Funções

- Estudaremos uma classe particular de relações chamadas ***FUNÇÕES***.
- Nos preocuparemos fundamentalmente com as funções chamadas ***DISCRETAS***, que são aquelas que relacionam um conjunto enumerável com outro conjunto enumerável.
- Várias aplicações dentro da área da Ciência da Computação:
  - Algoritmos são funções;
  - Compiladores são funções;
  - Funções de Criptografia;
  - Funções de Compressão;
  - Funções de Geração de Chave de Armazenamento; etc

Funções

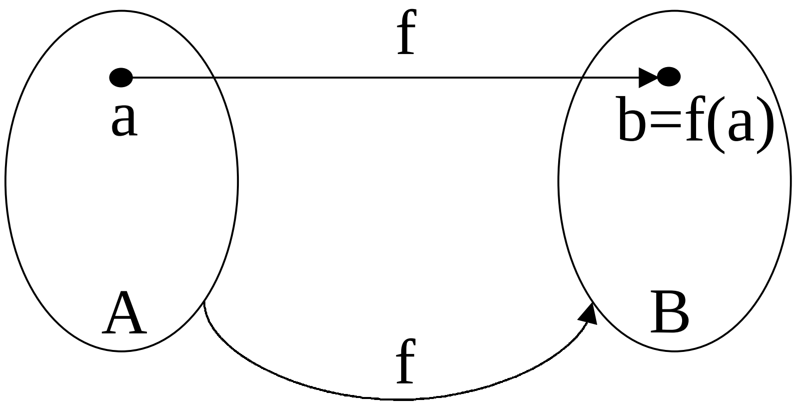
- Definições:
  - Intuitivamente: função é uma relação especial entre dois conjuntos na qual todo elemento do primeiro conjunto deve ter, obrigatoriamente, elemento associado no segundo conjunto, e, cada elemento do primeiro conjunto só pode ter um e apenas um elemento associado no segundo conjunto.
  - Formal: Sejam A e B quaisquer dois conjuntos não vazios. A relação f de A para B é chamada uma função se para todo $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$, e se lê: “f é função de A em B”.

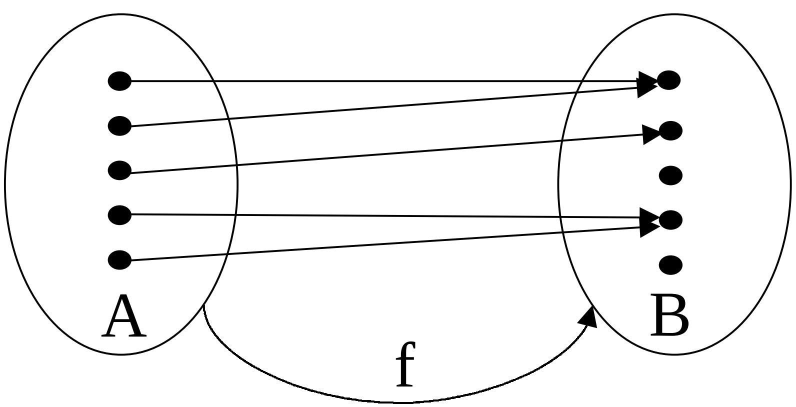
$$f: A \to B$$

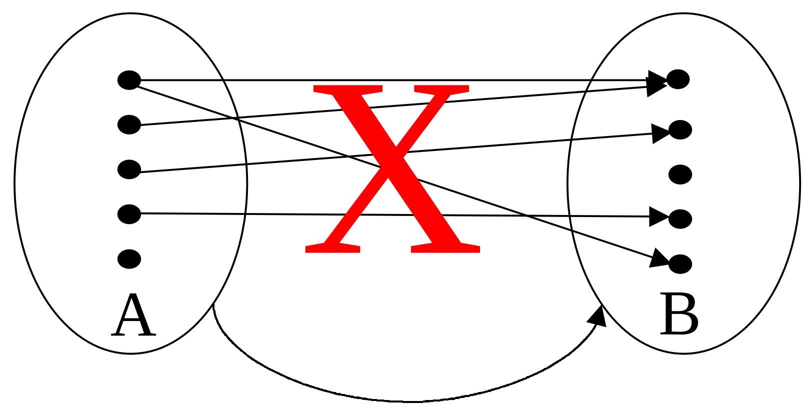
Para todo $a \in Dom(f)$, f(a) (ou seja, o conjunto dos “f relativos” de a) contém apenas um elemento.

Funções

- Exemplos:







NÃO É FUNÇÃO

Funções

- Observações:
  - Se f(a)={b}, escreve-se f(a)=b;
  - O valor a é chamado de argumento da função e f(a) é chamado valor de f para o argumento a.
- Exemplos:
  - Sejam A={1,2,3,4} e B={a,b,c,d,e} e seja f={(1,a),(2,b),(3,d),(4,d)}

Assim, os conjuntos dos f-relativos de x para cada $x \in A$ são:

f(1)={a}, f(b)={2}, f(3)={d}, f(4)={d}

  - Como existe um conjunto f(x), para todos os elementos $x \in A$ e,
  - Como cada conjunto f(x) para $x \in A$, tem um único valor, então f É UMA FUNÇÃO.

Funções

- Exemplos:

1. Seja X={1,5,P,Pedro}, Y={2,5,7,q,Maria} e f={(1,2),(5,7),(P,q),(Pedro,q)}.

– Então, Dom(f)=X, Ran(f)={2,7,q} e f(1)=2, f(5)=7, f(P)=q e f(Pedro)=q.

2. Seja X=Y=**R** (reais) e $f(x)=x^2+2$.

– Então, Dom(f)=**R**, Ran(f)$\subseteq$**R** os valores de f(x) estão contidos em uma parábola.

3. Seja X=Y=**R** (reais) e $f(x)=x^{1/2}$.

– Então, f não é uma função já que a condição de unicidade é violada, pois a cada valor de x correspondem a dois valores de y$\in$ **R.**

Funções

- Observações:
  - Sabemos que nem todos os possíveis subconjuntos de AxB constituem-se em funções de A em B.
  - O número de funções que podemos obter dos subconjuntos do produto cartesiano AxB é B^A.
- Exemplo:
  - Seja X={a,b,c} e Y={0,1}. Então

XxY={(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)}

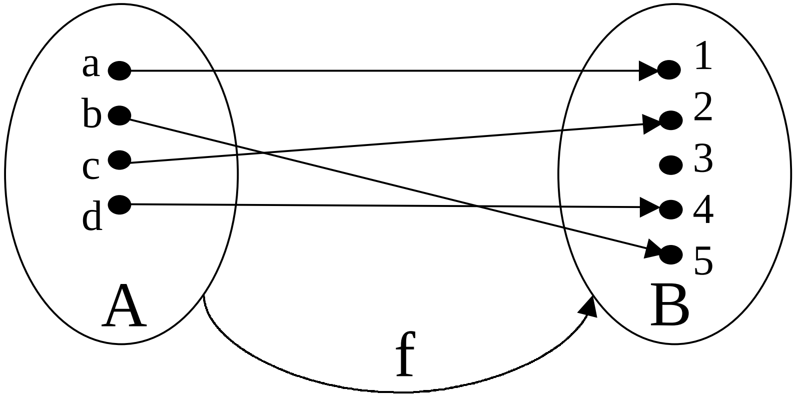
  - Existem 2^6 subconjuntos de XxY, porém apenas 2^3 subconjuntos definem funções de X em Y.

1. f1={(a,0),(b,0),(c,0)}
2. f2={(a,0),(b,0),(c,1)}
3. f3={(a,0),(b,1),(c,0)}
4. f4={(a,0),(b,1),(c,1)}
5. f5={(a,1),(b,0),(c,0)}
6. f6={(a,1),(b,0),(c,1)}
7. f7={(a,1),(b,1),(c,0)}
8. f8={(a,1),(b,1),(c,1)}

Tipos de Funções

- Função Injetora:
  - Uma função f de A em B é dita de um-para-um ou injetora, se e somente se $f(a) \neq f(b)$ sempre $a \neq b$.
  - Uma função f de A em B ($f: A \rightarrow B$) é injetora se elementos diferentes de A tem imagens diferentes em B.

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ (x_1 \neq x_2) \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Tipos de Funções

- Função Injetora - Exemplos:
  - Determine se a função $f(x)=x^2$, dos inteiros para os inteiros é injetora.

    Solução: A função $f(x)=x^2$ <u>não é injetora</u> pois, por exemplo $1 \neq -1$ mas $f(1) = f(-1) = 1$.

  - Determine se a função $f(x)=x+1$, dos inteiros para os inteiros é injetora.

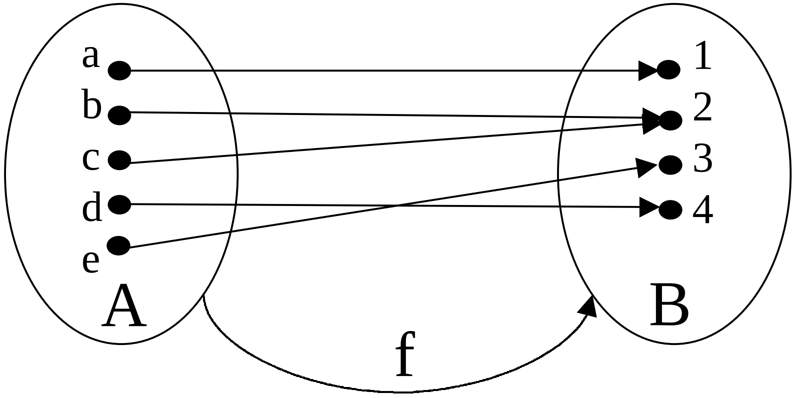
    Solução: A função $f(x)=x+1$ <u>é injetora</u> pois sempre $x \neq y$, $x+1 \neq y+1$.

Tipos de Funções

- Função Sobrejetora:
  - Uma função f de A em B é chamada sobrejetora, se e somente se para todo $b \in B$ existe um elemento $a \in A$ tal que $f(a)=b$.

  - Uma função f de A em B ($f: A \rightarrow B$) é sobrejetora se todos os elementos de B são imagens dos elementos de A.

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid (a,b) \in f$$



Tipos de Funções

- Função Sobrejetora - Exemplos:
  - Determine se a função $f(x)=x^2$, dos inteiros para os inteiros é sobrejetora.

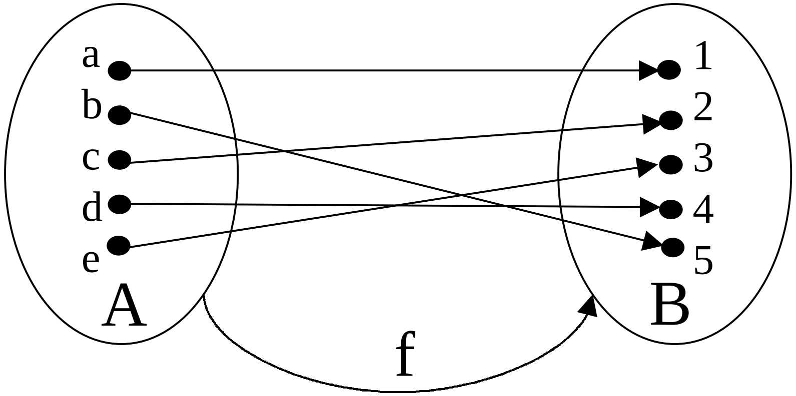
    Solução: A função $f(x)=x^2$ <u>não é sobrejetora</u> pois, por exemplo para $f(x)=-1$ não existe x tal que $x^2 = -1$.

  - Determine se a função $f(x)=x+1$, dos inteiros para os inteiros é sobrejetora.

    Solução: A função $f(x)=x+1$ <u>é sobrejetora</u> pois para todo inteiro y existe um inteiro x tal que $x+1=y$.

Tipos de Funções

- Função Bijetora:
  – Uma função f de A em B é chamada bijetora, se e somente se ela for injetora e sobrejetora simultaneamente.



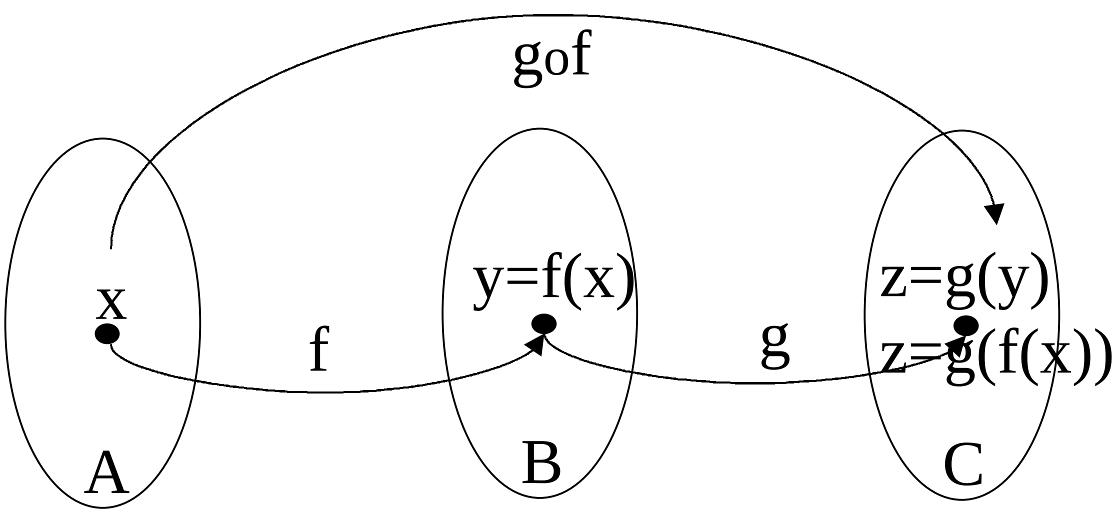
Tipos de Funções

- Exercícios:
  - Seja N o conjunto dos números naturais incluindo o zero. Determine quais das seguintes funções são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.
    - f:(N→N) f(j)=j2+2
    - f:(N→N) f(j)=j (mod) 3
    - f:(N→N) f(j)={ 0 se j for ímpar e 1 se j for par}
    - f:(N→{0,1}) f(j)={ 0 se j for ímpar e 1 se j for par}
  - Determine se a função f(x)=x+1, dos inteiros para os inteiros é bijetora.

    Solução: A função f(x)=x+1 <u>é bijetora</u> pois é injetora e sobrejetora.

Composição de Funções

- Definição:
  - Dados os conjuntos A, B e C, e as funções f de A em B definida por y=f(x) e g de B em C definida por z=g(y). Chama-se **<u>função composta</u>** de g com f, a função h=g $\circ$ f, de A em C, definida por z=g(f(x)).



Composição de Funções

- Exemplo:
  - Seja f a função do conjunto {a,b,c} para ele mesmo tal que f(a)=b, f(b)=c e f(c)=(a).
  - Seja g a função do conjunto {a,b,c} para o conjunto {1,2,3} tal que g(a)=3, g(b)=2, g(c)=1.

  Determine a composição de g e f, e a composição de f e g.

  - Solução:

    A composição de gof é definida como:

    - gof(a)=g(f(a))=g(b)=2;
    - gof(b)=g(f(b))=g(c)=1;
    - gof(c)=g(f(c))=g(a)=3;

    Não existe a composição de fog. POR QUE?

Composição de Funções

- Observações:
  - Só existirá a função composta $g_o f$ de X em Z se o contradomínio de f for um subconjunto do domínio de g.
  - A composição de funções NÃO É comutativa, isto é:

$$f_o g \neq g_o f$$

- Exercícios:
  - Seja $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{p,q\}$ e $Z=\{a,b\}$. Sejam também $f:X\rightarrow Y$ dada por $f=\{(1,p),(2,p),(3,q)\}$ e $g:Y\rightarrow Z$ dada por $g=\{(p,b),(q,b)\}$.

Ache $g_o f$.

$$g_o f=\{(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

Composição de Funções

- Exercícios:
  - Seja X={1,2,3} e sejam f, g, h e s funções de X em X definidas como:

    f={(1,2),(2,3),(3,1)}   g={(1,2),(2,1),(3,3)}

    h={(1,1),(2,2),(3,1)}   s={(1,1),(2,2),(3,3)}
  - Determine:

1. $f \circ g$={(1,3),(2,2),(3,1)}
2. $g \circ f$={(1,1),(2,3),(3,2)}
3. $f \circ h \circ g$={(1,3),(2,2),(3,2)}
4. $s \circ g$={(1,2),(2,1),(3,3)}
5. $g \circ s$={(1,2),(2,1),(3,3)}
6. $s \circ s$={(1,1),(2,2),(3,3)}
7. $f \circ s$={(1,2),(2,3),(3,1)}

Composição de Funções

- Exercícios:
  - Seja $f(x)=x+2$, $g(x)=x-2$ e $h(x)=3x$ para $x\in\mathbf{R}$.
  - Determine:

1. $f\circ g=\{(x,x) \mid x\in\mathbf{R}\}$
2. $g\circ f=\{(x,x) \mid x\in\mathbf{R}\}$
3. $f\circ f=\{(x,x+4) \mid x\in\mathbf{R}\}$
4. $g\circ g=\{(x,x-4) \mid x\in\mathbf{R}\}$
5. $f\circ h=\{(x,3x+2) \mid x\in\mathbf{R}\}$
6. $h\circ f=\{(x,3x+6) \mid x\in\mathbf{R}\}$
7. $h\circ g=\{(x,3x-6) \mid x\in\mathbf{R}\}$
8. $f\circ h\circ g=\{(x,3x-4) \mid x\in\mathbf{R}\}$

Função Inversa

- Definição:
  - Seja f:A$\rightarrow$B uma função bijetora. A **<u>função inversa</u>** de f é a função que associa a um elemento b$\in$B o elemento único de a$\in$A tal que f(a)=b.
    - A função inversa de f é denotada por f^{-1};
    - Portanto $f^{-1}(b)=a$ quando f(a)=b;
    - Uma função bijetora é chamada de <u>inversível</u>.
  - Exemplos:
    - Seja f a função de {a,b,c} em {1,2,3} tal que f(a)=2, f(b)=3 f(c)=1. Verifique se a função f é inversível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

    Solução:

    - A função f é inversível pois é bijetora e a função f^{-1} é:
    - $f^{-1}(1)=c$,
    - $f^{-1}(2)=a$,
    - $f^{-1}(3)=b$,

Função Inversa

- Exemplos:
  - Seja f a função de **Z** para **Z** com $f(x)=x^2$. Esta função é inversível?

  Solução:
  - Como f(-1)=f(1)=1, f NÃO É injetora.
  - Se uma f^{-1} fosse definida, ela teria de associar dois elementos a 1. Isto violaria a condição de unicidade. Logo f NÃO É inversível.

- Definição:
  - Uma função Ix: $X \rightarrow X$ é chamada de **função identidade** se $Ix=\{(x,x) \mid x \in X\}$.
  - A composição de uma função e sua inversa, em qualquer ordem, leva à função identidade.

$$f^{-1} \circ f = Ix = f \circ f^{-1}$$

Função Inversa

- Exemplos:
  - Num esquema de criptografia, um transmissor deseja que esta mensagem chegue com segurança a seu receptor. O transmissor escreve a mensagem em texto claro e aplica um método de codificação para produzir uma mensagem cifrada. A mensagem codificada é então transmitida ao receptor que aplica um método de decodificação para converter o texto cifrado novamente em texto claro.