade V quando <u>exatamente um dos dois</u> for V

OPERADORES LÓGICOS

- **Condicional ou Implicação (se p, então q)**
  - Notação: $p \rightarrow q$
  - Definição:

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - Note que p→q é V quando:
    - p e q são ambos V
    - p é F (não importando o valor de q)

Operadores Lógicos

- **Condicional ou Implicação (se p, então q)**
  - Maneiras de expressar p→q:
    - se p, então q
    - p é condição suficiente para q
    - q é condição necessária para p
    - p somente se q
    - q é conseqüência lógica de p
  - Na expressão p→q:
    - p é chamado de **hipótese** ou **antecedente**
    - q é chamado de **conclusão** ou **conseqüente**

OPERADORES LÓGICOS

- **Condicional ou Implicação (se p, então q)**
  - Exemplo:

    1. “Se eu pegar o livro na biblioteca, então vou lê-lo esta noite.”
    2. A sentença:
       “Fogo é uma condição necessária para fumaça”
       pode ser reformulada como:
       “Se há fumaça, então há fogo”

  - Logo:
    - o antecedente é: “Há fumaça”
    - o conseqüente é: “Há fogo”

Operadores Lógicos

- **Condicional ou Implicação (se p, então q)**
  - Exemplo: Indique o antecedente e o conseqüente em:

1. "Se a <u>chuva continuar</u>, o rio vai transbordar".
2. "Uma condição suficiente para a falha de uma rede é que a <u>chave geral pare de funcionar</u>".
3. "Os abacates só <u>estão maduros</u> quando estão escuros e macios".

Operadores Lógicos

- **Condicional ou Implicação (se p, então q)**
  - Na linguagem usual, a implicação p→q supõe um relação de causa e efeito entre p e q.
    - Exemplo: "Se fizer sol amanhã, eu vou à praia"
  - Em Lógica, p→q diz apenas que não teremos p Verdadeiro e q Falso ao mesmo tempo.
    - Exemplo: "Se hoje é terça-feira, então 2+2=5"
  - Note que se p é F, então p→q é V para qualquer q: "Uma falsa hipótese implica em qualquer conclusão".
    - Exemplo: "Se 2+2=5, então no Brasil não há corrupção".

- **Bicondicional ou Equivalência (p se e somente se q) ($p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$)**
  - Notação: $p \leftrightarrow q$
  - Definição:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

  - Note que $p \leftrightarrow q$ é V somente quando p e q têm o mesmo valor verdade

Operadores Lógicos

- **Bicondicional ou Equivalência (p se e somente se q) (p $\rightarrow$ q $\wedge$ q $\rightarrow$ p)**
  - Maneiras de representar p$\leftrightarrow$q:
    - “p se e somente se q”
    - “p é necessário e suficiente para q”
    - “se p então q, e conversamente”
  - Exemplo:
    - “A cidade será destruída se e somente se houver um terremoto”

OPERADORES LÓGICOS

Precedência de Operadores Lógicos

Operador	Precedência
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\longrightarrow$	4
$\longleftrightarrow$	5

Da Linguagem Natural para a Lógica

- **Apesar de necessário, nem sempre é fácil expressar declarações da linguagem natural (português, p.ex.) para a linguagem da lógica.**
  - Exemplo: encontrar a proposição que traduz a seguinte sentença:
    - “Você não pode andar de patins se você tem menos do que 1,20m, a não ser que você tenha mais do que 16 anos”.
    - Definindo:
      q: “Você pode andar de patins”
      r: “Você tem menos do que 1,20m”
      s: “Você tem mais do que 16 anos”
    - a sentença pode ser traduzida por:
      p: $(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$

Tabela Verdade

- Fornece os valores verdade de uma *fórmula bem formada* em termos dos valores verdade de suas partes componentes.
- Útil na determinação dos valores verdade de proposições construídas a partir de sentenças mais simples.
- As Tabelas-Verdade fornecem um teste rigoroso e completo para a validade de formas de argumento da Lógica proposicional, além de se constituir em um algoritmo.
- Quando existe um algoritmo que determina se as formas expressáveis em um sistema formal são válidas ou não, esse sistema é dito **decidível**.

TABELA VERDADE

- Algoritmo para Construir a Tabela-Verdade
  - A Tabela-Verdade de uma proposição composta por n variáveis é obtida por:
    1. As primeiras n colunas da tabela devem ser rotuladas com as letras sentenciais – outras colunas servirão para combinações intermediárias.
    2. Sob cada uma das primeiras colunas lista-se todas as 2^n possíveis combinações dos valores verdade das letras sentencias.
    3. Para cada linha computa-se o valor verdade resultante das proposições intermediárias, isto é, as letras sentenciais ligadas por conectivos ou precedidas de negação.

Tabela Verdade

- Exemplo:$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$
  - envolve 3 proposições independentes
  - logo, há 2^3 = 8 situações possíveis:

q	r	s	$\neg q$	$\neg s$	$(r \wedge \neg s)$	$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$
F	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	V

Tabela Verdade

- Exercício:Tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$

p	q	r	$p \vee q$	$r \leftrightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V	?
V	V	F	V	F	?
V	F	V	V	V	?
V	F	F	V	F	?
F	V	V	V	F	?
F	V	F	V	V	?
F	F	V	F	F	?
F	F	F	F	V	?

TABELA VERDADE

- Exemplo: Tabela verdade de $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

- Note que $p \rightarrow q$ e $\neg q \rightarrow \neg p$ são equivalentes.

Classificação de proposições

- **Tautologia**
  - Proposição que é sempre **Verdade** em todas as situações possíveis.
    - Exemplo: $p \vee \neg p$
- **Contradição ou Inconsistência**
  - Proposição que é sempre **Falsa** em todas as situações possíveis.
    - Exemplo: $p \wedge \neg p$
- **Contingência**
  - Proposição que pode ser V ou F dependendo dos valores verdade de suas letras sentencias.

Equivalência Lógica

- Sejam A e B duas fbfs e sejam p$_1$, p$_2$, ...,p$_n$ as letras sentenciais que ocorrem em A e em B. Se os valores verdade de A e de B forem iguais para todos os 2^n possíveis valores verdade atribuídos a p$_1$, p$_2$, ..., p$_n$, então A e B são ditos equivalentes.
- Equivalências são bicondicionais que são tautologias. Notação: p $\Leftrightarrow$ q
- Um importante recurso usado na argumentação lógica é a substituição de uma proposição por outra que seja equivalente.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- A seguir aparecem alguns exemplos de fórmulas que são equivalentes e cujas equivalências podem ser verificadas através de tabelas-verdade.

    - $\neg(\neg p) = p$
    - $a \wedge a = a$
    - $a \vee a = a$
    - $(a \wedge \neg a) \vee b = b$
    - $a \vee \neg a = b \vee \neg b$

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- Exemplo: Mostre que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalência Lógica

REGRAS DE EQUIVALÊNCIA

Equivalência		Nome da regra
$p \vee p \Leftrightarrow p$	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotência
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$		Dupla negação
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$		Comutatividade
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$		Associatividade
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		Distributividade
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$		Leis de Morgan

Equivalência Lógica

- As regras de equivalência de fórmulas também podem ser utilizadas para provar a equivalência entre duas fórmulas sem que seja necessária a construção da tabela-verdade.
- Exemplo: Mostre que
  $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) = r$
  $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) =$
  $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (r \wedge (q \vee p) =$ (Distributividade)
  $((\neg p \wedge \neg q) \wedge r) \vee (r \wedge (q \vee p) =$ (Comutatividade)
  $((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \vee p)) \wedge r =$ (Distributividade)
  $(\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)) \wedge r =$ (De Morgan e Comutatividade)
  $(\neg A \vee A) \wedge r =$
  Tautologia $\wedge\ r = r$

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- Exemplo:
  - $p \vee q$: “O rio é raso ou poluído”.
  - $\neg(p \vee q)$: (?)
  - pelas leis de De Morgan: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  - logo: $\neg(p \vee q)$: “O rio não é raso e nem poluído”.
- Note que $\neg(p \vee q)$ NÃO É equivalente a: “O rio não é raso OU não é poluído”.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- Exercícios:

1. Simplifique as seguintes fbfs:

   a) $p \vee (p \wedge (\neg p \wedge q \vee r \wedge (p \wedge r)))$

   b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

   c) $p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

2. Mostre a equivalência

   a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

   b) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

LÓGICA DE PREDICADOS

- A Lógica Proposicional possui um poder de representação limitado.
- Não é suficiente para expressar fatos simples como, por exemplo, o fato de duas leras sentenciais possuírem alguma característica em comum.
- O cálculo, ou lógica de predicados é uma extensão da lógica proposicional em que se consideram também variáveis e quantificadores sobre variáveis.
- Os dois quantificadores mais importantes são o quantificador universal $(\forall)$ e o quantificador existencial $(\exists)$.

Lógica de Predicados

- Predicados
  - Descrevem alguma coisa, característica ou propriedade de um ou mais objetos. São normalmente denotados por letras maiúsculas.
  - Exemplo:
    - João ama Maria: A(a,b)
- Variáveis:
  - Designam objetos “desconhecidos” do Universo. “Alguém”. São normalmente representados por letras minúsculas de “u” a “z”.
- Letras Nominais:
  - Designam objetos “conhecidos” do Universo. “João”, “Pedro”, etc. São normalmente representados por letras minúsculas de “a” a “t”.

PREDICADOS

- A declaração “x é maior do que 3” tem duas partes:
  - a variável x (“sujeito”)
  - “é maior do que 3” (“predicado”)
  - Podemos denotar “x é maior do que 3” por P(x)
- Diz-se também que P(x) é o valor da função proposicional P em x.
  - Uma vez que um valor tenha sido atribuído a x, P(x) se torna uma proposição e tem um valor verdade.
- Exemplo: seja P(x) a declaração “x $>$ 3”. Quais são os valores verdade de P(4) e P(2)?
  - P(4), que é “4 $>$ 3”, é V
  - P(2), que é “2 $>$ 3”, é F

QUANTIFICADORES

- Quando se atribui valores a **todas** as variáveis em uma função proposicional, a declaração resultante se torna uma proposição com **um** valor verdade **determinado**.
- Mas existe uma outra forma de criar uma proposição a partir de uma função proposicional:
  - a <u>quantificação</u>
- São operadores lógicos que em vez de indicarem relações entre sentenças, expressam relações entre conjuntos designados pelas classes de atributos lógicos.

A área da lógica que lida com predicados e quantificadores é chamada de "<u>Cálculo de Predicados</u>".

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F <u>para todos os valores</u> de uma variável <u>em um domínio em particular</u>
  - ou seja, em um **universo de discurso** ou **domínio**
- Tal declaração é expressa com um quantificador universal.

Quantificador Universal

- A quantificação universal de uma função proposicional é a proposição que estabelece que P(x) é V **para todos** ou **para nenhum** dos valores de x no universo de discurso.
  - É o universo de discurso que especifica os possíveis valores da variável x.
- Este tipo de quantificador é formado pelas expressões <u>**“todo”**</u> e <u>**“nenhum”**</u>.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F algum dos valores de uma variável em um domínio em particular
  - ou seja, em um **universo de discurso** ou **domínio**
- Tal declaração é expressa com um quantificador existencial.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- A quantificação existencial de uma função proposicional é a proposição que estabelece que P(x) é V **para algum** ou **para pelo menos um** dos valores de x no universo de discurso.
  - É o universo de discurso que especifica os possíveis valores da variável x.

- Este tipo de quantificador é formado pelas expressões **“existe um”**, **“existe algum”**, **“pelo menos um”** ou **para algum”**.

Cálculo de Predicados

- Todo homem é mortal, ou seja, qualquer que seja x (do Universo), se x é Homem, então x é Mortal.
  - $\forall x(H(x)) \rightarrow M(x)).$
- Nenhum homem é vegetal, ou sejam qualquer que seja x, se x é Homem, em x NÃO É Vegetal.
  - $\forall x(H(x) \rightarrow \neg V(x)).$
- Pelo menos um homem é inteligente, ou seja, existe pelo menos um x em que x seja Homem e x seja Inteligente.
  - $\exists x(H(x) \wedge I(x)).$

CÁLCULO DE PREDICADOS

- Variáveis:
  - Designam objetos “desconhecidos” do Universo. “Alguém”. São normalmente representados por letras minúsculas de “u” a “z”.
- Letras Nominais
  - Designam objetos “conhecidos” do Universo. “João”, “Pedro”, etc. São normalmente representados por letras minúsculas de “a” a “t”.
- Predicados
  - Descrevem alguma coisa ou característica de um ou mais objetos. São normalmente denotados por letras maiúsculas.
  - João ama Maria: $A(a, b)$
  - João ama alguém: $\exists x A(a, x)$

CÁLCULO DE PREDICADOS

- Sintaxe do Cálculo de Predicados
  - Fórmulas Atômicas:
    - É uma letra predicativa, seguida por zero ou mais letras nominais ou variáveis.
  - Fórmulas Bem Formadas:
    - Uma Fórmula Atômica é uma Fórmula Bem Formada;
    - Se P é uma fbf, então P também o é;
    - Se P e Q são fbfs, então $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \rightarrow Q), (P \leftrightarrow Q)$ também o são;
    - Se P(x) é uma fbf, então $\exists x(P(x))$ e $\forall x(P(x))$ também o são.

CÁLCULO DE PREDICADOS

- Sintaxe do Cálculo de Predicados **(continuação...)**
  - Fórmulas Bem Formadas:
    - Ex.: Seja $P = F(a) \wedge G(a, b)$, então são fbfs:
      - $\forall x(F(x) \wedge G(a, b))$
      - $\forall x(F(x) \wedge G(x, b))$
      - $\forall x(F(x) \wedge G(a, x))$
      - $\exists x(F(x) \wedge G(a, b))$

MÉTODOS DE DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Úteis em assuntos relacionados à Computação:
  - Verificar correção de programas
  - Determinar se sistemas operacionais estão seguros
  - Inferências na área de Inteligência Artificial
  - Compreensão de teoremas utilizados em diversas áreas da Computação (gráfica, álgebra booleana, teoria de compiladores)

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Nomenclatura básica:
  - **Axioma:** A palavra axioma como é usada na Matemática moderna, não é uma proposição auto-evidente. Mais do que isso, simplesmente significa um ponto de partida num sistema lógico.Uma proposição que é assumida ser verdadeira (tautologia - verdade evidente)
  - **Teorema:** uma proposição que pode ser demonstrada ser verdadeira
  - **Regras de inferência:** meios de tirar conclusões a partir de outras asserções (axiomas e teoremas). São regras de reescrita que permitem produzir novas fbfs a partir de outras.

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Demonstração:
  - objetivo: estabelecer a verdade de um teorema
  - técnicas usuais: tabelas-verdade ou aplicação de um sistema formal
- Tabelas verdade: podem ser inviáveis se a afirmação a ser provada contiver muitas variáveis proposicionais
- São freqüentes teoremas do tipo p$\rightarrow$q, onde p e q são proposições compostas
  - p é a **hipótese** ou **premissa**
  - q é a **tese** ou **conclusão**

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- p $\rightarrow$ q só será teorema se for uma tautologia
  - sempre que p for V, q também deverá ser
  - neste caso, é possível deduzir q a partir de p (fazer a prova)
- Exemplo:
  - Aquele animal é um gato. Se aquele animal for um gato, então aquele animal é preguiçoso. Portanto, aquele animal é preguiçoso.
  - p: aquele animal é um gato.
  - q: aquele animal é preguiçoso
  - (p $\wedge$ (p$\rightarrow$q)) $\rightarrow$ q
    - $(p \wedge (p \rightarrow q))$ é a premissa
    - q é a tese ou conclusão

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- A demonstração pode ser feita através da utilização da Tabela-Verdade. Já que sabemos que a sentença só será um teorema se for uma tautologia.
  - $(p \land (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \land (p \rightarrow q)$	$(p \land (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Grande parte dos teoremas são do tipo:
  $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$
  onde as p_i são as hipóteses ou premissas e q é a conclusão.
- Na linguagem corrente, um <u>argumento</u> consiste em uma série de sentenças $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ seguidas de uma conclusão (q).
- O argumento é <u>válido</u> se a conclusão puder ser deduzida da conjunção $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$
- Ou seja: é válido se $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$ for um <u>teorema</u>

INFERÊNCIA NA LÓGICA PROPOSICIONAL

- **Modus Ponens (MP)**
  - De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o seuconseqüente.
  - $p \rightarrow q, p \models q$ ou
  - $((p \rightarrow q) \land p) \rightarrow q \longleftarrow$ é uma tautologia
- Exemplos:
  - Se aquele animal for um gato, então aquele animal é preguiçoso. Aquele animal é um gato.
    Logo, aquele animal é preguiçoso.
  - Se Maria ou Juliana vier então a festa será alegre e divertida.
    Ou Maria ou Juliana virá a festa.
    Portanto, a festa será alegre e divertida.

- **Modus Ponens (MP)**
  - Exemplo:
    - $p, p \rightarrow q, q \rightarrow r \models r$
  - Prova:

1. p (Premissa)
2. $p \rightarrow q$ (Premissa)
3. $q \rightarrow r$ (Premissa)
4. q (1,2 MP)
5. r (3,4 MP)

- **Eliminação da Negação ($\neg$E)**
  - De uma fbf $\neg(\neg p)$, podemos inferir p.
  - $\neg(\neg p) \models p$

- Exemplo:
  - Não é o caso de que o lixo não está vazio.
    Logo, o lixo está vazio.

- **Eliminação da Negação ($\neg$E) (continuação...)**

- Exemplo:
  - $(\neg p \rightarrow \neg(\neg q)), \neg p \models q$ ou
    $((\neg p \rightarrow \neg(\neg q)) \wedge \neg p) \rightarrow q$

- Prova:

1. $\neg p \rightarrow \neg(\neg q)$ (Premissa)
2. $\neg p$ (Premissa)
3. $\neg(\neg q)$ (1,2 MP)
4. q (3 $\neg$E)

INFERÊNCIA NA LÓGICA PROPOSICIONAL

- **Introdução da Conjunção ($\wedge$I)**
  - De quaisquer fbfs p e q podemos inferir p $\wedge$ q.
  - $p, q \models p \wedge b$
- **Eliminação da Conjunção ($\wedge$E)**
  - De uma conjunção podemos inferir qualquer uma de suas sentenças.
  - $p \wedge q \models p$
- Exemplos:
  - A sala está vazia.
    O professor está dando aula. Portanto, a sala está vazia E o professor está dando aula.
  - João E Marcelo jogarão futebol este sábado.
    Logo, Marcelo jogará futebol este sábado.

INFERÊNCIA NA LÓGICA PROPOSICIONAL

- Exemplo:
  - $p \rightarrow (q \wedge r), p \models p \wedge q$
- Prova:

1. $p \rightarrow (q \wedge r)$ (Premissa)
2. p (Premissa)
3. $q \wedge r$ (1,2 MP)
4. q (3 $\wedge$ E)
5. $p \wedge q$ (2,4 $\wedge$ I)

- **Introdução da Disjunção ($\vee$I)**
  - De uma fbf p, podemos inferir a disjunção de p com qualquer fbf.
  - $p \models p \vee q$
- Exemplos:
  - A sala está vazia. Portanto, a sala está vazia OU o professor está dando aula.
  - $p \rightarrow (p \vee q) \wedge (r \vee p)$
  - Prova:
    1. p (Premissa)
    2. $p \vee q$ (1 $\vee$ I)
    3. $r \vee p$ (1 $\vee$ I)
    4. $(p \vee q) \wedge (r \vee p)$ (2,3 $\wedge$I)

- **Eliminação da Disjunção ($\vee$E)**
  - De fbfs da forma p $\vee$ q, p$\rightarrow$r e q $\rightarrow$r, podemos inferir r.
- Exemplos:
  - Eu OU o meu irmão ficaremos em casa esta noite.
    Se eu ficar em casa, então a geladeira ficará vazia.
    Se meu irmão ficar, então ele esvaziará a geladeira.
    Logo, a geladeira ficará vazia.
  - $p \vee r, p \rightarrow f, r \rightarrow f \models f$
  - Prova:
    1. p $\vee$ r (Premissa)
    2. p $\rightarrow$f (Premissa)
    3. r $\rightarrow$ f (Premissa)
    4. f (1,2,3 $\vee$E)

INFERÊNCIA NA LÓGICA PROPOSICIONAL

- **Introdução do Bicondicional ($\leftrightarrow$ I)**
  - De quaisquer fbfs da forma p$\rightarrow$q e q $\rightarrow$p, podemos inferir p $\leftrightarrow$ q.
- **Eliminação do Bicondicional ($\leftrightarrow$E)**
  - De uma fbf da forma p $\leftrightarrow$ q, podemos inferir p $\rightarrow$q e q $\rightarrow$p.
- Exemplo:
  - Se houver um terremoto então a cidade será destruída e se a cidade foi destruída, então é porque houve um terremoto.
    Logo, a cidade será destruída se e somente se houver um terremoto.

INFERÊNCIA NA LÓGICA PROPOSICIONAL

- **Prova do Condicional (PC)**
  - Dada uma derivação de uma fbf q a partir de uma hipótese p, podemos descartar a hipótese e inferir p→q. A Prova do Condicional é também chamada **Teorema da Dedução** e é **normalmente utilizada se o conseqüente é da forma p→q**.

- **Prova do Condicional (PC)** (continuação...)
  - Exemplo:
    - r, $(r \wedge q) \rightarrow \neg s, \neg s \rightarrow \neg p \models q \rightarrow \neg p$

    - Prova:

1. r (Premissa)
2. $(r \wedge q) \rightarrow \neg s$ (Premissa)
3. $\neg s \rightarrow \neg p$ (Premissa)
4. q (**Hipótese**)
5. $(r \wedge q)$ (1,4 $\wedge$ I)
6. $\neg s$ (2,5 MP)
7. $\neg p$ (3,6 MP)
8. $q \rightarrow \neg p$ (4,7 PC)

Redução ao Absurdo (RAA)

- Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese p, podemos descartar a hipótese e inferir $\neg$p.
- Exemplo:
  - $p \rightarrow q, \neg q \models \neg p$
  - Prova:
    1. $p \rightarrow q$ (Premissa)
    2. $\neg q$ (Premissa)
    3. p (**Hipótese**)
    4. q (1,3 MP)
    5. $q \wedge \neg q$ (2,4 $\wedge$ I) (Contradição)
    6. $\neg p$ (3,5 RAA)

REGRAS DERIVADAS DE INFERÊNCIA PARA LP

- **Modus Tollens (MT)**
  - De fbfs da forma $p \rightarrow q$ e $\neg q$, infere-se $\neg p$.
- Exemplos
  - Se meu carro estiver no estacionamento, então estou na UFSC.
    Eu não estou na UFSC.
    Logo, meu carro não está no estacionamento.
  - Se meu animal de estimação for um gato ou um cão, então ele será um mamífero.
    Meu animal de estimação não é um mamífero.
    Portanto, meu animal não é nem um gato nem um cão.

Regras Derivadas de Inferência para LP

- **Silogismo Hipotético (SH)**
  - De fbfs da forma p $\rightarrow$ q e q $\rightarrow$r, infere-se p$\rightarrow$r.
- Exemplos
  - Se o pássaro está perdido, então a porta da gaiola está aberta.
    Se a porta da gaiola está aberta, então ele pode retornar a gaiola.
    Logo, se o pássaro está perdido, então ele pode retornar a gaiola.
  - Se meu time jogar bem, então ele vencerá suas partidas. Se meu time vencer suas partidas, então ele se classificará para as finais.
    Portanto, se meu time jogar bem, então ele se classificará para as finais.

Regras Derivadas de Inferência para LP

- **Regra da Absorção (ABS)**
  - De fbfs da forma $p \rightarrow q$, infere-se $p \rightarrow (p \land q)$.
- Regra do Dilema Construtivo (DC)
  - De fbfs da forma $p \lor q$, $p \rightarrow r$ e $q \rightarrow s$, infere-se $r \lor s$.
- Exemplo
  - A festa será na minha casa ou na sua. Se a festa for na minha casa, então minha casa ficará uma bagunça. Se a festa for na sua casa, então sua casa ficará uma bagunça.
    Portanto, ou a minha casa ou a sua ficará uma bagunça.

Regras Derivadas de Inferência para LP

- **Regra da Repetição (RE)**
  - De fbf da forma p, infere-se p.
- **Regra do Silogismo Disjuntivo (SD)**
  - De fbfs da forma $p \vee q$ e $\neg p$, infere-se q.
- Exemplo
  - Ou o cachorro está dentro de casa ou ele está no pátio.
    O cachorro não está dentro de casa.
    Logo, o cachorro está no pátio.

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exemplo: verifique a validade do argumento:

  "Se a taxa para importação diminuir, o comércio interno aumentará. Ou a taxa federal de desconto diminuirá ou o comércio interno não irá aumentar. A taxa para importação vai diminuir. Portanto, a taxa federal de desconto vai diminuir".

- Proposições:
  p: "a taxa para importação vai diminuir"
  q: "o comércio interno vai aumentar"
  r: "a taxa federal de desconto vai diminuir"

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exemplo (continuação):
  - Argumento:
    $(p \rightarrow q), (r \vee \neg q), p \models r$ ou
    $[(p \rightarrow q) \wedge (r \vee \neg q) \wedge p] \rightarrow r$
  - Prova:
    1. $p \rightarrow q$ (premissa)
    2. $r \vee \neg q$ (premissa)
    3. p (premissa)
    4. q (1,3, modus ponens)
    5. r (2,4, modus tollens)

Demonstração de Teoremas

- Exercícios:
  - Verifique se os argumentos a seguir são válidos.

1. Se há um jogo de futebol na Ressacada, então viajar de avião é difícil. Se eles chegarem no horário no aeroporto, então viajar de avião não será difícil. Eles chegaram no horário no aeroporto. Logo, podemos concluir que não houve jogo de futebol na Ressacada.

2. Se este animal for um pássaro, então ele tem sangue quente. Se este animal for um réptil, então ele tem sangue frio. Este animal tem sangue quente ou frio. Logo, este animal ou é um pássaro ou é um réptil.

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exercícios:
  - Determine se os seguintes teoremas são válidos ou inválidos.

1. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q) \wedge r] \rightarrow \neg p$
2. $[(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (q \rightarrow \neg p) \wedge (s \rightarrow \neg r)] \rightarrow (p \rightarrow \neg s)$
3. $[((q \wedge r) \rightarrow p) \wedge \neg q \wedge \neg r] \rightarrow \neg p$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge \neg(\neg p \wedge s)] \rightarrow \neg s.$

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exemplo: Você está a ponto de sair para o trabalho de manhã e descobre que está sem óculos. Você sabe os fatos a seguir. *Onde estão os seus óculos?*
  1. Se meus óculos estão sobre a mesa da cozinha, então eu os vi no café da manhã.
  2. Eu estava lendo o jornal na sala ou eu estava lendo o jornal na cozinha.
  3. Se eu estava lendo o jornal na sala, então meus óculos estão sobre a mesa de café.
  4. Eu não vi meus óculos no café da manhã.
  5. Se eu estava lendo meu livro na cama, então meus óculos estão sobre a mesinha de cabeceira.
  6. Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão sobre a mesa da cozinha.

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exemplo: (continuação)
  p: “meus óculos estão sobre a mesa da cozinha”
  q: “eu vi meus óculos no café da manhã”
  r: “eu estava lendo o jornal na sala”
  s: “eu estava lendo o jornal na cozinha”
  t: “meus óculos estão sobre a mesa de café”
  u: “eu estava lendo meu livro na cama”
  v: “meus óculos estão sobre a mesinha de cabeceira.”

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exemplo: (continuação)
  - Prova:

1. $p \rightarrow q$ (Premissa)
2. $r \vee s$ (Premissa)
3. $r \rightarrow t$ (Premissa)
4. $\neg q$ (Premissa)
5. $u \rightarrow v$ (Premissa)
6. $s \rightarrow p$ (Premissa)
7. $\neg p$ (1,4,modus tollens)
8. $\neg s$ (6,7,modus tollens)
9. r (2,8,silogismo disjuntivo)
10. t (3,9,modus ponens)

DEMONSTRAÇÃO DE TEOREMAS

- Exemplo: (continuação)
  - Note que uma demonstração por <u>tabela verdade</u> do problema anterior exigiria a análise de $2^7 = 128$ possibilidades.
  - Por isto, é melhor aplicar as regras de inferência, em um processo de tentativa e erro.

INFERÊNCIA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Todas as regras definidas no Cálculo Proposicional continuam válidas no Cálculo de Predicados, apenas referenciando-as para os quantificadores.
    - Ex.:$\neg F(a) \lor \exists x F(x), \exists x F(x) \rightarrow P \models F(a) \rightarrow P$.
  - Prova

1. $\neg F(a) \lor \exists x F(x)$ (Premissa)
2. $\exists x F(x) \rightarrow P$ (Premissa)
3. $F(a)$ (Hipótese)
4. $\neg\neg F(a)$ (3 DN)
5. $\exists x F(x)$ (1,3 SD)
6. P (2,5 MP)
7. $F(a) \rightarrow P$ (3,6 PC)

INFERÊNCIA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Intercâmbio de Quantificadores
    - $\neg(\forall x \neg F(x)) = \exists x F(x)$
    - $\neg(\forall x F(x)) = \exists x \neg F(x)$
    - $\forall x \neg F(x) = \neg(\exists x F(x))$
    - $\forall x F(x) = \neg(\exists x \neg F(x))$

Inferência no Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Eliminação Universal (EU)
    - De uma fbf quantificada universalmente $\forall x F(x)$, infere-se uma fbf da forma $F(a)$, a qual resulta de se substituir cada ocorrência da variável x em F por uma letra nominal a
    - Ex: $\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s) \models M(s)$
    - Prova:
      1. $\forall(H(x) \rightarrow M(x))$ (Premissa)
      2. $H(s)$ (Premissa)
      3. $H(s) \rightarrow M(s))$ (1 EU)
      4. $M(s)$ (2,3 MP)

Inferência no Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Introdução do Universal (IU)
    - De uma fbf contendo uma letra nominal a, QUE NÃO OCORRE EM QUALQUER PREMISSA OU EM QUALQUER HIPÓTESE, infere-se uma fbf da forma $\forall x F(x)$, onde $F(x)$ é o resultado de se substituir todas as ocorrências de a em F por uma variável x QUE NÃO OCORRA em F.
    - Ex: $\forall x(P(x) \rightarrow C(x)), \forall x(C(x) \rightarrow V(x)) \models \forall x(P(x) \rightarrow V(x))$

INFERÊNCIA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Introdução do Universal (IU) **(continuação...)**
    - Prova:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow C(x))$ (Premissa)
2. $\forall x(C(x) \rightarrow V(x))$ (Premissa)
3. $P(a) \rightarrow C(a)$ (1 EU)
4. $C(a) \rightarrow V(a)$ (2 EU)
5. $P(a) \rightarrow V(a)$ (3,4 SH)
6. $\forall x(P(x) \rightarrow V(x))$ (5 IU)

INFERÊNCIA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Introdução do Existencial (IE)
    - De uma fbf F contendo uma letra nominal a, infere-se uma fbf da forma $\exists x F(x)$, onde $F(x)$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de a em F por uma variável x QUE NÃO OCORRA em F.
    - a pode ocorrer em uma hipótese não utilizada ainda, ou em uma premissa;
    - a variável x não precisa substituir todas as ocorrências de a em F;
    - IE permite introduzir somente um quantificador existencial por vez e somente do lado esquerdo da fórmula.

INFERÊNCIA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Introdução do Existencial (IE) **(continuação...)**
    - Ex: $\forall x(F(x) \vee G(x)) \models \exists x(F(x) \vee G(x))$
    - Prova:

1. $\forall x(F(x) \vee G(x))$ (Premissa)
2. $F(a) \vee G(a)$ (1 EU)
3. $\exists x(F(x) \vee G(x))$ (2 IE)

INFERÊNCIA NO CÁLCULO DE PREDICADOS

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Eliminação do Existencial (EE) **(continuação...)**
    - De uma fbf quantificada existencialmente $\exists x F(x)$ podemos inferir $F(a)$, contanto que a letra nominal NÃO OCORRA em $F(x)$, NEM EM QUALQUER HIPÓTESE, NEM EM QUALQUER PASSO ANTERIOR DA DERIVAÇÃO.
    - Ex: $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \models \exists x F(x)$
    - Prova:
      1. $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ (Premissa)
      2. $F(a) \wedge G(a)$ (1 EE)
      3. $F(a)$ (2 $\wedge$E)
      4. $\exists x F(x)$ (3 IE)