SISTEMAS FUZZY

Ricardo Tanscheit

Departamento de Engenharia Elétrica
PUC-Rio

INTRODUÇÃO

- *Teoria de Conjuntos Fuzzy* → Zadeh (1965)

- *Lógica Fuzzy* → Zadeh (1973)
  → Diversos outros autores, posteriormente

INTRODUÇÃO

- *Lógica Fuzzy* →
  - *inspirada na lógica tradicional*
  - *procura modelar os modos imprecisos do raciocínio que têm um papel fundamental na habilidade humana de tomar decisões*

INTRODUÇÃO

- *Serve de base para o raciocínio aproximado ("approximate reasoning")*
- *fornece o ferramental matemático para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago*

INTRODUÇÃO

- *aplicações em diversas áreas do conhecimento:*
  - *Controle*
    - *diretamente sobre o processo*
    - *supervisão*
  - *previsão de séries*
  - *classificação*

INTRODUÇÃO

- *principais vantagens:*
  - *formulação através de regras linguísticas*
  - *não necessita de modelo matemático formal*
- *regras linguísticas:*
  - *obtidas através de especialistas*
  - *geradas através de dados numéricos*

Evolução da área

- ***Aplicações Comerciais e Industriais***.

ANO	# de APLICAÇÕES
1986	8
1987	15
1988	50
1989	100
1990	150
1991	300
1992	800
1993	1500

- ***Devido à resistência dos cientistas, a Lógica Fuzzy cresceu no mercado comercial para depois se desenvolver nas universidades***

Aplicações Comerciais

- **Controle**
  - **Controle de Aeronave (Rockwell Corp.)**
  - **Operação do Metrô de Sendai (Hitachi)**
  - **Transmissão Automática (Nissan, Subaru)**
  - **Space Shuttle Docking (NASA)**
- **Otimização e Planejamento**
  - **Elevadores (Hitachi, Fujitech, Mitsubishi)**
  - **Análise do Mercado de Ações (Yamaichi)**
- **Análise de Sinais**
  - **Ajuste da Imagem de TV (Sony)**
  - **Autofocus para Câmera de Vídeo (Canon)**
  - **Estabilizador de Imagens de Vídeo (Panasonic)**

CONJUNTOS FUZZY

- **Conjuntos Ordinários (ou "Crisp")**

  A noção de pertinência é bem definida: elementos **pertencem** ou **não pertencem** a um dado conjunto *A* (em um universo *X*)

$$f_A(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \ \ \textbf{se e somente se} \ \ x \in A \\ \mathbf{0} \ \ \textbf{se e somente se} \ \ x \notin A \end{cases}$$

f **: função característica**

CONJUNTOS FUZZY

Existem conjuntos cujo limite entre pertinência e não-pertinência *é* **vago**

Exemplos

- conjunto de ***pessoas altas***
- conjunto de ***carros caros***
- números ***muito maiores do que 1***

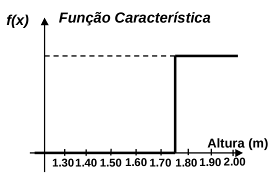
CONJUNTOS FUZZY

- **Conjuntos Fuzzy**
  - A função característica é generalizada, podendo assumir um número infinito de valores no intervalo [0,1] $\rightarrow$ ***função de pertinência***
  - Um conjunto fuzzy ***A*** em um universo ***X*** é definido por uma ***função de pertinência***

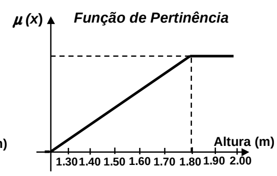
$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

CONJUNTOS FUZZY

- ***Exemplo:*** ***Pessoas Altas***



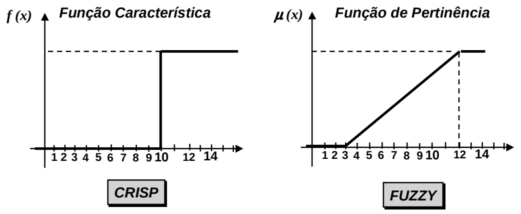
CRISP



FUZZY

CONJUNTOS FUZZY

- ***Exemplo: Números muito maiores do que 1***

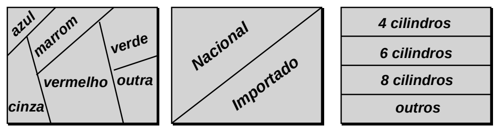


CONJUNTOS FUZZY

- ***Exemplo:***

  X **= todos os automóveis do Rio de Janeiro**

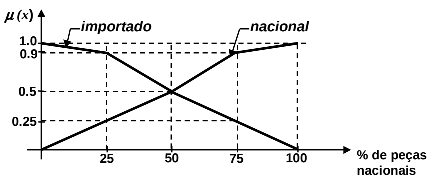
Conjuntos crisp



CONJUNTOS FUZZY

Conjunto ***A*** no universo ***X*** com $\mu_A(x) \in [0,1]$

medida do grau de <u>compatibilidade</u> de *x* com *A*



CONJUNTOS FUZZY

- ***Representação:***

  Um conjunto fuzzy *A* em *X* pode ser representado por um *conjunto de pares ordenados*

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X$$

CONJUNTOS FUZZY

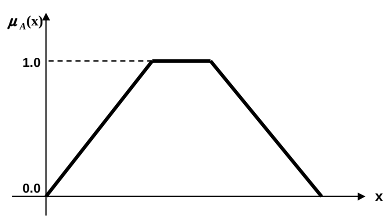
- ***Outra Representação:***

X Contínuo: $\int_X \mu_A(x)/x$

X Discreto: $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$

CONJUNTOS FUZZY

- ***Representação gráfica:***



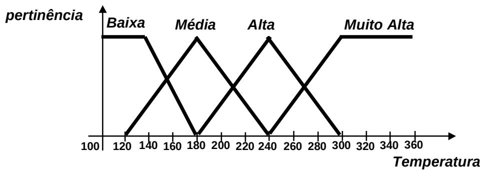
Variáveis Linguísticas

- **Têm a função de fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos**

Variáveis Linguísticas

- ***Variável linguística:*** variável cujos ***valores*** são nomes de conjuntos fuzzy

Exemplo: temperatura de um processo



Variáveis Linguísticas

- ***Formalismo:*** **caracterizada por uma quíntupla (*N*, *T*(*N*), *X*, *G*, *M*), onde:**

***N*: nome da variável**
temperatura

***T*(*N*): conjunto de termos de N, ou seja, o conjunto de nomes dos valores linguísticos de N**
{baixa, média, alta, muito alta}

***X*: universo de discurso**
100 a 360 ºC

Variáveis Linguísticas

***G*: regra sintática para gerar os *valores* de N como uma composição de termos de *T*(*N*), conectivos lógicos, modificadores e delimitadores**
temperatura *não baixa*
temperatura *não muito alta*

M*: regra semântica, para associar a cada valor gerado por *G* um conjunto fuzzy em *X
associa os *valores* acima a *conjuntos fuzzy* cujas *funções de pertinência* exprimem seus significados

Funções de Pertinência

- **Aos *termos* de uma *variável linguística* (ou a seus *valores*) faz-se corresponder conjuntos fuzzy, definidos por suas *funções de pertinência***
- **Podem ter formas padrão ou definidas pelo usuário**

Funções de Pertinência

- **Contínuas: podem ser definidas por meio de funções analíticas**

$$\boxed{\mu_A(x) = (1 + (a(x-c))^b)^{-1}}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = (1 + 9x^2)^{-1}$$

$$\mu_{médio}(x) = (1 + 9(x-0{,}5)^2)^{-1}$$

$$\mu_{grande}(x) = (1 + 9(x-2)^2)^{-1}$$

Funções de Pertinência

- **Discretas: consistem em valores discretos correspondendo a elementos (discretos) do universo**

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mu_{pequeno}(x) = \{0,3;\ 0,7;\ 1;\ 0,7;\ 0,3;\ 0;\ 0\}$$

$$\mu_{médio}(x) = \{0;\ 0;\ 0,3;\ 0,7;\ 1;\ 0,7;\ 0,3\}$$

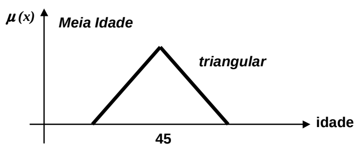
$$\mu_{grande}(x) = \{0;\ 0;\ 0;\ 0\ \ 0,3;\ 0,7;\ 1\}$$

Funções de Pertinência

- **Diferentes pessoas, ou grupos de pessoas, podem definir funções de pertinência (para um mesmo conjunto) de forma diferente**
  - **Exemplo: estatura de pessoas**

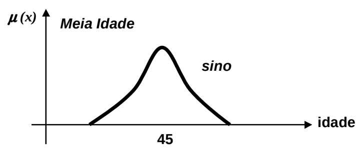
Funções de Pertinência

- ***Exemplo: conjunto fuzzy "meia idade"***



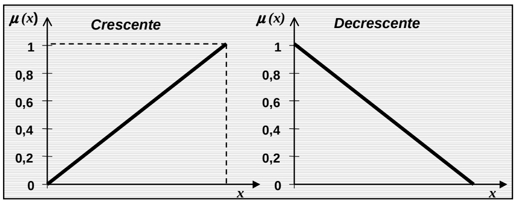
Funções de Pertinência

- ***Exemplo: conjunto fuzzy "meia idade"***



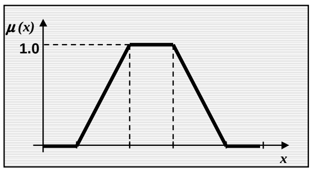
Funções de Pertinência

- ***Linear***



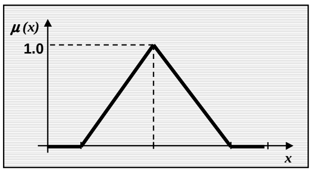
Funções de Pertinência

- ***Trapezoidal*** ➲ **Rápido processamento** ➲ **Contém descontinuidades**



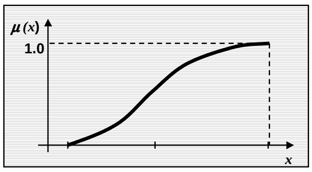
Funções de Pertinência

- ***Triangular*** **(caso particular de Trapezoidal)**



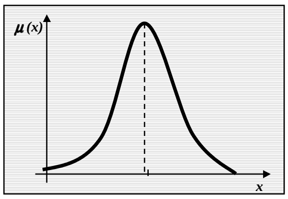
Funções de Pertinência

- ***Formato S***



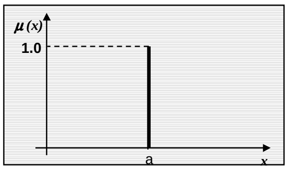
Funções de Pertinência

- ***Gaussiana***



Funções de Pertinência

- ***Singleton***
  - ***não é*** **um conjunto fuzzy**
  - **simplifica os cálculos para produzir saídas fuzzy (quando usado na entrada).**



Definições e operações

- ***Conjunto Vazio***

$$A = \varnothing \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

- ***Complemento***

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

Definições e operações

- ***Conjuntos iguais***

$$A = B \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

- ***A subconjunto de B***

$$A \subset B \quad \text{se} \quad \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Definições e operações

- ***Interseção - Conjuntos ordinários***

Contém todos os elementos que pertencem a *A e* a *B*

$f_{A\cap B}(x)=1$ se $x\in A$ e $x\in B$

$f_{A\cap B}(x)=0$ se $x\notin A$ ou $x\notin B$

⬇

$$\boxed{f_{A\cap B}(x)= f_A(x)\wedge f_B(x) \qquad \forall x\in X}$$

Definições e operações

- ***União - Conjuntos ordinários***

Contém todos os elementos que pertencem a *A ou* a *B*

⬇

$$\boxed{f_{A\cup B}(x)= f_A(x)\vee f_B(x) \qquad \forall x\in X}$$

Definições e operações

- ***Interseção e União - Conjuntos fuzzy***

Zadeh estendeu as descrições de conjuntos ordinários para conjuntos fuzzy

⬇

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x) \qquad \forall x\in X$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x) \qquad \forall x\in X$$

Definições e operações

- ***Generalização***

⬇

operadores *norma-t* e *co-norma-t* (*norma-s*)

- **Operações binárias de [0,1] x [0,1] → [0,1], tal que, ∀*x, y, z, w* ∈ [0,1], determinadas propriedades são satisfeitas.**

Definições e operações

Norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x*y=y*x$$

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

$$\text{se } x\le y,\ w\le z, \text{ então } x*w\le y*z$$

$$x*0=0 \quad \text{e} \quad x*1=x$$

Exemplos: *min* e *produto*

Definições e operações

Co-norma-t

As seguintes propriedades são satisfeitas:

$$x\oplus y=y\oplus x$$

$$(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$$

$$\text{se } x\le y,\ w\le z, \text{ então } x\oplus w\le y\oplus z$$

$$x\oplus 0=x \quad \text{e} \quad x\oplus 1=1$$

Exemplo: *max*

Propriedades

Utilizando os operadores *max* e *min* para a união e interseção fuzzy, verificam-se as seguintes propriedades:

$$(A')' = A$$

$$\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$$

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$

Propriedades

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$$

Propriedades

$$\text{se } A \subset B \text{ e } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$$\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

Propriedades

Observando que as funções de pertinência dos conjuntos vazio e universo são 0 e 1:

$$\begin{cases} A \cap \varnothing = \varnothing \\ A \cup \varnothing = A \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A \cap X = A \\ A \cup X = X \end{cases}$$

Propriedades

Conjuntos ordinários:

$$A \cap A' = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup A' = X$$

Conjuntos fuzzy:

$$\mu_{A \cap A'}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_A(x)) \neq 0 \Rightarrow A \cap A' \neq \varnothing$$

$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_A(x) \vee (1 - \mu_A(x)) \neq 1 \Rightarrow A \cup A' \neq X$$

Obs: em geral normas-t e co-normas-t não satisfazem as leis acima

Relações Fuzzy

Conjuntos ordinários: uma relação exprime a *presença* ou a *ausência* de uma associação entre dois (ou mais) conjuntos

Relações Fuzzy

Conjuntos ordinários: dados os universos *X* e *Y*, a relação *R* definida em *X* x *Y* é um subconjunto do produto cartesiano dos dois universos, tal que *R*: *X* x *Y* → {0,1}

função característica

$$f_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } (x,y) \in R \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Relações Fuzzy

Conjuntos fuzzy: a *relação fuzzy R* representa o grau da associação entre elementos de dois (ou mais) conjuntos fuzzy

função de pertinência

$$\mu_R(x,y) \in [0,1]$$

Relações Fuzzy

Exemplo:

$X = \{x_1, x_2\}$ = {Fortaleza, Florianópolis}

$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ = {Porto Alegre, Criciúma, Curitiba}

R: "muito próxima".

Relações Fuzzy

Matriz Relacional* para o caso *ordinário

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0	0	0
x_2	Florianópolis	1	1	1

Relações Fuzzy

Matriz Relacional* para o caso *fuzzy

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0,1	0,2	0,3
x_2	Florianópolis	0,8	1	0,8

Composição de Relações

- Representa um papel muito importante em sistemas de inferência fuzzy
- Caso ordinário (*não-fuzzy*): dadas as relações $P(X,Y)$ e $Q(Y,Z)$, a composição é definida por

$$\boxed{R(X,Z) = P(X,Y) \circ Q(Y,Z)}$$

subconjunto de $X \times Z$ tal que $(x,z) \in R$ *se e somente se existir pelo menos um* $y \in Y$ tal que $(x,y) \in P$ e $(y,z) \in Q$

Composição de Relações

- *Exemplo (caso não-fuzzy)*

$$P(X,Y) = \begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{c|cccc} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(X,Z) = \begin{array}{c|cccc} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Composição de Relações

A operação realizada para se obter a *composição das relações pode ser* representada por:

- *composição max-min:*

$$\boxed{f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [min(f_P(x,y), f_Q(y,z))]\}}$$

- *composição max-produto:*

$$\boxed{f_R(x,z) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [(f_P(x,y)\, f_Q(y,z))]\}}$$

Composição de Relações

Exemplificando para o cálculo do elemento (x_1,z_2) de R:

$$f_R(x_1,z_2) = f_{P \circ Q}(x,z) = \{(x_1,z_2), \max_y [min(f_P(x_1,y), f_Q(y,z_2))]\} =$$

$$\{(x_1,z_2), max[min(f_P(x_1,y_1), f_Q(y_1,z_2)), min(f_P(x_1,y_2), f_Q(y_2,z_2)),$$
$$min(f_P(x_1,y_3), f_Q(y_3,z_2)), min(f_P(x_1,y_4), f_Q(y_4,z_2))]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), max[min(0,0), min(1,0), min(0,1), min(1,0)]\}$$

$$f_R(x_1,z_2) = \{(x_1,z_2), max[0,0,0,0]\} = 0$$

Composição de Relações

Composição *fuzzy* ⇒ faz-se uma generalização do caso não-fuzzy

$$\boxed{\mu_R(x,z) = \mu_{P \circ Q}(x,z) = \sup_y [\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z)]}$$

- a norma-t é *usualmente* o *min* ou o *produto*
- para universos finitos, o *sup* é o *max*

Composição de Relações

Exemplo (caso fuzzy)

- Estudantes:
  X = {Maria, João, Pedro}
- Características de cursos
  Y = {teoria, aplicação, hardware, programação}
- Cursos
  Z = {lógica fuzzy, controle fuzzy, redes neurais, sistemas especialistas}

Composição de Relações

Exemplo (caso fuzzy)

– Interesse dos estudantes, em termos das características dos cursos:

$$P(X,Y) = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

Exemplo (caso fuzzy)

– Características dos cursos:

$$Q(Y,Z) = \begin{array}{r} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Composição de Relações

Exemplo (caso fuzzy)

– A composição (*max-min*) pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos:

$$P \circ Q = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obs: *ao contrário deste exemplo*, a composição *max-produto* geralmente não produz o mesmo resultado!

Composição de Relações

Caso especial: P é um *conjunto fuzzy* apenas

⬇

em vez de $\mu_P(x,y)$ tem-se $\mu_P(x)$, o que é equivalente a se ter $X = Y$

⬇

$$\boxed{\mu_R(z) = \sup_x [\mu_P(x) * \mu_Q(x,z)]}$$

Obs: resultado fundamental para sistemas de inferência fuzzy!

Proposições Fuzzy

- Frases da forma Π é *A*, onde *A* é um conjunto fuzzy definido no universo *X* de Π
- Podem ser combinadas por meio de diferentes operadores:
  - conectivos lógicos *e* e *ou*
  - negação : *não*
  - operador de implicação: *se .... então*
- Podem ser descritas em termos de relações fuzzy

Proposições Fuzzy

- Conectivos:
  - *e* → usado com variáveis em universos diferentes

    Ex: *temperatura* é *alta e pressão* é *baixa*
  - *ou* → conecta valores linguísticos de uma mesma variável

    Ex: *temperatura* é *alta ou baixa*

    → em sentenças do tipo *se .... então*, pode ser usado com variáveis diferentes

    Ex: se a *pressão* é *alta ou* a *temperatura* é *baixa*

Proposições Fuzzy

- **Negação:**

$$A=\{\mu_A(x)/x\} \;\Rightarrow\; \textit{não } A=\{(1-\mu_A(x))/x\}$$

  - **Exemplo:** ***pressão é não alta***

Proposições Fuzzy

- **Considerem-se:**
  - ***variáveis linguísticas*** **de nomes x e y definidas em universos X e Y**
  - ***conjuntos fuzzy*** **A e B definidas em X e Y**
  - ***proposições fuzzy*** $\begin{cases} x \text{ é } A \\ y \text{ é } B \end{cases}$

Proposições Fuzzy

Conexão das proposições por meio de *ou*

$\downarrow$

$$(x \text{ é } A)\ ou\ (y \text{ é } B)$$

$\downarrow$ **relação fuzzy** $R_{A\,ou\,B}$

$$\boxed{\mu_R(x,y)=\mu_A(x)\oplus\mu_B(y)}$$

$\downarrow$

co-norma-t (geralmente o *max*)

Proposições Fuzzy

Conexão das proposições por meio de *e*

$\downarrow$

$$(x \text{ é } A)\ e\ (y \text{ é } B)$$

$\downarrow$ **relação fuzzy** $R_{A\,e\,B}$

$$\boxed{\mu_R(x,y)=\mu_A(x)*\mu_B(y)}$$

$\downarrow$

norma-t (geralmente o *min* ou o *produto*)

Proposições Fuzzy

Declaração condicional fuzzy **(operação *se .... então*)**

(descreve a dependência do valor de uma variável linguística em relação ao valor de outra)

$\downarrow$

$$se\,(x \text{ é } A)\ então\ (y \text{ é } B)$$

$\downarrow$ **relação fuzzy** $R_{A\to B}$

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y)=f_{\to}(\mu_A(x),\mu_B(y))}$$

$\downarrow$

operador de *implicação*

Proposições Fuzzy

Mais de um *antecedente*:

$\downarrow$

$$se\ (x_1 \text{ é } A_1)\ e\ (x_2 \text{ é } A_2)\ e \ldots.e\ \ (x_m \text{ é } A_m)\ então\ (y \text{ é } B)$$

$\downarrow$ **relação fuzzy**

$$\boxed{\mu_R(x_1,x_2,\ldots,x_m,y)=f_{\to}(f_e(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2),\ldots,\mu_{A_m}(x_m)),\mu_B(y))}$$

$\downarrow$

operador que representa o conectivo *e*
(geralmente *min* ou *produto*)

Proposições Fuzzy

Combinação de R^N declarações condicionais por *ou*

⇓

$$R^1 : se\ (x\ é\ A^1)\ \ então\ (y\ é\ B^1)\ \ ou$$
$$R^2 : se\ (x\ é\ A^2)\ \ então\ (y\ é\ B^2)\ \ ou$$
$$\vdots$$
$$R^n : se\ (x\ é\ A^n)\ \ então\ (y\ é\ B^n)$$

⇓

$$\boxed{\begin{array}{l}\mu_{R^N}(x,y) = f_{ou}[\mu_{R^1}(x,y), \mu_{R^2}(x,y), \ldots, \mu_{R^n}(x,y)] = \\ f_{ou}[f_{\rightarrow}(\mu_{A^1}(x), \mu_{B^1}(y)), f_{\rightarrow}(\mu_{A^2}(x), \mu_{B^2}(y)), \ldots, f_{\rightarrow}(\mu_{A^n}(x), \mu_{B^n}(y))]\end{array}}$$

operador que representa o conectivo *ou* (geralmente *max*)

ICA

LÓGICA FUZZY

- ***Regras são implicações lógicas***

se *x* é *A* então *y* é *B*

⇓

a função de pertinência desta *relação* é definida por meio do *operador de* <u>*implicação*</u>

⇓

relacionada à *Lógica Proposicional*

ICA

Lógica Proposicional

- **Regras são formas de *proposição***

⇓

declaração envolvendo termos já definidos

Ex: a *temperatura* é *alta*
se temperatura* é *alta então diminui a vazão

ICA

Lógica Proposicional

- **Proposições podem ser *verdadeiras* ou *falsas***
- **Proposições *p* e *q* podem ser combinadas a partir de três operações básicas:**
  - ***conjunção***
  - ***disjunção***
  - ***implicação***

ICA

Lógica Proposicional

- ***Conjunção:*** $p \wedge q$

  estabelece a verdade simultânea de duas proposições *p* e *q*

- ***Disjunção:*** $p \vee q$

  estabelece a verdade de uma ou de ambas as proposições *p* e *q*

ICA

Lógica Proposicional

- ***Implicação:*** $p \rightarrow q$

  verifica se a regra abaixo é *verdadeira* (V)

se *p* então *q*

antecedente — consequente

ICA

Lógica Proposicional

Outras operações:

- ***Equivalência:*** $p \Leftrightarrow q$

  verifica se as duas proposições são *simultaneamente verdadeiras* ou *simultaneamente falsas*

- ***Negação:*** $\sim p$

  para se dizer *é falso que ....*

Lógica Proposicional

- **Proposições não relacionadas entre si podem ser combinadas para formar uma *implicação***
- **Não se considera nenhuma relação de *causalidade***

Lógica Proposicional

- ***A implicação é verdadeira quando:***
  - **antecedente é V, consequente é V**
  - **antecedente é F, consequente é F**
  - **antecedente é F, consequente é V**
- ***A implicação é falsa quando:***
  - **antecedente é V, consequente é F**

Lógica Proposicional

- ***Tabelas Verdade:***

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$\sim p$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Lógica Proposicional

- ***Axiomas Fundamentais:***
  - **Cada proposição é V ou F, mas nunca ambos**
  - **As tabelas verdade de:**
    - **Conjunção**
    - **Disjunção**
    - **Equivalência**
    - **Implicação**
    - **Negação**

Lógica Proposicional

Exemplo:

Considere-se a declaração condicional

***se* eu *estiver bem de saúde* (*p*)**

***então irei à escola* (*q*)**

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p = V*** **(*estou bem de saúde*)**
q = V **(*fui à escola*)**

⬇

promessa <u>cumprida</u> → declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p = V*** **(*estou bem de saúde*)**
q = F **(*não fui à escola*)**

⬇

promessa <u>violada</u> → declaração *falsa*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p = F*** **(*não estou bem de saúde*)**
q = V **(*fui à escola*)**

⬇

promessa (de *ir à escola*) <u>cumprida</u> → declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

Situações possíveis:

⇒ ***p = F*** **(*não estou bem de saúde*)**
q = F **(*não fui à escola*)**

⬇

promessa <u>não violada</u> → declaração *verdadeira*

Lógica Proposicional

- ***TAUTOLOGIA:***

⇒ **É uma proposição sempre verdadeira formada a partir da combinação de outras proposições**

Lógica Proposicional

- ***Tautologias importantes:***

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

Lógica Proposicional

- *Comprovação das tautologias:*

$(p \to q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$ $(p \to q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [p \wedge (\sim q)]$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Lógica Proposicional

Isomorfismos:

"O **isomorfismo** entre **álgebra booleana**, **teoria dos conjuntos** e **lógica proposicional** garante que cada **teorema** em qualquer uma dessas teorias tem um **teorema equivalente** em cada uma das outras duas teorias"

Lógica Proposicional

Equivalências importantes:

LÓGICA	TEORIA DOS CONJUNTOS	ÁLGEBRA BOOLEANA
$\wedge$	$\cap$	$\times$
$\vee$	$\cup$	$+$
$\sim$	$'$	$'$
V		1
F		0
$\leftrightarrow$		=

Lógica Proposicional

- **Considerando**
  - **as tautologias anteriores**
  - **as equivalências entre lógica, teoria de conjuntos e álgebra booleana**
  - **que, em conjuntos ordinários, a função característica pode assumir apenas os valores 0 e 1**

➡ **obtêm-se funções características para a *implicação***

Lógica Proposicional Tradicional

- *Tautologia 1:*

$(p \to q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]$

⇩

$$f_{p \to q}(x, y) = 1 - min[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- *Tautologia 2:*

$(p \to q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$

⇩

$$f_{p \to q}(x, y) = max[1 - f_p(x), f_q(y)]$$

Lógica Proposicional

- *Demonstração:*

I $\boxed{f_{p\rightarrow q}(x,y) = max[1 - f_p(x), f_q(y)]}$

II $\boxed{f_{p\rightarrow q}(x,y) = 1 - min[f_p(x), 1 - f_q(y)]}$

$f_p(x)$	$f_q(y)$	1 - $f_p(x)$	1 - $f_q(y)$	I	II
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Lógica Proposicional

- **Existem inúmeras outras funções características para a implicação, não necessariamente fazendo uso dos operadores *max* e *min***

Lógica Proposicional

⇨***Regras de Inferência Clássicas:***

- **Modus Ponens**
- **Modus Tollens**

Lógica Proposicional

- ***Modus ponens:***

Premissa 1:	***x* é *A***	**(*p*)**
Premissa 2:	**se *x* é *A* então *y* é *B***	**(*p*→*q*)**
Consequência:	***y* é *B***	**(*q*)**

$\boxed{[\, p \wedge (p \rightarrow q)\,] \rightarrow q}$

Lógica Fuzzy

- **Os conceitos de Lógica Fuzzy nasceram inspirados na lógica proposicional (tradicional)**
- **A extensão da lógica tradicional para a Lógica Fuzzy foi efetuada através da substituição das funções características (bivalentes) por funções de pertinência fuzzy**

Lógica Fuzzy

- **A declaração condicional**

se *x* é *A* então *y* é *B*

tem uma função de pertinência

$\boxed{\mu_{A\rightarrow B}(x,y)}$

⬇

mede o *grau de verdade* da *relação de implicação* entre *x* e *y*

Lógica Fuzzy

- Exemplos de *funções de implicação*, obtidas por simples extensão da lógica tradicional:

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y) = 1 - min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]}$$

$$\boxed{\mu_{A\to B}(x,y) = max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]}$$

Lógica Fuzzy

- ***Modus ponens generalizado:***

Premissa 1: ***x* é *A****
Premissa 2: **se *x* é *A* então *y* é *B***
Conclusão: ***y* é *B****

A^* e B^* não são necessariamente iguais a *A* e *B*, respectivamente

Lógica Fuzzy

- ***Exemplo:***

se *homem* é *baixo*
então *homem não é bom jogador de basquete*

⇓

A = baixo
B = não é bom jogador de basquete

⇓

Premissa: *homem* é $\underbrace{\textit{abaixo de 1.60m}}_{A^*}$

Conclusão: *homem* é $\underbrace{\textit{mau jogador de basquete}}_{B^*}$

Lógica Fuzzy

Conclusão

- ***Lógica Tradicional (Crisp)*** ⇨

A regra é disparada somente se a premissa 1 for exatamente igual ao antecedente, sendo que o resultado da regra é o próprio consequente.

Lógica Fuzzy

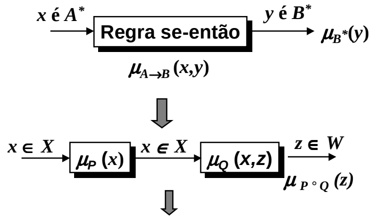
Conclusão:

- ***Lógica Fuzzy*** ⇨

A regra é disparada desde que exista um grau de similaridade diferente de zero entre a premissa 1 e o antecedente da regra, sendo que o resultado é um consequente que tem um grau de similaridade diferente de zero com o consequente da regra.

Lógica Fuzzy

Interpretação do Modus Ponens Generalizado:



Composição de um conjunto fuzzy com uma relação fuzzy

Lógica Fuzzy

O Modus Ponens Generalizado é uma composição de relações fuzzy, onde a primeira relação é apenas um conjunto fuzzy e a segunda é a relação de implicação.

$$\boxed{\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]}$$

Lógica Fuzzy

Exemplo:

- **dada a *relação de implicação*:**

$$\mu_{A \to B}(x, y) = max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]$$

- **e dois conjuntos *A* e *B*, em universos discretos e finitos *X* e *Y*, com funções de pertinência:**

Lógica Fuzzy

$$\mu_A(x) = \{0;\ 0{,}2;\ 0{,}7; 1;\ 0{,}4;\ 0\}$$

$$\mu_B(y) = \{0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0\}$$

- **obtém-se*:***

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lógica Fuzzy

- **dado um conjunto A^* definido por:**

$$\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0{,}3;\ 0{,}8; 1;\ 0{,}7;\ 0{,}2\}$$

- **e utilizando o *min* para a norma-t em:**

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

$\Downarrow$

(universos discretos e finitos: *sup* $\to$ *max*)

Lógica Fuzzy

- **tem-se**

$$\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0{,}3;\ 0{,}8; 1;\ 0{,}7;\ 0{,}2\} \quad \mu_{A \to B}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\mu_{B^*}(y) = \begin{Bmatrix} max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}3;\ 1 \wedge 0{,}3;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}8;\ 0{,}7 \wedge 0{,}8;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 1;\ 0{,}8 \wedge 1;\ 1 \wedge 1;\ 0{,}7 \wedge 1;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}5;\ 1 \wedge 0{,}5;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}3;\ 1 \wedge 0;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \end{Bmatrix}$$

$$= \{0{,}6;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}6;\ 0{,}6\}$$

Lógica Fuzzy

Supondo que a entrada A^* do sistema seja precisa (não-fuzzy):

A^* é um singleton

$\Downarrow$

$$\boxed{\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = x' \\ 0 & \text{para todo outro } x \in X \end{cases}}$$

Lógica Fuzzy

Como $x \neq 0$ apenas no ponto x', o *sup* torna-se desnecessário

⇩

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_{B^*}(y) &= [\mu_{A^*}(x') * \mu_{A\to B}(x', y)] \\ &= [1 * \mu_{A\to B}(x', y)] \\ &= \mu_{A\to B}(x', y) \end{aligned}}$$

LÓGICA FUZZY

Exemplo: **considere-se a implicação**

$$\mu_{A\to B}(x, y) = 1 - min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]$$

e conjuntos *A* e *B* representados por funções de pertinência triangulares, em universos contínuos

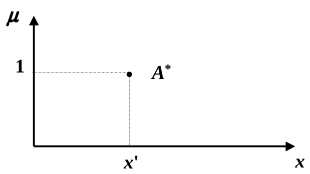
LÓGICA FUZZY

Para uma entrada *singleton* x', o consequente B^* será dado por:

$$\mu_{B^*}(y) = 1 - min[\mu_A(x'), 1 - \mu_B(y)]$$

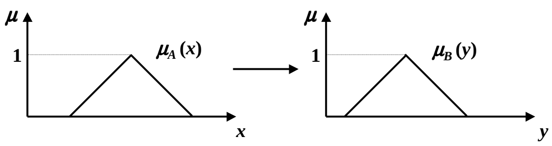
Graficamente, o procedimento consiste em:

Lógica Fuzzy



Lógica Fuzzy

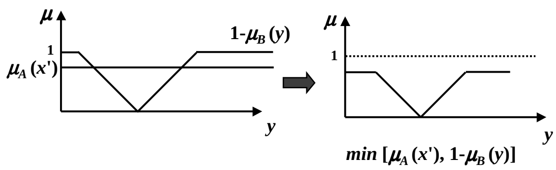
Regra (implicação): *se A então B*



Lógica Fuzzy

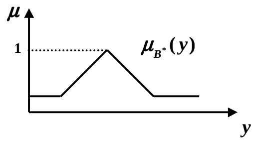
Operações (passo a passo):

observando que $\mu_A(x') < 1$



Lógica Fuzzy

Resultado final (consequente):



Lógica Fuzzy

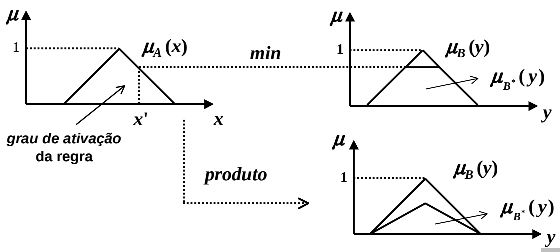
- **Observa-se que o resultado de uma regra específica, cujo *consequente* é associado a um conjunto fuzzy com *suporte finito*, é um *conjunto fuzzy com suporte infinito***
- **Este comportamento, que é observado também para *outras implicações*, *viola o senso comum, de importância em aplicações em engenharia***

⬇

foram definidas implicações que não violassem o senso comum : *min* e *produto* [Mamdani e Larsen → Controle], mesmo rompendo o vínculo com a lógica proposicional

Lógica Fuzzy

Refazendo o *exemplo* com essas implicações:



Lógica Fuzzy

- **Com estas implicações, chamadas de *implicações de engenharia* [Mendel], observa-se que:**
  - **o conjunto fuzzy resultante está *diretamente associado ao consequente da regra*.**
  - **não existe mais o *patamar* (*suporte infinito*)**
- **Outros operadores também são usados para *implicação*** ➡ **geralmente *normas-t***

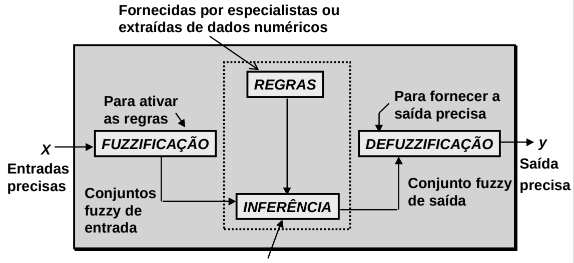
Lógica Fuzzy

- **Quanto aos demais operadores, utilizam-se, geralmente:**
  - **conectivo *e* (f_e) ➡ *normas-t***
  - **conectivo *ou* (f_{ou}) ➡ *co-normas-t***
  - ***norma-t* no *modus ponens generalizado* ➡ *min***

⬇

regra de inferência *max-min*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY



- **Mapeia conjuntos fuzzy em conjuntos fuzzy**
- **Determina como as regras são ativadas e combinadas**

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

- ***Fuzzificação***: ***mapeamento*** **de dados precisos para os conjuntos fuzzy (de entrada)**
- ***Defuzzificação***: ***interpretação*** **do conjunto fuzzy de saída**

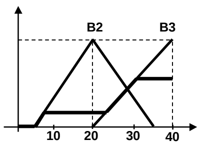
Exemplos de métodos:
- ***Centro de Gravidade***
- ***Média dos Máximos***

DEFUZZIFICAÇÃO

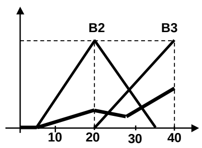
- **Existem vários métodos diferentes**
- **Os mais utilizados são:**
  - **Máximo**
  - **Média dos Máximos**
  - **Centróide (ou Centro de Gravidade)**
  - **Altura**
  - **Altura Modificada**

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Máximo:*** **examina-se o conjunto fuzzy de saída e escolhe-se, como valor preciso, o valor no universo da variável de saída para o qual o grau de pertinência é o máximo**



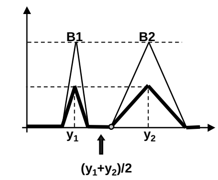
Qual valor escolher se o máximo for uma faixa?



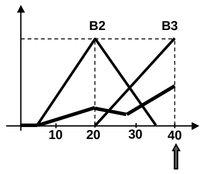
O valor máximo é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Média dos máximos:*** **a saída precisa é obtida tomando-se a média entre os dois elementos extremos no universo que correspondem aos maiores valores da função de pertinência do conjunto fuzzy de saída**



O valor preciso possui grau de pertinência igual a ZERO!!



O valor preciso é o limite superior do Universo de Discurso!!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Centróide***: **a saída precisa (y_C) é o valor no universo que corresponde ao centro de gravidade do conjunto fuzzy (B)**

Contínuo

$$y_C = \frac{\int y\mu_B(y)dy}{\int \mu_B(y)dy}$$

Discreto

$$y_C = \frac{\sum y_i \mu_B(y_i)}{\sum \mu_B(y_i)}$$

Problema: dificuldade no cálculo!

DEFUZZIFICAÇÃO

- ***Altura:*** **calcula-se**

$$y_h = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)}$$

y^l: **valor no universo correspondente ao** ***centro de gravidade*** **do conjunto fuzzy** B^l, **associado ao grau de ativação da regra** R^l

DEFUZZIFICAÇÃO

- *Altura (continuação)*
  - Método simples ⟹ o valor no universo que corresponde ao centro de gravidade das funções de pertinência mais comuns é conhecido a priori:
    - Triangular (simétrica) ⇒ corresponde ao ápice do triângulo
    - Guassiana ⇒ corresponde ao centro da função
    - Trapezoidal (simétrica) ⇒ corresponde ao ponto médio do suporte
  - *Problemas:*
    - só utiliza o centro do suporte da função de pertinência do consequente
    - qualquer que seja *a largura da função* de pertinência, fornece *o mesmo resultado!*

DEFUZZIFICAÇÃO

- *Altura modificada:* calcula-se

$$y_{mh} = \frac{\sum_l y^l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}{\sum_l \mu_{B^l}(y^l)/(\delta^l)^2}$$

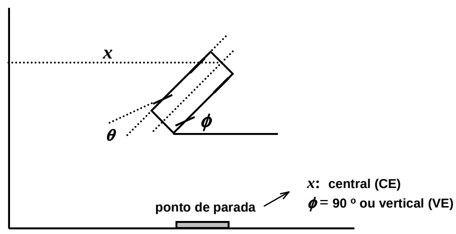
δ^l: medida da extensão do suporte do consequente da Regra R^l

funções de pertinência triangulares e trapezoidais ⟹ suporte do conjunto.

funções de pertinência gaussianas ⟹ desvio padrão

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Exemplo: Estacionamento de um veículo



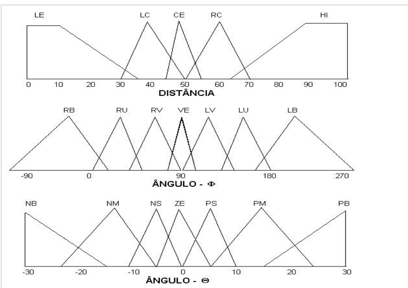
SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

φ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

Regra: se (x *é* LE) *e* (ϕ *é* RB) *então* (θ *é* PS)

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

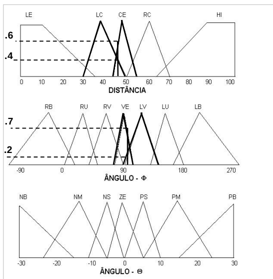
Conjuntos fuzzy:



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Entradas precisas: x = 47,5m ϕ = 99°

φ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Operadores considerados *neste exemplo*:

- conectivo *e* (f_e) ⟹ *min*
- implicação ⟹ *min*
- *norma-t* no *modus ponens generalizado* ⟹ *min*
- conectivo *ou* (f_{ou}) ⟹ *max*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Dois antecedentes: $\mu_{B'}(\theta) = (\mu_{A_1}(x') \wedge \mu_{A_2}(\phi')) \wedge \mu_B(\theta)$

Para cada uma das regras ativadas, tem-se:
(cf. figuras a seguir)

$$\mu_{NM'}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}4 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

$$\mu_{NM'}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

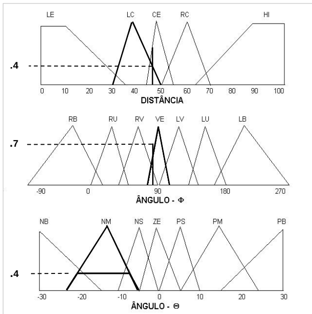
$$\mu_{ZE'}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = 0{,}6 \wedge \mu_{ZE}(\theta)$$

$$\mu_{NS'}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NS}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NS}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NS}(\theta)$$

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{NM'}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}4 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

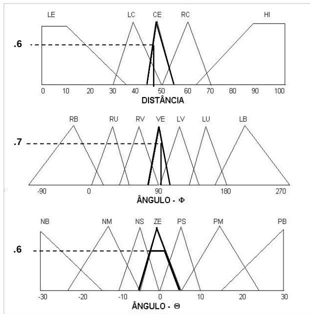
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{ZE'}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}7) \wedge \mu_{ZE}(\theta) = 0{,}6 \wedge \mu_{ZE}(\theta)$$

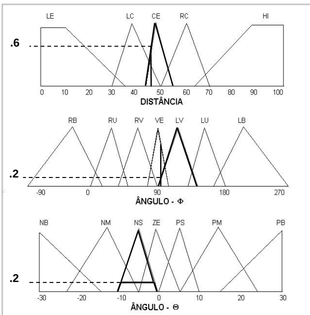
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

$$\mu_{NS'}(\theta) = (\mu_{CE}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NS}(\theta) = (0{,}6 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NS}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NS}(\theta)$$

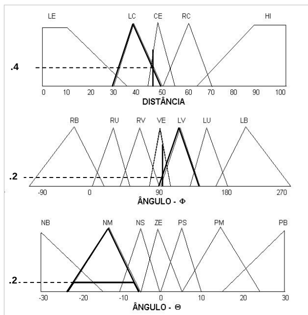
ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

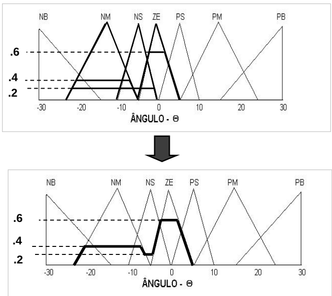
$$\mu_{NM'}(\theta) = (\mu_{LC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{NM}(\theta) = (0{,}4 \wedge 0{,}2) \wedge \mu_{NM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{NM}(\theta)$$

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS



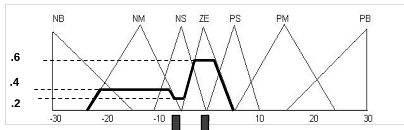
SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

União dos consequentes de cada regra



SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Defuzzificação:



COG **MOM**

COG: **considera todas as regras** ⇒ **forma dos conjuntos é importante**

MOM: **considera somente as regras com o *maior grau de ativação***

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Número de conjuntos* (ou de funções de pertinência) *dos antecedentes

⇓

Número de regras possíveis
(5 x 7 = 35, *no exemplo*)

muitos conjuntos ⇒

- ***dificuldade na construção da base de regras***
- ***maior custo computacional***
- ***menor interpretabilidade (linguística)***

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Formas das funções de pertinência

⇓

- ***arbitrárias, de início***
- ***ajustadas de acordo com o desempenho***

⇓

sistemas *neuro-fuzzy* e *fuzzy-genéticos*

SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Conclusão ⇒ **o desempenho de um sistema fuzzy é afetado por:**

- **base de regras**
- **número e forma dos conjuntos fuzzy**
- **operador de implicação**
- **método de defuzzificação**

COMENTÁRIOS FINAIS

***Números Fuzzy:* conjuntos fuzzy definidos no conjunto dos números reais**

⇓

Aplicações em:
- ***Programação Linear Fuzzy***
- ***Previsão***
- ***Planejamento***

⇓

Aritmética Fuzzy

⇓

base do *Raciocínio Aproximado*

COMENTÁRIOS FINAIS

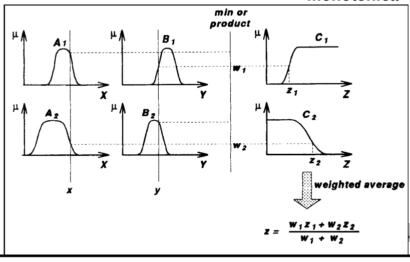
Outros Sistemas de Inferência Fuzzy

Tsukamoto ⇒ se x é A e y é B então z é C

monotônica

Regra 1

Regra 2



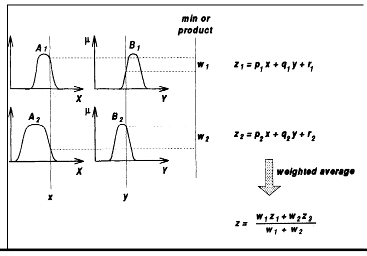
COMENTÁRIOS FINAIS

Outros Sistemas de Inferência Fuzzy

Takagi-Sugeno-(Kang) ⇒ se x é A e y é B então z = f(x,y)

Regra 1

Regra 2



COMENTÁRIOS FINAIS

Áreas de aplicação de Sistemas Fuzzy e Híbridos:

(bibliografia abundante)

- **Controle (*NEFCON*)**
- **Classificação (*NEFCLASS*)**
- **Aproximação de Funções (*NEFPROX*)**
- **Previsão de Séries (*extração automática de regras*)**
- **Fuzzy *clustering***
- ***etc.***